

ECRICOME

Option Economique et Technologique

EXERCICE 1

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$\ln x + x = n \quad (E_n)$$

À cet effet, on introduit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par :

$$f(x) = \ln x + x$$

1.1. Existence des racines de (E_n)

1. Étudier les variations de la fonction f . Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , (E_n) admet une racine et une seule x_n et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
2. Donner la valeur de x_1 . Trouver, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près, et déterminer l'entier naturel p tel que :

$$\frac{p}{100} \leq x_2 < \frac{p+1}{100}$$

3. Représenter la fonction f relativement à un repère orthonormal du plan (unité graphique : 2 cm).

1.2. Étude de la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++} \quad \ln x < x$$

2. Prouver que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$$

3. Quelle est la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$?

1.3. Comportement asymptotique de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Montrer que $\frac{\ln(x_n)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En déduire que :

$$x_n \sim n$$

2. Calculer la limite de $x_{n+1} - x_n$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}$$

- a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n - 1 = \frac{\ln \frac{x_n}{n}}{\ln n}$$

b. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

c. Prouver alors que :

$$1 - u_n \sim \frac{1}{n} \quad n \rightarrow +\infty$$

4. En déduire qu'il existe une fonction ε ayant une limite nulle en zéro telle que, pour tout entier supérieur ou égal à 2, on ait :

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right)$$

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la nature et la somme de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) \cos^n x \, dx$$

À cet effet, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et on admettra dans la suite que, pour tout réel x :

$$\sum_{p=1}^n C_n^p \sin(2px) = 2^n \sin(nx) \cos^n x$$

2.1. Calcul de u_n en fonction de S_n

1. On définit la fonction f_n par :

$$\begin{cases} \forall t \in]0, 1] & f_n(t) = \frac{1 - (1-t)^n}{t} \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

a. Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[0, 1]$.

b. On pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) \, dt$$

Prouver que :

$$I_n = \sum_{p=1}^n C_n^p \frac{(-1)^{p-1}}{p}$$

puis, après avoir calculé $\int_0^1 (1-t)^{k-1} \, dt$ montrer que :

$$I_n = S_n$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel p non nul :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$$

et, à l'aide de la formule admise, en déduire que :

$$u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} S_n$$

2.2. Convergence et somme de la série :

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$f(x) = -\ln(1-x)$$

1. Étudier les variations de la fonction φ définie par :

$$\forall t \in [0, x] \quad \varphi(t) = \frac{x-t}{1-t}$$

et montrer que :

$$\forall t \in [0, x] \quad 0 \leq \varphi(t) \leq x$$

2. Vérifier que :

$$\forall t \in [0, x] \quad \frac{\varphi(t)}{1-t} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t}$$

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1[\quad f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + R_n(x)$$

où l'on a posé :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)^n}{1-t} dt$$

4. Déduire de 2.2.1 que :

$$\forall x \in [0, 1[\quad 0 \leq R_n(x) \leq -x^n \ln(1-x)$$

5. Exprimer la quantité $(1-x) \sum_{k=1}^n S_k x^k$ en fonction de $f(x)$, $R_n(x)$, S_n et x .

Prouver que la série de terme général $S_k x^k$ est convergente. Montrer que sa somme est $\frac{f(x)}{1-x}$.

6. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty} u_p$.

PROBLÈME 3

3.1. Première partie

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, par $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E , et par f l'endomorphisme de E qui, à tout vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base B , associe le vecteur u' de coordonnées (x', y', z') dans la base B tel que :

$$\begin{cases} 4x' = y \\ 4y' = 4x + 2y + 4z \\ 4z' = y \end{cases}$$

1. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base B .
2. Calculer les valeurs propres de f .
 f est-il diagonalisable ?
 M est-elle inversible ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de f .

3.2. Deuxième partie

On dispose de deux urnes A et B : initialement l'urne A contient N boules noires tandis que l'urne B contient N boules blanches, avec $N \geq 2$. On y effectue une suite d'épreuves, chaque épreuve étant réalisée de la façon suivante :

On tire au hasard une boule dans chacune des deux urnes, la boule tirée de l'urne A est mise dans B , celle tirée de B est mise dans A .

On appelle Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne A à l'issue de la k -ème épreuve et l'on pose $Z_k = Y_{k-1} - Y_k$, pour k entier naturel non nul, avec la convention $Y_0 = N$.

Pour k et j entiers naturels, on pose :

$$p(k, j) = P[Y_k = j]$$

où P désigne la probabilité. Ainsi :

$$\begin{aligned} P[Y_k = j] &= 0 \text{ si } j > N \\ P[Y_0 = N] &= 1 \\ P[Y_0 = k] &= 0 \text{ si } k \neq N \\ P[Y_k = -1] &= 0 \end{aligned}$$

3.2.1. Étude du cas particulier $N = 2$

On note $U_k = \begin{pmatrix} p(k, 0) \\ p(k, 1) \\ p(k, 2) \end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer U_1 .
Calculer les probabilités conditionnelles :

$$P_{Y_k=j}(Y_{k+1} = i)$$

pour $i \in \{0, 1, 2\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$ puis montrer que, pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = M \cdot U_k$$

2. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul :

$$U_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} W + V$$

3. En déduire l'expression de $p(k, 0)$, $p(k, 1)$ et $p(k, 2)$ en fonction de k pour k entier naturel non nul.
4. Montrer que l'espérance $E[Y_k]$ de la variable Y_k est constante.
5. Calculer la variance $V[Y_k]$ de la variable Y_k en fonction de k et sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.

3.2.2. Retour au cas général

Dans cette deuxième partie, on revient au cas général avec $N \geq 3$ et on se propose d'étudier la convergence des suites $(E[Y_k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(V[Y_k])_{k \in \mathbb{N}^*}$.

1. Calcul de l'espérance $E[Y_k]$ de la variable Y_k :

- a. Quelles sont les valeurs prises par la variable Z_k ? Calculer :

$$P[Z_k = 1/Y_{k-1} = j] \text{ et } P[Z_k = -1/Y_{k-1} = j]$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $j \leq N$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- b. En appliquant la formule des probabilités totales, prouver que, pour tout entier naturel k non nul :

$$E[Z_k] = \frac{2}{N} E[Y_{k-1}] - 1$$

- c. Montrer que la suite $(E[Z_k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique.
- d. En déduire l'expression de $E[Z_k]$ et $E[Y_k]$ en fonction de k et de N .
- e. Montrer que les suites $(E[Z_k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(E[Y_k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes et donner leur limite quand k tend vers $+\infty$.

2. Calcul de la variance $V[Y_k]$ de la variable Y_k :

- a. Montrer que :

$$E[Z_k^2] = E[Y_{k-1}^2] - 2E[Y_k Y_{k-1}] + E[Y_k^2]$$

puis que :

$$E[Z_k Y_{k-1}] = E[Y_{k-1}^2] - E[Y_k Y_{k-1}]$$

- b. En utilisant la méthode de 3.2.2.1.b. montrer que :

$$E[Z_k Y_{k-1}] = \frac{2}{N} E[Y_{k-1}^2] - E[Y_{k-1}]$$

puis que :

$$E[Z_k^2] = \frac{2}{N^2} E[Y_{k-1}^2] - \frac{2}{N} E[Y_{k-1}] + 1$$

c. Dédire des résultats précédents que :

$$E[Y_k^2] = 2 \frac{N-1}{N} E[Y_{k-1}] + \frac{N^2 - 4N + 2}{N^2} E[Y_{k-1}^2] + 1$$

puis que :

$$V[Y_k] = \frac{N^2 - 4N + 2}{N^2} V[Y_{k-1}] - \frac{2}{N^2} \left[E[Y_{k-1}] - \frac{N}{2} \right]^2 + \frac{1}{2}$$

(On utilisera la relation $E[Y_k] = \frac{N-2}{N} E[Y_{k-1}] + 1$).

d. En remarquant que :

$$E[Y_k] - \frac{N}{2} = \frac{N-2}{N} \left[E[Y_{k-1}] - \frac{N}{2} \right]$$

en déduire que $V[Y_{k+1}]$ est égal à :

$$\frac{2(N-1)(N-3)}{N^2} V[Y_k] - \frac{(N-2)^2 (N^2 - 4N + 2)}{N^4} V[Y_{k-1}] + \frac{2(N-1)}{N^2}$$

e. On pose :

$$u_k = V[Y_k] - \frac{N^2}{4(2N-1)}$$

Montrer que :

$$u_{k+1} = \frac{2(N-1)(N-3)}{N^2} u_k - \frac{(N-2)^2 (N^2 - 4N + 2)}{N^4} u_{k-1}$$

f. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ , que l'on ne calculera pas, tels que :

$$V[Y_k] = \frac{N^2}{4(2N-1)} + \lambda \left(\frac{N-2}{N} \right)^{2k} + \mu \left(\frac{N^2 - 4N + 2}{N^2} \right)^k$$

g. Montrer enfin que $V[Y_k]$ tend vers $\frac{N^2}{4(2N-1)}$ lorsque k tend vers $+\infty$.