Concours commun INA-ENSA

# MATHÉMATIQUES

## PREMIÈRE COMPOSITION
(Option générale)

Durée : 3 heures

Ce problème a pour objet une étude de la constante d'Euler, $\gamma$; on en obtient une définition et un calcul approché dans les parties I et II, puis une expression sous forme intégrale en partie III.

## PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n \in \mathbb{R}$ par:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, de la forme $\frac{C}{n^\alpha}$ où C est une constante.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On posera

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

3.a. Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les inégalités:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

3.b. Etudier, sur l'intervalle $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$), le signe de la fonction $f_k$ définie par:

$$f_k(x) = \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)(x-k) - \frac{1}{x}.$$

En déduire l'encadrement:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right].$$

4. Prouver que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

## PARTIE II

1. On définit les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sur $]0, +\infty[$ par:

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} ;$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \frac{2}{3x^3} .$$

Etudier les variations de $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire leur signe.

2. Déduire des résultats de la question précédente que l'on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2} .$$

3. Soit $n \geq 2$.

3.a. Donner un encadrement, fonction très simple de n, pour $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, et un majorant de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

(On pourra utiliser la comparaison avec une intégrale.)

3.b. En déduire, pour tout $n \geq 2$, les inégalités:

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

4. Donner une valeur de l'entier n telle que l'encadrement précédent permette, à partir de $u_n$, de déterminer $\gamma$ à moins de $10^{-2}$ près. Puis, encadrer effectivement, selon ce procédé, $\gamma$ à $10^{-2}$ près.

## PARTIE III

1. Pour $x>0$, on définit $\varphi_0$ par $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}} - \dfrac{1}{x}$ .

1.a. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \varphi_0(x) = L$.

On convient de poser $\varphi_0(0) = L$. Par la suite, $\varphi_0$ désignera la fonction numérique ainsi définie sur $[0, +\infty[$.

1.b. Soit $x>0$. Calculer $\varphi_0'(x)$.

Vérifier que $\varphi_0'(x)$ a le signe de $e^{x/2} - e^{-x/2} - x$.

Déterminer ce signe et dresser le tableau des variations de $\varphi_0$ .

**2.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $J(k) = \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)x} \varphi_0(x)\, dx$.

**2.a.** Montrer que $J(k)$ a un sens.

**2.b.** Déterminer la limite de $J(k)$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

**3.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit, sur $]0, +\infty[$, la fonction $\varphi_k$ par:

$$\varphi_k(x) = \frac{e^{-kx}}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}.$$

**3.a.** Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \varphi_k(x)$. On prolonge $\varphi_k$ en 0 par la valeur obtenue, ce qui rend $\varphi_k$ définie sur $[0, +\infty[$.

**3.b.** Montrer que $J(0)$ peut s'écrire sous la forme:

$$J(0) = \int_0^{+\infty} [\, e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-kx} + e^{-x} \varphi_k(x)\, ]\, dx$$

**4.a.** Vérifier l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi_k(x)\, dx = J(k) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)x} - e^{-x}}{x}\, dx.$$

**4.b.** Soient $a$ et $A$ réels tels que $0 < a < A$.
Montrer que

$$\int_a^A \frac{e^{-(k+1)x} - e^{-x}}{x}\, dx = \int_A^{(k+1)A} \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int_a^{(k+1)a} \frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

**4.c.** Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{A \to +\infty} \left[ \int_A^{(k+1)A} \frac{e^{-x}}{x}\, dx \right]$$

et

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ (a > 0)}} \left[ \int_a^{(k+1)a} \frac{e^{-x}}{x}\, dx \right]$$

(On pourra encadrer l'exponentielle.)

**4.d.** En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)x} - e^{-x}}{x}\, dx.$

**5.** Montrer que $\gamma = J(0)$.

Concours commun INA-ENSA

**MATHÉMATIQUES**

DEUXIÈME COMPOSITION
(Option générale)

Durée : 3 heures

*Notations valables pour tout le problème.*

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On notera $0_E$ le vecteur nul de E, Id l'application identité de E et $\theta$ l'application qui à tout vecteur de E associe $0_E$ .
- $\ell$ est un endomorphisme de E, $\mathrm{Im}(\ell)$ désigne son image et $\mathrm{Ker}(\ell)$ son noyau.
- On pose $\ell^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $\ell^k = \ell \circ \ell^{k-1}$.

## PARTIE A

*Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout endomorphisme $\ell$ de E, il existe un entier p qui vérifie:*

$$(1) \quad \begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ E = \mathrm{Ker}(\ell^p) \oplus \mathrm{Im}(\ell^p) \end{cases}$$

(le symbole $\oplus$ signifie que la somme des sous-espaces vectoriels est directe).

**1.** Dans cette question, $\ell$ est un endomosphisme bijectif de E. Donner une valeur de p satisfaisant (1). Justifier la réponse.

**2. Exemple 1.**

Dans cette question, n=3 et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base $(e_1 , e_2 , e_3)$ et $\ell$ est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

**2.a.** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\ell)$ et une base de $\mathrm{Im}(\ell)$. Peut-on choisir p=1?

**2.b.** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\ell^2)$ et une base de $\mathrm{Im}(\ell^2)$.
Justifier l'égalité: $E = \mathrm{Ker}(\ell^2) \oplus \mathrm{Im}(\ell^2)$.