

Durée : 4 heures
Option Générale

EXERCICE 1

Recherche des valeurs propres d'un endomorphisme

Dans cet exercice :

E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

$GL_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (2X + 1) \cdot P(X) - (X^2 - 1) \cdot P'(X)$$

- 1° Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2° Soit B un vecteur propre pour f , c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation : $f(B) = \lambda B$.

- a) Montrer que B est nécessairement de degré 2.
- b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B .
Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 : il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X + 1)^k A(X) \quad \text{avec} \quad A(-1) \neq 0$$

Montrer que $k = 2$ et que A est constant.

En déduire que $\lambda = 3$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

- c) En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1. En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.
- d) On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$. Montrer que -1 et 1 sont racines de B . En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B .

3° Étude d'un cas particulier

Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F . On désigne par $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F .

- a) Montrer que g est un endomorphisme de F .
- b) Écrire la matrice A de g relativement à la base $\mathbf{B}$.
- c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P D^n P^{-1}$$

- d) Expliciter alors A^n en fonction de n .

EXERCICE 2

On désigne par x un nombre réel tel que $x > 1$ et l'on se propose d'étudier la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Lorsque la série converge, sa somme est notée : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

1° Étude de la dérivabilité de f

a) Justifier la convergence de la série définissant f .

b) Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de : $n^{\frac{x+1}{2}} \cdot \ln^2(n) \cdot u_n(x)$.

En déduire la convergence de la série de terme général : $\ln^2(n) \cdot u_n(x)$ et, a fortiori, la convergence de la série de terme général : $\ln(n) \cdot u_n(x)$.

c) Pour $x > 1$ et pour tout réel h tel que : $|h| \leq \frac{x-1}{2}$ montrer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\left| u_n(x+h) - u_n(x) + h \cdot \ln(n) \cdot u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \cdot u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \ln^2(n)$$

puis que :

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) \cdot u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n) \cdot u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

d) En déduire que f est dérivable sur $]1, +\infty[$: donner l'expression de la dérivée de f sous la forme de somme d'une série.

2° Représentation de f

a) Pour $x > 1$ et pour k entier naturel non nul, vérifier que l'on a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

et que, pour tout entier $N > 1$:

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

b) Prouver alors que :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

c) Préciser les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs supérieures et quand x tend vers plus l'infini.

d) Déduire des questions précédentes les variations de f , et donner l'allure de sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 4 cm. On admettra à cet effet que :

$$f(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad f(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

PROBLÈME

On dispose de deux urnes A et B contenant respectivement a et b boules (a et b sont deux entiers naturels non nuls).

On procède alors à l'expérience suivante : on choisit une des urnes pour en extraire une boule que l'on met dans l'autre urne, en admettant que la probabilité de choisir l'urne A est q , que la probabilité de choisir B est p , avec $p + q = 1$, $p \in]0, 1[$.

On répète cette épreuve jusqu'à ce que l'une des urnes soit vide, si cela se produit, ou bien indéfiniment. On pose :

$$x = \frac{q}{p}.$$

A) Étude d'une suite récurrente

On considère la suite U définie par la relation de récurrence suivante :

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$(I) \quad U_n = p \cdot U_{n+1} + q \cdot U_{n-1}$$

U_0 et U_{a+b} étant deux réels donnés.

1° Prouver que l'on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$p \cdot (U_{n+1} - U_n) = q \cdot (U_n - U_{n-1})$$

2° Lorsque $p = q$, montrer que la suite U est arithmétique. En déduire U_n en fonction de n , a , b , U_0 et U_{a+b} .

3° Lorsque p est différent de q , montrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \lambda + \mu \cdot x^n$$

Déterminer U_n en fonction de n , a , b , U_0 et U_{a+b} .

B) Étude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

Soit k entier tel que $0 \leq k \leq a + b$.

On note E_k l'événement : "à partir d'un contenu de k boules dans l'urne A, l'expérience s'arrête parce que l'urne A est vide". Ainsi :

$$P(E_0) = 1, \quad P(E_{a+b}) = 0$$

Et enfin, on note A l'événement : "le tirage se fait dans l'urne A".

1° Pour k entier tel que $1 \leq k \leq a + b - 1$, établir une relation entre $P(E_k)$, $P(E_{k+1})$ et $P(E_{k-1})$.

- 2° a) En utilisant les résultats du A), calculer la probabilité $P(E_a)$ de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne A.
- b) Calculer la limite de $P(E_a)$ lorsque b tend vers plus l'infini.
Interpréter ce résultat lorsque $p < q$.
- c) Pour p différent de q , déterminer la limite de $P(E_a)$ lorsque p tend vers 0,5.
- 3° Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B ?
- 4° Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer ?

C) Étude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer

Pour k entier tel que $0 \leq k \leq a+b$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il faut effectuer pour vider l'une quelconque des urnes A ou B, à partir d'un contenu initial de k boules dans l'urne A. Si l'expérience est sans fin, on pose $X_k = -1$, et alors, d'après la question B) 4°, on sait que $P(X_k = -1) = 0$. On admet que X_k possède une espérance que l'on note $E(X_k)$. Ainsi :

$$E(X_0) = 0 \text{ et } E(X_{a+b}) = 0$$

Soit A_1 (resp. B_1) l'événement "l'expérience se termine parce que l'urne A (resp. B) est vide".
On note P_{A_1} (resp. P_{B_1}) la probabilité conditionnelle sachant A_1 (resp. B_1).

- 1° Pour j entier naturel non nul et $1 \leq k \leq a+b-1$, montrer que :

$$P_{A_1}(X_k = j) = q \cdot P_{A_1}(X_{k-1} = j-1) + p \cdot P_{A_1}(X_{k+1} = j-1)$$

et :

$$P_{B_1}(X_k = j) = q \cdot P_{B_1}(X_{k-1} = j-1) + p \cdot P_{B_1}(X_{k+1} = j-1)$$

puis que :

$$P(X_k = j) = q \cdot P(X_{k-1} = j-1) + p \cdot P(X_{k+1} = j-1)$$

En déduire :

$$E(X_k) = 1 + q \cdot E(X_{k-1}) + p \cdot E(X_{k+1})$$

2° Pour $p = q$:

- a) Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha \cdot k^2$ ait une espérance qui vérifie la relation :

$$\text{pour } k \geq 1 : E(Y_k) = \frac{1}{2} \cdot E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2} \cdot E(Y_{k-1})$$

- b) En utilisant le A), montrer que $E(X_a) = ab$.

3° Pour p différent de q :

- a) Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta \cdot k$ ait une espérance qui vérifie la relation :

$$\text{pour } k \geq 1 : E(Z_k) = p \cdot E(Z_{k+1}) + q \cdot E(Z_{k-1})$$

- b) En utilisant le A), montrer que :

$$E(X_a) = \frac{1}{p-q} \left(\frac{(a+b)(x^a - 1)}{x^{a+b} - 1} - a \right)$$

- c) Quelle est la limite de $E(X_a)$ quand p tend vers 0.5 ? (on pourra poser : $x = 1 + y$)

- d) Quelle est la limite de $E(X_a)$ quand b tend vers plus l'infini dans le cas $p < q$?