

PREMIÈRE COMPOSITION
(Option générale)

Durée : 3 heures

L'objet du problème est l'étude de la fonction F définie sur \mathbb{R} par:

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$$

puis la détermination d'une valeur approchée de l'unique racine de l'équation $F(x)=x$.

PREMIERE PARTIE

Etude de la fonction F .

1. Ensemble de définition de F .

Montrer que F est définie pour tout réel x .

2. Détermination de quelques valeurs de F .

a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} F(1).$$

En déduire une relation entre $F(1)$ et $F(2)$, puis la valeur de $F(2)$.

c) Plus généralement, établir une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$, et montrer que l'on peut ainsi calculer $F(n)$ pour tout entier naturel n .

d) Calculer $F(-n)$ pour n entier naturel non nul. Donner les valeurs de $F(-1)$ et de $F(-2)$ sous forme de fractions.

3. Sens de variation de F .

Montrer que F est décroissante sur \mathbb{R} .

4. Etude de F quand x tend vers $-\infty$.

a) Lorsque x est strictement négatif, déterminer le sens de variation de la fonction $t \mapsto e^{-x \ln(1+t^2)}$ sur $[0,1]$, puis exprimer sa valeur en $t = \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x}$. Qu'en résulte-t-il pour la courbe représentative de F quand x tend vers $-\infty$?

1ère composition 2/3

5. Etude de F quand x tend vers +∞.

a) Montrer que $\forall t \in [0,1] \quad \frac{1}{2} t^2 \leq \ln(1+t^2)$.

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad F(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$.

c) Soit $\phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Pour $x > 0$, exprimer $\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$ à l'aide de la fonction ϕ .

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

6. Etude de la dérivabilité de F.

a) Soit $g(x) = - \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} \ln(1+t^2) dt$.

Montrer l'existence de $g(x)$ pour tout réel x .

b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R} \quad |e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2} e^{|a|}$.

c) Montrer que $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall h \in \mathbb{R}$ avec $|h| \leq 1$,

$$|F(x_0+h) - F(x_0) - h g(x_0)| \leq h^2 \int_0^1 e^{-x_0 \ln(1+t^2)} [\ln(1+t^2)]^2 dt.$$

d) En déduire que F est dérivable et expliciter $F'(x)$. Retrouver le résultat de la troisième question.

e) Calculer $F'(0)$ et en donner une approximation décimale par défaut à 10^{-3} près.

7. Tracé.

En réunissant les résultats précédents, dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

DEUXIEME PARTIE

Etude de l'équation (E): $F(x) = x$.

1. Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit φ une fonction de classe C^2 sur le segment $[a, b]$.

On pose $c = \frac{a+b}{2}$, $I(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) dt$ et $R(\varphi) = (b-a)\varphi(c)$.

a. Dans le cas où φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1, montrer que $I(\varphi) = R(\varphi)$.

b. Montrer que

$$\forall t \in [a, b] \quad \varphi(t) = P(t) + \int_c^t (t-u) \varphi''(u) du$$

où P est un polynôme que l'on précisera.

c. Montrer que $I(\varphi) - R(\varphi) = \int_a^b \left[\int_c^t (t-u) \varphi''(u) du \right] dt$.

En déduire que $|I(\varphi) - R(\varphi)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} M_2$ où $M_2 = \sup_{t \in [a, b]} |\varphi''(t)|$.

2. Etude de l'équation $F(x) = x$.

a) Montrer que l'équation (E) a une solution unique; soit α cette solution.

b) Montrer que $\alpha \in]0, 1[$.

3. Détermination d'une valeur approchée de α .

a) On admet que F est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que

$$F''(x) = \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} [\ln(1+t^2)]^2 dt.$$

Quel est le sens de variation de F' ?

b) Soient A et B les points de (\mathcal{C}) d'abscisses respectives 0 et 1; soit β l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y=x$ avec la corde AB . Déterminer β .

c) Montrer que $F(\beta) < \beta$. Pour cela, on pourra considérer la fonction δ définie sur $[0, 1]$ par $\delta(x) = p(x) - F(x)$ où $y = p(x)$ est l'équation de la corde AB .

En déduire que $F(\beta) < \alpha < \beta$.

d) Détermination d'une valeur approchée de $F(\beta)$.

On pose $\lambda_x(t) = e^{-x \ln(1+t^2)} = (1+t^2)^{-x}$.

Pour calculer $F(\beta) = \int_0^1 \lambda_\beta(t) dt$, on utilise la méthode de la question 1. en partageant $[0, 1]$ en quatre intervalles égaux; on prend donc comme valeur approchée de $F(\beta)$ le nombre

$$R = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \lambda_\beta\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}k\right).$$

Calculer R , majorer $|F(\beta) - R|$ et donner un encadrement de $F(\beta)$.

e) Déduire des questions c) et d) un encadrement de α .