

PREMIÈRE COMPOSITION
(Option générale)

Durée : 3 heures

E désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

L'application N de $[0,1] \times [0,1]$ dans \mathbb{R} est définie par :

$$N(\alpha, t) = \frac{\alpha + t - |\alpha - t|}{2}$$

Pour f élément de E, on désigne par $U(f)$ l'application de $[0,1]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$U(f)(\alpha) = \int_0^1 N(\alpha, t) f(t) dt$$

La partie II utilise des résultats de la partie I.

La partie III utilise également des résultats de la partie I, ainsi que les résultats de la question II.2.

PARTIE I

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'application

$$\begin{aligned} [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow N(\alpha, t) \end{aligned}$$

est un élément de E. Donner sa représentation graphique pour les valeurs suivantes de α :

$$\alpha = 0 \qquad \alpha = \frac{1}{3} \qquad \alpha = 1$$

Montrer que $U(f)(\alpha) = \int_0^\alpha t f(t) dt + \alpha \int_\alpha^1 f(t) dt$

2. Soit e_0 l'élément de E défini par :

$$\forall t \in [0,1], \quad e_0(t) = 1$$

Représenter graphiquement la fonction $U(e_0)$.

Montrer que $\sup_{\alpha \in [0,1]} |U(e_0)(\alpha)| = \frac{1}{2}$.

3. Soit e_1 l'élément de E défini par :

$$\forall t \in [0,1], \quad e_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

Montrer qu'il existe un réel λ , dont on précisera la valeur, tel que $U(e_1) = \lambda e_1$.

4. Soit U l'application qui à tout $f \in E$ fait correspondre $U(f)$.

4.a. Montrer que U est une application linéaire de E dans lui-même.

4.b. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe C^2 et que sa dérivée seconde vérifie :

$$[U(f)]'' = -f$$

Préciser les valeurs de $U(f)(0)$ et $[U(f)]'(1)$.

PARTIE II

1. Déterminer le noyau $\text{Ker}U$ de l'application linéaire U. U est-elle injective ?

2. On définit $G = \{g/g \in E, g \text{ est de classe } C^2, g(0) = 0, g'(1) = 0\}$

2.a. Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de E.

2.b. Soit $g \in G$. Montrer que g admet un unique antécédent par U, que l'on précisera.

2.c. En déduire $\text{Im}U$, l'image de l'application linéaire U.

U est-elle surjective ?

3. Soit λ un réel non nul.

On note U_λ l'application linéaire de E dans lui-même définie par : $U_\lambda = U - \lambda \text{Id}_E$

3.a. Soit f élément du noyau $\text{Ker}U_\lambda$ de U_λ .

Former une équation différentielle du second ordre satisfaite par f .

Préciser les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.

3.b. En déduire que $\text{Ker}U_\lambda = \{0\}$ sauf lorsque λ appartient à l'ensemble :

$$\left\{ \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} ; k \in \mathbb{N} \right\}$$

Lorsque $\lambda = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$, avec $k \in \mathbb{N}$, donner la forme générale des éléments de $\text{Ker}U_\lambda$.

PARTIE III

On considère l'équation (P) suivante : (P) $\begin{cases} Y'' + \varphi(Y) = 0 \\ Y(0) = 0 ; Y'(1) = 0 \end{cases}$

où Y est une fonction inconnue de classe C^2 sur $[0,1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , et φ une fonction donnée, de classe C^1 de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , satisfaisant à la condition :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)| = A ; 0 < A < 2$$

1. On suppose que (P) admet une solution Y_0 .

On pose, pour tout $x \in [0,1]$,

$$Z(x) = \int_0^1 N(x,t) \cdot \varphi[Y_0(t)] dt$$

Calculer Z'' ; en déduire qu'il existe des constantes α et β telles que $\forall x \in [0,1]$, $Y_0(x) = \alpha x + \beta + Z(x)$ puis en déduire $\forall x \in [0,1]$, $Z(x) = Y_0(x)$.

2. Dans cette question on établit que (P) admet au plus une solution.

2.a. Montrer que, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A |t_1 - t_2|$$

2.b. On suppose que Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (P).

Justifier l'existence d'un réel M tel que $M = \sup_{x \in [0,1]} |Y_1(x) - Y_2(x)|$

2.c. A l'aide de la question (III.1.), prouver que, pour tout $x \in [0,1]$, l'on a :

$$|Y_1(x) - Y_2(x)| \leq \frac{A}{2} M$$

2.d. En déduire le résultat annoncé ci-dessus.

3. On prend $\varphi(t) = \omega^2 \sin t$, avec ω réel tel que $0 < \omega < \sqrt{2}$.

Quelle est la solution unique de (P) ?

4. On prend $\varphi(t) = \omega^2 \cos t$, avec ω réel tel que $0 < \omega < \sqrt{2}$.

On admet ici que (P) possède une solution que l'on note L .

On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[0,1]$ vers \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1], u_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1] : u_{n+1}(x) = \omega^2 \int_0^1 N(x,t) \cos[u_n(t)] dt \end{cases}$$

4.a. Prouver que, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $|\cos t_1 - \cos t_2| \leq |t_1 - t_2|$

4.b. Prouver que, si l'on pose pour tout n , $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n = \sup_{t \in [0,1]} |u_n(t) - L(t)| \quad \text{on a :} \quad \Delta_{n+1} \leq \frac{\omega^2}{2} \Delta_n$$

4.c. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$

Quelle est votre conclusion sur le système (P) dans ce cas ?