

Correction Ecricome 2007

Voie économique

La correction comporte 15 pages.

Exercice 1

1.1 Etude des variations de la fonction f_a

1. • Nous avons clairement :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_a(t) = +\infty$$

car :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$$

- Comme au voisinage de $+\infty$:

$$f_a(t) = \frac{1}{2}t + \varepsilon(t)$$

avec $\varepsilon(t) = \frac{a^2}{2t}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$ nous pouvons dire que la courbe représentative de f_a admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation :

$$y = \frac{1}{2}t$$

Enfin comme :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{2t} = 0^+$$

nous pouvons affirmer que :

la courbe représentative de f_a est au-dessus de son asymptote oblique

2. Nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_a(t) = +\infty$$

Ce qui s'interprète en disant que :

la courbe représentative de f_a admet une asymptote verticale d'équation $t = 0$

3. Tout d'abord f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fraction rationnelle (après réduction) dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble avec :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'_a(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right) \\ &= \frac{t^2 - a^2}{2t^2} \end{aligned}$$

Voici le tableau de variation de f_a :

t	0	a	$+\infty$
$f'_a(t)$		− 0 +	
$f_a(t)$	$+\infty$	$\searrow$ a $\nearrow$	$+\infty$

4. Comme f_a est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, a]$ et strictement croissante sur $[a, +\infty[$ avec $f_a(a) = a$, nous pouvons donc affirmer que :

$$\forall t > 0, \quad f_a(t) \geq a \tag{1}$$

1.2 Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- Comme nous avons vu précédemment que $f_a(a) = a$, (ce qui permet de dire que a est un point fixe pour f_a), le cas particulier où le premier terme u_0 de la suite étudiée vaut a , nous permet de dire que dans ce cas :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est constante égale à } a}$$

Ceci s'établit facilement par récurrence.

- Revenons au cas général où $u_0 > 0$. Nous avons vu que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_a(t) = \frac{t^2 - a^2}{2t^2}$$

et comme $\frac{a^2}{2t^2}$ est toujours strictement positif, cela implique que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_a(t) < \frac{t^2}{2t^2}$$

donc en particulier :

$$\forall t > a, \quad f'_a(t) < \frac{1}{2} \quad (2)$$

D'autre part le tableau de variation de f_a nous a déjà donné que :

$$\forall t > a, \quad f'_a(t) > 0 \quad (3)$$

Conclusion : selon (2) et (3)

$$\boxed{\forall t > a, \quad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}} \quad (4)$$

- Comme l'étude de f_a a montré à la **question 4 de la partie 1.1** que $\forall t > 0, f_a(t) \geq a$, or comme une récurrence immédiate montre que tous les termes de la suite sont strictement positif, car la fonction f_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, (cet ensemble est stable par f_a) alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq a}$$

Ce résultat peut aussi s'établir directement par récurrence.

4. _

- En utilisant l'*inégalité des accroissements finis* appliquée à la fonction f_a sur l'intervalle $[a, u_n]$ dans lequel elle y est continue et dérivable, nous pouvons écrire selon (4) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq f_a(u_n) - f_a(a) \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)}$$

- Démontrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n : |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

– L'initialisation pour $n = 1$ est immédiate car :

$$|u_1 - a| \leq |u_1 - a|$$

– Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

– Montrons que $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - a| &\leq \frac{1}{2} |u_n - a| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| \text{ selon l'hypothèse de récurrence} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a| \end{aligned}$$

Conclusion : la proposition étant transmissible est donc héréditaire selon le *premier principe de récurrence* (ou *récurrence standard*) pour tout entier n non nul soit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. Comme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, le *théorème d'encadrement* nous permet d'écrire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

```
6. program ecricome;
   var i : integer; u : real;
   begin
   u:=1;
   for n :=0 to 99 do
   begin writeln('indice ',n, ' :',u); u:=(u+2/u)/2 end;
   end.
```

1.3 Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Nous avons après quelques calculs rapides :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial x}(x, y) &= -\frac{(y - x^2)(y + 1)}{2x^2y} \\ \frac{\partial f_a}{\partial x}(x, y) &= -\frac{(x - y^2)(x + 1)}{2xy^2} \\ \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{y + 1}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{x + 1}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f_a}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y}(x, y) = -\left(\frac{x^2 + y^2}{2x^2y^2}\right) \text{ le théorème de Schwarz s'applique ici} \end{aligned}$$

2. Comme nous travaillons sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si g admet un *extremum local*, c'est forcément en un

point critique (x_0, y_0) vérifiant :

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \frac{\partial f_a}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f_a}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} -\frac{(y_0 - x_0^2)(y_0 + 1)}{2x_0^2 y_0} = 0 \\ -\frac{(x_0 - y_0^2)(x_0 + 1)}{2x_0 y_0^2} = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y_0 - x_0^2 = 0 \\ x_0 - y_0^2 = 0 \end{cases} \quad \text{car } x_0 \text{ et } y_0 \text{ sont strictement positif} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y_0 - x_0^2 = 0 \\ x_0 - x_0^4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y_0 - x_0^2 = 0 \\ -x_0(x_0 - 1)(x_0^2 + x_0 + 1) = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y_0 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \quad \text{car } x_0 \text{ est strictement positif} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

g admet donc un seul point critique en $(1, 1)$

Examinons maintenant sa nature. Pour cela calculons $rt - s^2$ en notant :

$$r = \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}(1, 1) \quad s = \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y}(1, 1) \quad t = \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(1, 1)$$

Cela nous donne facilement :

$$\begin{aligned}
 rt - s^2 &= 2 \times 2 - (-1)^2 \\
 &= 3 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

La stricte positivité de l'expression nous permet de dire que le point candidat est effectivement un extremum, et comme $r > 0$:

g présent au point $(1, 1)$ un minimum local

3. Vérifions ...

$$\begin{aligned}
 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) &= 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{x}{y} + \frac{1}{2x}y + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + 1 \\
 &= \frac{x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + y + x + 2xy}{2xy} \\
 &= \frac{xy(x + y) + (x + y)^2 + x + y}{2xy} \\
 &= \frac{(x + y)(xy + x + y + 1)}{2xy} \\
 &= \frac{(x + y)(x + 1)(y + 1)}{2xy} \\
 &= \boxed{g(x, y)}
 \end{aligned}$$

4. Pour déduire que l'extremum local de g sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ soit un minimum global il suffit de montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad g(x, y) - g(1, 1) \geq 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad g(x, y) - g(1, 1) &= 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) - (1 + f_1(1) + f_1(1) + f_1(1)) \\ &= f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) - 3 \\ &\geq 1 + 1 + 1 - 3 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car selon (1) : $\forall t > 0, f_1(t) \geq 1$.

Conclusion :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad g(x, y) - g(1, 1) \geq 0$$

g présente un minimum global au point $(1, 1)$

Exercice 2

2.1 Diagonalisation de A .

1. Comme $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ un calcul rapide et sans commentaire particulier donne que :

$$\boxed{A^2 = A} \tag{5}$$

Cette égalité prouve que $P = X^2 - X$ est un *polynôme annulateur* de A et comme d'après le cours $\text{spec}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P alors :

les valeurs propres possibles de A sont 0 et 1

2. Testons les valeurs propres possibles de A .

- Commençons par la valeur 0. Si 0 n'était pas valeur propre de A alors A serait inversible, ce qui n'est pas le cas puisque les deux colonnes sont clairement proportionnelles. Moralité :

0 est valeur propre de A

- D'autre part si 1 n'était pas valeur propre alors $A - I$ serait inversible. Or nous avons :

$$\begin{aligned} A^2 = A &\implies A(A - I) = 0 \\ &\implies A(A - I)(A - I)^{-1} = 0 \\ &\implies A = 0 \text{ ce qui est faux !} \end{aligned}$$

Ainsi :

1 est valeur propre de A

Conclusion :

les valeurs propres de A sont 0 et 1

- Comme le cardinal de $\text{spec}(A)$ est égal à deux et comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce résultat donne une condition suffisante pour conclure que :

A est diagonalisable

- D'après le cours A est semblable à une matrice diagonale, donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

car :

$$\begin{aligned} E_0(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 3x - y = 0 \text{ et } 6x - 2y = 0 \right\} \\ &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 3x - y = 0 \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{et } E_1(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 2x - y = 0 \text{ et } 6x - 3y = 0 \right\} \\ &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 2x - y = 0 \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Enfin par la *méthode de Gauss-Jordan* :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Diagonalisation de ϕ_A .

1. _

- Pour commencer signalons que si A et M sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors par propriété AM et MA appartiennent encore à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc $AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\phi_A \text{ est bien une application de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans lui-même} \quad (6)$$

- Linéarité de ϕ_A .

Soit M_1 et M_2 deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et a et b deux réels alors :

$$\begin{aligned} \phi_A(aM_1 + bM_2) &= A(aM_1 + bM_2) - (aM_1 + bM_2)A \\ &= aAM_1 + bAM_2 - aM_1A - bM_2A \\ &= a(AM_1 - M_1A) + b(AM_2 - M_2A) \\ &= a\phi_A(M_1) + b\phi_A(M_2) \end{aligned}$$

$$\phi_A \text{ est une application linéaire} \quad (7)$$

Conclusion : selon (6) et (7)

$$\phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

2. _

- Montrons que $\phi_A^3 - \phi_A$ est l'application nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour établir que $X^3 - X$ est un *polynôme annulateur* de ϕ_A . Autrement dit montrons que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

nous obtenons $\phi_A^3(M) - \phi_A(M) = 0$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \phi_A^2(M) &= (\phi_A \circ \phi_A)(M) \\
 &= \phi_A(\phi_A(M)) \\
 &= A\phi_A(M) - \phi_A(M)A \\
 &= A^2M - AMA - AMA + MA^2 \\
 &= AM - 2AMA + MA \text{ puisque } A^2 = A \\
 \Rightarrow \phi_A^3(M) &= \phi_A(AM - 2AMA + MA) \\
 &= A^2M - 2A^2MA + AMA - AMA + 2AMA^2 - MA^2 \\
 &= AM - 2AMA + AMA - AMA + 2AMA - MA \text{ puisque } A^2 = A \\
 &= AM - MA \\
 &= \phi_A(M)
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\phi_A^3 = \phi_A}$$

- Comme l'ensemble des racines de Q où $Q = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est $\{-1, 0, 1\}$ alors:

$$\boxed{\text{spec}(\phi_A) \subset \{-1, 0, 1\}} \quad (8)$$

3. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 M \text{ est un vecteur propre de } \phi_A &\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \phi_A(M) = \lambda M \\
 &\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid AM - MA = \lambda M \\
 &\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid PDP^{-1}M - MPDP^{-1} = \lambda M \\
 &\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid PDP^{-1}MP - MPD = \lambda MP \\
 &\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid DP^{-1}MP - P^{-1}MPD = \lambda P^{-1}MP \\
 &\iff \boxed{N = P^{-1}MP \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid DN - ND = \lambda N}
 \end{aligned}$$

(a) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 E &= \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid DN - ND = 0\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \boxed{\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}
 \end{aligned}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \ker \phi_A &= E_0(\phi_A) \\
 &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \phi_A(M) = 0\} \\
 &= \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \mid a \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 3d-2a & a-d \\ 6d-6a & 3a-2d \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ a \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \text{Vect} \{M_1, A\}
 \end{aligned}$$

Explications : nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in E_0(\phi_A) &\iff \phi_A(M) = 0 \\ &\iff AM - MA = 0 \\ &\iff DN - ND = 0 \text{ avec } N = P^{-1}MP \\ &\iff N \in E \end{aligned}$$

Nota bene : M_1 et A sont non nulles et non proportionnelles alors :

$$\dim \ker \phi_A = 2$$

(c) Les deux autres valeurs propres possibles de ϕ_A sont -1 et 1 selon (8). Testons-les.

- Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de ϕ_A alors $\phi_A - id$ est bijectif et :

$$\begin{aligned} \phi_A^3 = \phi_A &\iff \phi_A^3 - \phi_A = 0 \\ &\iff (\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \phi_A (\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 0 \\ &\iff (\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})^{-1} (\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \phi_A (\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 0 \\ &\iff \phi_A (\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 0 \\ &\iff \phi_A^2 + \phi_A = 0 \end{aligned}$$

ce qui est faux puisque :

$$\begin{aligned} (\phi_A^2 + \phi_A)(M) &= AM - 2AMA + MA + AM - MA \\ &= 2AM - 2AMA \\ &= 2AM(I - A) \\ &= 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et il existe une matrice M telle que $2AM(I - A) \neq 0$, prenez par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et vous verrez !

Ainsi :

$$\boxed{1 \in \text{spec}(\phi_A)}$$

- En effectuant le même raisonnement pour l'autre valeur propre potentielle -1 on trouvera que :

$$\boxed{-1 \in \text{spec}(\phi_A)}$$

En effet supposons que -1 ne soit pas valeur propre de ϕ_A alors $\phi_A + id$ est bijectif et :

$$\begin{aligned} \phi_A^3 = \phi_A &\iff (\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) (\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \phi_A = 0 \\ &\iff (\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})^{-1} (\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \phi_A (\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 0 \\ &\iff \phi_A (\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 0 \\ &\iff \phi_A^2 - \phi_A = 0 \end{aligned}$$

ce qui est faux puisque :

$$\begin{aligned} (\phi_A^2 - \phi_A)(M) &= AM - 2AMA + MA - AM + MA \\ &= 2MA - 2AMA \\ &= 2(I - A)MA \\ &= 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et il existe une matrice M telle que $2(I - A)MA \neq 0$, prenez encore $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et vous verrez le même constat !

Cherchons pour finir $E_1(\phi_A)$ et $E_{-1}(\phi_A)$.

- Caractériser les matrices associées à la valeur propre 1 passe par la recherche des matrices N vérifiant :

$$DN - ND = N$$

soit chercher les matrices $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que :

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

cela nous donne une infinité de matrices N de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

Nota bene : au passage comme nous venons de trouver une infinité de matrices N , cela nous confirme bien que 1 est valeur propre de ϕ_A . Vous auriez parfaitement pu faire ce constat, auparavant, à la place de la solution proposée pour tester 1.

- De même caractériser les matrices associées à la valeur propre -1 passe par la recherche des matrices N vérifiant :

$$DN - ND = -N$$

soit chercher les matrices $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que :

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

cela nous donne une infinité de matrices N de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } b \in \mathbb{R}$$

Nota bene : là encore comme nous venons de trouver une infinité de matrices N , cela nous confirme bien aussi que -1 est valeur propre de ϕ_A . Vous auriez pu encore faire ce constat, auparavant, à la place de la solution proposée pour tester -1 .

(d) –

- $E_1(\phi_A)$:

$$\begin{aligned} E_1(\phi_A) &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \phi_A(M) = M\} \\ &= \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2c & c \\ -4c & 2c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \boxed{\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \right\}} \end{aligned}$$

Nota bene : comme $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ alors $\dim E_1(\phi_A) = 1$.

- $E_{-1}(\phi_A)$:

$$\begin{aligned} E_{-1}(\phi_A) &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \phi_A(M) = -M\} \\ &= \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3b & -b \\ 9b & -3b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \boxed{\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}} \end{aligned}$$

Nota bene : comme $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$ alors $\dim E_{-1}(\phi_A) = 1$.

4. Nous avons :

$$\dim E_0(\phi_A) + \dim E_1(\phi_A) + \dim E_{-1}(\phi_A) = 4$$

cela équivaut à dire que :

$$\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable}}$$

Exercice 3

3.1 Mode de paiement de la clientèle.

1. _

(a) Les données de l'énoncé nous donne la loi du couple (S, U) . Chercher les lois de S et de U revient à déterminer les deux *lois marginales* du couple.

- Loi de S .

Comme nous avons $S(\Omega) = \{0, 1\}$, S suit une *loi de Bernoulli* de paramètre $\mathbf{P}([S = 1])$ avec selon la *première version de la formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([S = 1]) &= \mathbf{P}([S = 1] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([S = 1] \cap [U = 1]) \\ &= 0.2 + 0.1 \\ &= \boxed{0.3} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}(0.3)}$$

- Loi de U .

De même $U(\Omega) = \{0, 1\}$ et U suit une *loi de Bernoulli* de paramètre $\mathbf{P}([U = 1])$ avec selon la *première version de la formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([U = 1]) &= \mathbf{P}([U = 1] \cap [S = 0]) + \mathbf{P}([U = 1] \cap [S = 1]) \\ &= 0.3 + 0.1 \\ &= \boxed{0.4} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{B}(0.4)}$$

En notant C l'événement : "le client règle ses achats par carte bancaire", il est clair que :

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(C) \\ &= \mathbf{P}([U = 0]) \\ &= 1 - 0.4 \\ &= 0.6 \\ &= \boxed{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

(b) Comme les deux variables S et U admettent chacune un *moment d'ordre deux* puisque ce sont des variables finies, la covariance du couple (S, U) existe avec, par théorème :

$$\text{cov}(S, U) = \mathbf{E}(SU) - \mathbf{E}(S) \mathbf{E}(U)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(SU) &= 1 \times 1 \times 0.1 \\ &= 0.1 \\ \mathbf{E}(S) &= 0.3 \\ \mathbf{E}(U) &= 0.4 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} \text{cov}(S, U) &= 0.1 - (0.3 \times 0.4) \\ &= \boxed{-0.02} \end{aligned}$$

Comme la covariance du couple est *non nulle* :

les variables S et U sont dépendantes

- (c) On demande de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[U=1]}([S=1])$ avec $\mathbf{P}([U=1]) \neq 0$.
Par définition :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[U=1]}([S=1]) &= \frac{\mathbf{P}([U=1] \cap [S=1])}{\mathbf{P}([U=1])} \\ &= \frac{0.1}{0.4} \\ &= \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

2. _

- (a) Comme la variable C_n comptabilise le nombre de clients parmi n qui paient par carte bancaire, les modes de paiement étant indépendants entre les individus, nous pouvons dire que :

$$C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathbf{P}([U=0])) = \mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{5}\right)$$

D'après le cours :

$$\mathbf{E}(C_n) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(C_n) = np(1-p)$$

- (b) **Attention malgré les apparences ne dites surtout pas que L_1 suit une loi géométrique** car c'est une variable finie. En effet nous avons $L_1(\Omega) = [0, n]$. Notons pour tout $i \in [1, n]$, B_i l'événement : "le $i^{\text{ème}}$ individu utilise sa carte bleue pour régler ses achats". Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, n], \quad \mathbf{P}([L_1 = k]) &= \mathbf{P}(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(\overline{B_i}) \mathbf{P}(B_k) \text{ par indépendances des modes de paiement} \\ &= (\mathbf{P}([U=1]))^{k-1} \mathbf{P}([U=0]) \\ &= (1-p)^{k-1} p \\ \text{et } \mathbf{P}([L_1 = 0]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{B_i}\right) \text{ par indépendances des modes de paiement} \\ &= (\mathbf{P}([U=1]))^n \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathbf{P}([L_1 = k]) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} p & \text{si } k \in [1, n] \\ (1-p)^n & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([L_1 = k]) &= p^n + \sum_{k=1}^n p^{k-1} (1-p) \text{ somme géométrique de raison } 0.4 \neq 1 \\ &= p^n + (1-p) \left(\frac{1-p^n}{1-p} \right) \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

(c) Pour commencer nous avons encore $L_2(\Omega) = \{0\} \cup [2, n]$. avec :

$$\begin{aligned} \forall k \in [2, n], \mathbf{P}([L_2 = k]) &= \mathbf{P}([C_{k-1} = 1]) \mathbf{P}(B_k) \text{ par indépendances des modes de paiement} \\ &= \mathbf{P}([C_{k-1} = 1]) \mathbf{P}([U = 0]) \\ &= \binom{k-1}{1} p (1-p)^{k-2} p \\ &= (k-1) p^2 (1-p)^{k-2} \\ \text{et } \mathbf{P}([L_2 = 0]) &= \mathbf{P}([C_n \leq 1]) \\ &= \mathbf{P}([C_n = 0]) + \mathbf{P}([C_n = 1]) \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \\ &= (1-p)^{n-1} (1-p + np) \\ &= (1-p)^{n-1} ((n-1)p + 1) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathbf{P}([L_2 = k]) = \begin{cases} (k-1) p^2 (1-p)^{k-2} & \text{si } k \in [2, n] \\ (1-p)^{n-1} ((n-1)p + 1) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Nota bene : vous pouvez vérifier au passage que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \mathbf{P}([L_2 = k]) + \mathbf{P}([L_2 = 0]) &= \sum_{k=2}^n (k-1) p^2 (1-p)^{k-2} + (1-p)^{n-1} ((n-1)p + 1) \\ &= -\frac{(1-p)^{n+1} (-p + np + 1)}{(p-1)^2} + ((n-1)p + 1) (1-p)^{n-1} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.2 Etude du temps moyen de passage en caisse.

1. Par définition on dit que X suit la *loi exponentielle de paramètre 1* si f_X une de ses densités est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

D'après le cours :

$$\mathbf{E}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = 1$$

2. _

- Pour commencer notons que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ car f coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+$ f est continue comme produit de telles fonctions.
- La positivité de f ne pose aucun problème.
- Enfin :

$$\int_{\mathbb{R}} f \text{ converge} \iff \int_{\mathbb{R}_-^*} f \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} f \text{ converge}$$

$$- \int_{\mathbb{R}_-^*} f \text{ converge clairement puisque } f \text{ coïncide avec la fonction nulle sur } \mathbb{R}_-^*,$$

$$- \int_{\mathbb{R}_+} f \text{ converge puisque } \int_{\mathbb{R}_+} f = \mathbf{E}(X) = 1 \text{ où } X \hookrightarrow \varepsilon(1).$$

Ainsi $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1.

Conclusion :

f est bien une densité de probabilité

- T admet une espérance si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} xf(x) dx$ est absolument convergente. En cas de convergence, $\mathbf{E}(T)$ est le réel défini par : $\mathbf{E}(T) = \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx$.

Or :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx \text{ est absolument converge} &\iff \int_{\mathbb{R}_+} xf(x) dx \text{ cv car } f \text{ coïncide avec } 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \\ &\iff \int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{-x} dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

Or comme $\int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{-x} dx = \mathbf{E}(X^2)$ où $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{-x} dx$ existe et vaut 2 (c'est la valeur de $\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2$).

Conclusion :

T admet une espérance égale à 2

et :

le temps moyen de passage en caisse est 2 unités de temps

3. _

- (a) Déterminons la fonction de répartition de T notée F_T définie par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) &= \mathbf{P}([T \leq x]) \\ &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \end{aligned}$$

- Si $x < 0$:

$$F_T(x) = 0 \text{ car } f \text{ coïncide avec la fonction nulle sur } \mathbb{R}_-^* \quad (9)$$

- Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \text{ par Chasles} \\ &= \int_0^x te^{-t} dt \\ &= [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\ &= 1 - (x+1)e^{-x} \end{aligned} \quad (10)$$

par intégrations par parties où les fonctions en jeu $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$ avec $x \geq 0$.

Conclusion : selon (9) et (10)

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{[T>1]}([T < 2]) &= \frac{\mathbf{P}([T < 2] \cap [T > 1])}{\mathbf{P}([T > 1])} \text{ avec } \mathbf{P}([T > 1]) \neq 0 \\
 &= \frac{\mathbf{P}([1 < T < 2])}{\mathbf{P}([T > 1])} \\
 &= \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\
 &= \frac{1 - 3e^{-2} - (1 - 2e^{-1})}{1 - (1 - 2e^{-1})} \\
 &= \frac{-3e^{-2} + 2e^{-1}}{2e^{-1}} \\
 &= \frac{\frac{2}{e} - \frac{3}{e^2}}{\frac{2}{e}} \\
 &= \frac{2e - 3}{e^2} \\
 &= \frac{2e - 3}{2e} \\
 &= \boxed{\frac{2e - 3}{2e}}
 \end{aligned}$$

4. _

(a) Selon l'énoncé le temps d'attente du client C correspond au plus faible temps de passage en caisse entre les deux clients A et B . Donc :

$$M = \inf(T_A, T_B)$$

(b) Soit F_M la fonction de répartition de M . Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \mathbf{P}([M \leq x])$$

Nous avons clairement $M(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc :

- si $t < 0$,

$$F_M(x) = 0 \tag{11}$$

- si $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 F_M(t) &= \mathbf{P}([M \leq t]) \\
 &= 1 - \mathbf{P}([M > t]) \\
 &= 1 - \mathbf{P}([T_A > t] \cap [T_B > t]) \\
 &= 1 - \mathbf{P}([T_A > t]) \mathbf{P}([T_B > t]) \text{ par indépendance des variables} \\
 &= 1 - (\mathbf{P}([T > t]))^2 \text{ en supposant légitimement que } \mathcal{L}(T_A) = \mathcal{L}(T_B) = \mathcal{L}(T) \\
 &= 1 - ((t+1)e^{-t})^2 \\
 &= 1 - (t+1)^2 e^{-2t}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Conclusion : selon (11) et (12)

$$F_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

(c) Ce sont les propriétés de F_M qui permettront de dire que M est une variable à densité. Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_M = 0$,

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_M = 1$, par croissances comparées (polynôme-exponentielle) puisque $(t+1)^2 e^{-2t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2 e^{-2t}$
- F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction nulle),
- F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+$ (différence et somme de telles fonctions),
- $\lim_{t \rightarrow 0^-} F_M = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} F_M = F_M(0) = 1$, donc F_M est continue sur $\mathbb{R}$.
- D'autre part F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (immédiat), ce qui fait qu'elle a toutes les propriétés requises pour affirmer que M est une variable à densité dont une densité f_M est obtenue par dérivation de F_M sur $\mathbb{R}^*$ nous obtenons f_M une densité de M et nous poserons que $f_M(0) = 0$, soit :

$$f_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2te^{-2t}(t+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

