Correction Ecricome 2008

Voie économique

La correction comporte 14 pages.

Exercice 1

1. Par définition $E = \left\{ M(a,b) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b)^2 \in \mathbb{R} \right\}$, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} \mid (a,b)^2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mid (a,b)^2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= Vect(I, A) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ (notation de l'énoncé)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E \text{ est donc le sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ engendré par les matrices } I \text{ et } A}$$

2. Par définition de E la famille de matrice (I, A) est **génératrice**, et comme ces deux matrices ne sont pas proportionnelles elle constituent une **famille libre** de E donc une **base** de E qui est de dimension 2.
Conclusion :

$$\boxed{\text{La famille } (I, A) \text{ est une base de } E \text{ qui est de dimension deux}}$$

3. On vérifie que les matrices $A - I$ et $A - 2I$ sont non inversibles pour affirmer que les réels 1 et 2 sont deux valeurs propres de A.

- $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est clairement **non inversible** puisque nous avons combinaison linéaire sur les lignes $L_1 = L_2 + L_3$.
- $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ nous avons ici la combinaison linéaire entre les lignes $L_2 + 2L_3 = L_1$ nous fait constater que, comme prévu, la matrice $A - 2I$ **n'est pas inversible**.
Pour déterminer la dimension de $E_1(A)$ et $E_2(A)$ cherchons, respectivement, une **réduite de Gauss** de $A - I$ et de $A - 2I$.
Nous avons :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient à $E_1(A)$ si et seulement si $(A - I)X = 0$. En prenant la dernière réduite de Gauss de $A - I$ l'égalité $(A - I)X = 0$ équivaut à :

$$x - y - 2z = 0 \quad (2)$$

qui est l'équation d'un **plan vectoriel** de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent :

$$\dim E_1(A) = 2 \tag{3}$$

De même :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftrightarrow L_1 \\
\sim &\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow 2L_3 + L_1 \\
\sim &\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \\
\sim &\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient à $E_2(A)$ si et seulement si $(A - 2I)X = 0$. En prenant la dernière réduite de Gauss de $A - 2I$ l'égalité $(A - 2I)X = 0$ équivaut au système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4}$$

qui est l'équation d'une **droite vectorielle** de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent :

$$\dim E_2(A) = 1 \tag{5}$$

Conclusion : selon (3) et (5)

$$\dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 3$$

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable}}$$

4. Cherchons les sous-espaces propres associés à A.

   - Nous avons :

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - I)X = 0 \right\} \\
&= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ selon } (2)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
E_2(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 2I)X = 0 \right\} \\
&= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ selon } (4)
\end{aligned}$$

Comme A est diagonalisable, A est **semblable** à une matrice diagonale D, autrement dit il existe une matrice carrée d'ordre 3 inversible et une matrice diagonale D telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Les contraintes imposées par l'énoncé nous ferons prendre :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que les colonnes de P sont constituées des **vecteurs propres** (matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres) et D est la matrice des **valeurs propres** en prétant attention à l'ordre des colonnes).
En utilisant la **méthode du pivot de Gauss**, nous obtenons que :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

5. Prouvons que la matrice $P^{-1}M(a,b)P$ est diagonale. Nous savons que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = aI + bA$. En multipliant les deux membres de l'égalité par la matrice P^{-1} à gauche et par P à droite, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} P^{-1}M(a,b)P &= P^{-1}(aIP + bA)P \\ &= aP^{-1}IP + bP^{-1}AP \text{ en développant} \\ &= aI + bD \end{aligned}$$

Comme toute combinaison linéaire de matrices diagonales **redonne** une matrice diagonale, la matrice $P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale à son tour que l'on notera $D(a,b)$.

6.

- **Supposons que $M(a,b)$ soit inversible.**
Dans ce cas $D(a,b)$ est inversible en tant que produit de telles matrices (c'est du cours, **on parle de stabilité pour le produit de l'ensemble des matrices inversibles**).
- **Réciproquement supposons que $D(a,b)$ soit inversible.**
Comme $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$ elle s'écrit donc comme produit de matrices inversibles, elle est donc inversible aussi.
Par conséquent nous avons l'équivalence :

$$\begin{aligned} M(a,b) \text{ inversible} &\iff aI + bD \text{ inversible avec } aI + bD = diag(a+2b, a+b, a+b) \\ &\iff \boxed{\begin{cases} a+2b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{cases}} \end{aligned}$$

7. Nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} \left(PD(a,b)P^{-1}\right)^2 = I &\iff PD(a,b)\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D(a,b)P^{-1} = I \\ &\iff PD(a,b)D(a,b)P^{-1} = I \\ &\iff D^2(a,b) = P^{-1}IP \\ &\iff D^2(a,b) = I \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{M^2(a,b) = I \iff D^2(a,b) = I}$$

L'équation matricielle $M^2(a,b) = I$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases}$$

et :

$$\left\{\begin{array}{l}(a+2b)^2=1\\(a+b)^2=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}|a+2b|=1\\|a+b|=1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}a+2b=\pm1\\a+b=\pm1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a+2b=1\\a+b=1\end{array}\right.\\ \text{ou}\left\{\begin{array}{l}a+2b=-1\\a+b=-1\end{array}\right.\\ \text{ou}\left\{\begin{array}{l}a+2b=1\\a+b=-1\end{array}\right.\\ \text{ou}\left\{\begin{array}{l}a+2b=-1\\a+b=1\end{array}\right.\end{array}\right.$$

L'ensemble des solution $\mathcal{S}$ du système est :

$$\mathcal{S}=\{(1,0)\,;(-1,0)\,;(-3,2)\,;(3,-2)\}$$

Conclusion : l'équation $M^2(a,b)=I$ admet quatre solutions qui sont éléments de l'ensemble

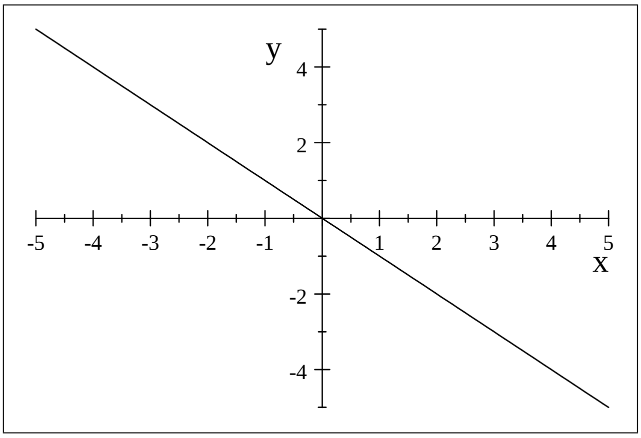
$$\boxed{\{\ I,\quad -I,\quad -3I+2D,\quad 3I-2D\ \}}$$

Exercice 2

2.1. Recherche d'extremum éventuelle de la fonction g

1. Le domaine D de la fonction g est définie par :

$$\boxed{D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y>0\right\}}$$



Le lecteur hachurera la partie du plan se trouvant au-dessus de la demi-droite en excluant celle-ci.

2. La fonction g admet des dérivées partielles première sur D car elle y est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet :

   - $\zeta:(x,y)\longmapsto 1$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D en tant que **fonction constante** ;
   - $\varphi:(x,y)\longmapsto x+y$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D en tant que **fonction polynomiale** à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\psi:t\longmapsto \ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (cours), alors par **composition** $\psi\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
   - Enfin $f=\zeta+\psi\circ\varphi$ et l'on sait que la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un même ensemble D **redonne** une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
   - $\forall\,(x,y)\in D,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$

- $\forall (x,y) \in D,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

  ♡ **Comme nous travaillons sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si g admet un point critique, c'est forcément en un point critique** $(a,b) \in D$ vérifiant $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$. Or comme les deux dérivées partielles ne s'annulent pas :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'admet pas d'extremum sur } D}$$

2.2. Etude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie par :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,+\infty\right[,\quad f_1(x) = g(x,1) = 1 + \ln(1+x)}$$

2. Sans commentaire particulier, le développement limité à l'ordre deux de f_1 en 0 est :

$$\boxed{f_1(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}$$

3. L'équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0 est :

$$\boxed{y = x+1}$$

La position de C_1 par rapport à sa tangente en 0 est donné par le signe du terme $-\dfrac{1}{2}x^2$ qui est toujours négatif ou nul. Moralité :

$$\boxed{\text{La courbe } C_1 \text{ est en dessous de sa tangente en } 0}$$

4. Nous avons :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 + \ln(1+x)) = +\infty}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 0}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$ car $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$ puisque :

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{\dfrac{\ln x}{x}} &= \frac{\dfrac{\ln x + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x}}{\dfrac{\ln x}{x}} \\
&= 1 + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}
\end{aligned}$$

avec $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\ln x} = 0$.
L'interprétation graphique de ces limites est :

$$\boxed{\text{La courbe } C_1 \text{ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation } y = 0}$$

2.3. Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$

1. La fonction h_p définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h_p(x) = x - 1 - \ln(x+p)$ qui est continue et dérivable sur son domaine en tant que somme et composée de fonctions continues et dérivables (le lecteur pourra détailler la preuve) avec :

$$h_p'(x) = \frac{1}{p+x}(p+x-1) \geq 0 \text{ car } p \geq 1$$

Comme la fonction h_p est continue et strictement monotone (décroissante) sur $\mathbb{R}_+^*$ elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $h_p(\mathbb{R}_+^*) =]-1-\ln p, +\infty[$ ($\lim\limits_{+\infty} h_p = +\infty$). Enfin $0 \in h_p(\mathbb{R}_+^*)$, par conséquent il existe un unique réel strictement positif noté α_p tel que $h_p(\alpha_p) = 0$ soit tel que $f_p(\alpha_p) = \alpha_p$.

2. Nous avons :

$$h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(p + \alpha_{p+1})$$

Vous constaterez sans peine que le signe de l'expression est loin d'être évident, c'est pour cela que nous allons utiliser l'astuce consistant à dire que $h_p(\alpha_{p+1})$ à le même signe que celui de $h_p(\alpha_{p+1}) - h_{p+1}(\alpha_{p+1})$ car $h_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 0$. Or pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} h_p(\alpha_{p+1}) - h_{p+1}(\alpha_{p+1}) &= (\alpha_{p+1} - 1 - \ln(p+\alpha_{p+1})) - (\alpha_{p+1} - 1 - \ln(p+1+\alpha_{p+1})) \\ &= \ln(p+\alpha_{p+1}+1) - \ln(p+\alpha_{p+1}) \\ &> 0 \text{ car } p+\alpha_{p+1}+1 > p+\alpha_{p+1} \text{ et la fonction } \ln \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad h_p(\alpha_{p+1}) > 0}$$

Utilisons une dernière astuce consistant à écrire que, du fait que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $h_p(\alpha_p) = 0$, le signe de $h_p(\alpha_{p+1}) - h_{p+1}(\alpha_{p+1})$ est **le même** que celui de $h_p(\alpha_{p+1}) - h_{p+1}(\alpha_{p+1})$. Enfin comme h_p est une bijection croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous pouvons donc dire que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{p+1} - \alpha_p > 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_p)_{p\geq 1} \text{ est strictement monotone croissante}}$$

3. Pour tout entier p non nul, $h_p(\alpha_p) = 0$ autrement dit $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_p - 1 - \ln(p+\alpha_p) = 0$ ou encore $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_p = 1 + \ln(p+\alpha_p)$. Or $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p+\alpha_p) = \ln p + \ln\left(1 + \frac{\alpha_p}{p}\right)$ puisque p est non nul avec $\ln\left(1+\frac{\alpha_p}{p}\right) \geq 0$ puisque $\frac{\alpha_p}{p} \geq 0$, donc nous pouvons affirmer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p+\alpha_p) \geq \ln p$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln p}$$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} 1 + \ln p = +\infty$, le **théorème de comparaison** nous amène à conclure que :

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_p)_{p\geq 1} \text{ diverge vers } +\infty}$$

2.4. Valeur approchée de α_1

1. Soit la proposition $\mathcal{P}_n$:"$u_n \geq 1$". Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entie naturel n non nul.

   - $\mathcal{P}_0$ est vérifiée puisque par définition $u_0 = 1$.
   - Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un entier n fixé dans $\mathbb{N}$.
   - Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_1(u_n) = 1 + \ln(1+u_n)$, l'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire que $1 + u_n \geq 2$ ce qui entraîne, par la croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+u_n) \geq \ln 2$ et en ajoutant 1 dans chaque membre de l'inégalité $u_{n+1} \geq 1 + \ln 2$ soit $u_{n+1} \geq 1$. Cela prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.
     On déduit de ce raisonnement par récurrence que pour tout entier n non nul $u_n \geq 1$.

2. La fonction f_1 étant continue et dérivable sur $[1,+\infty[$, l'**inégalité des accroissements finis** est applicable entre α_1 et u_n qui sont tous deux éléments de $[1,+\infty[$ pour tout entier n selon la récurrence précédente, elle donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \tag{6}$$

car $\forall x \geq 1$, $0 \leq f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{2}$ et comme $f_1(u_n) = u_{n+1}$ et $f_1(\alpha_1) = \alpha_1$ l'inégalité (6) s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$$

Par itérations successives :

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha_1| &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|u_{n-2} - \alpha_1| \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|u_{n-3} - \alpha_1| \\ &\vdots \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ termes}}|1 - \alpha_1| \\ &\leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

car $1 \leq \alpha_1 \leq 3$ donc $-3 \leq -\alpha_1 \leq -1$ et $-2 \leq 1 - \alpha_1 \leq 0$. Finalement $|1 - \alpha_1| \leq 2$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

3. Pour déterminer un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$, il suffit de touver un entier n tel que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$. Or nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} \\ \iff & -(n-1)\ln 2 \leq -4\ln 10 \\ \iff & (n-1)\ln 2 \geq 4\ln 10 \\ \iff & n \geq \frac{4\ln 10}{\ln 2} + 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{n_0 = \left\lfloor \frac{4\ln 10}{\ln 2} + 1 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{4\ln 10}{\ln 2} \right\rfloor + 2}$$

Exercice 3

3.1. Premier jeu

1. La variable X_N représente le nombre de parties gagnées lors d'une succession de N parties indépendantes à deux issues (succès ou échecs) ce sont donc des **épreuves de Bernoulli** de même paramètre $p = \dfrac{1}{10}$. Ainsi X_N suit la loi binomiale de paramètres N et $p = \dfrac{1}{10}$. Autrement dit :

$$\boxed{X_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{10}\right)}$$

avec :

$$\boxed{X_N(\Omega) = [\![0, N]\!], \quad \mathbf{P}([X_N = k]) = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{N-k}}$$

et d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(X_N) = \frac{N}{10} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_N) = \frac{9N}{100}}$$

2. Lors le joueur joue N parties et qu'il en a gagné X_N il a remporté un **gain algébrique** de $3X_N - N$ car chaque partie est payante, coutant 1 euro et le gain d'une partie rapporte 3 euros.
Conclusion :

$$\boxed{Y_N = 3X_N - N}$$

Comme la variable Y_N est obtenue par **transformation affine** à partir de X_N admettant une espérance et une variance, elle admet à son tour une espérance et une variance, égale par propriétés élémentaires à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_N) &= 3\mathbf{E}(X_N) - N \\ &= 3\frac{N}{10} - N \\ &= -\frac{7N}{10} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y_N) &= 9\mathbf{V}(X_N) \\ &= \frac{81N}{100} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_N) = \frac{17N}{10} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y_N) = \frac{81N}{100}}$$

3.

(a) En admettant que l'on puisse approximer la loi de X_{60} par la loi de Poisson de paramètre $\frac{N}{10} = \frac{60}{10} = 6$ nous pouvons écrire que :

$$\boxed{X_{60} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(6)}$$

(b) On demande de calculer la probabilité $\mathbf{P}([Y_{60} < -50])$. Or :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y_{60} > -50]) &= \mathbf{P}([3X_{60} - 60 > -50]) \\ &= \mathbf{P}([3X_{60} > 10]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([3X_{60} \leq 9]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X_{60} \leq 3]) \\ &\simeq 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-6}6^k}{k!} \\ &\simeq 1 - 0.1512 \text{ selon la table fournie} \\ &\simeq 0.8488 \end{aligned}$$

Conclusion :

$\boxed{\text{La probabilité que le joueur perde moins de 50 euros est d'environ 85\%}}$

3.2. Deuxième jeu

1. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ est un bien une densité de probabilité, car :

   - f est **continue** sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ car elle coïncide avec la fonction nulle sur ces intervalles ; elle est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que fonction monôme. Donc nous pouvons dire que f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
   - f est **positive** sur $\mathbb{R}$ (sans difficulté particulière).
   - L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ **converge** si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f$, $\displaystyle\int_{0}^{1} f$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f$ convergent.
     - Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f$ convergent puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$.
     - L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} 2x dx$ convergente en tant qu'intégrale d'une fonction continue (fonction monôme) sur un segment.

       Par conséquent $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut par **Chasles** :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f &= \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{1} f + \int_{1}^{+\infty} f \\ &= \left[x^2\right]_0^1 \\ &= 1\end{aligned}$$

       Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}$$

   - Déterminons F la fonction de répartition de X_i pour $i \in [\![1,3]\!]$, définie par :

$$\forall i \in [\![1,3]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mathbf{P}([X_i \leq x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

     - Si $x < 0$: $F(x) = 0$;
     - Si $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{x} f(t)\, dt \\ &= \int_{0}^{x} 2t dt \\ &= x^2\end{aligned}$$

     - Si $x > 1$: $F(x) = 1$

       Faisons le bilan :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$

2. Comme la variable X_i ($i \in [\![1,3]\!]$)est à support fini (le segment $[0,1]$) elle admet des moments de tous ordre, donc une espérance égale à :

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1,3]\!], \qquad \mathbf{E}(X_i) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{1} 2x^2 dx \text{ par Chasles} \\ &= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,3]\!], \quad \mathbf{E}(X_i) = \frac{2}{3}}$$

3. Comme, d'après l'énoncé, $M = \min(X_1, X_2, X_3)$, l'événement $[M > t]$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ l'événement $[X_i > t]$ est réalisé pour tout réel t, nous avons donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad [M > t] = \bigcap_{i=1}^{3} [X_i > t]}$$

4. Par définition de F_M nous avons $\forall x \in \mathbb{R}, F_M(x) = \mathbf{P}([M \leq x])$ avec :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) &= \mathbf{P}([M \leq x]) \\
&= 1 - \mathbf{P}([M > x]) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{3} [X_i > x]\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{3} \mathbf{P}([X_i > x]) \text{ par indépendance des variables } X_i \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - \mathbf{P}([X_i \leq x])) \\
&= 1 - (1 - F(x))^3 \text{ car toutes les variables } X_i \text{ suivent la même loi} \\
&= \begin{cases} 1 - (1-0)^3 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - x^2\right)^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 - (1-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2\left(2 - x^2\right) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2\left(x^4 - 3x^2 + 3\right) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Etudions les propriétés de classe de F_M.

- F_M est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ car elle coïncide dans chacun des intervalles avec une fonction constante et sur $[0,1]$ F_M étant polynomiale, elle y est continue. D'autre part $\lim\limits_{0^-} F_M = \lim\limits_{0^+} F_M = F_M(0) = 0$ et $\lim\limits_{1^-} F_M = \lim\limits_{1^+} F_M = F_M(1) = 1$. Donc nous pouvons dire que F_M est continue sur $\mathbb{R}$.
- F_M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) sur $]1, +\infty[$ (fonction constante) et sur $[0,1]$ (fonction polynomiale). Donc nous pouvons affirmer que F_M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1.
  On rajoute que :
- $\lim\limits_{-\infty} F_M = 0$;
- $\lim\limits_{+\infty} F_M = 1$;
- $F_M' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ car pour tout x en dehors du segment $[0,1]$, $F_M' = 0$ et $F_M'(x) = 6x\left(x^2 - 1\right)^2$ si $x \in [0,1]$.
  Toutes ces vérifications sur F_{M_n} nous permettent de conclure que :

$$\boxed{\text{La variable } M_n \text{ est une variable à densité}}$$

Une densité f_M de M_n est obtenue par dérivation de F_{M_n} sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ et nous complèterons la définition de f_M en posant, par exemple, $f_M(0) = f_M(1) = 0$ ce qui donne :

$$\boxed{f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin]0,1[\\ 6x\left(x^2-1\right)^2 & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}}$$

5. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G) &= \mathbf{P}\left(\left[M \leq \frac{1}{5}\right]\right) \\ &= F_M\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\left(\frac{1}{5}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 3\right) \\ &= \boxed{\frac{1801}{15\,625}} \end{aligned}$$

3.3. Troisième jeu

1. Pour obtenir les valeurs prises par T_n il faut discuter selon les valeurs de n. En tous les cas, au minimum toutes les boules sont dans une même case ($T_n = 1$) et au maximum chaque boule est dans une case différente des autres ($T_n = n$ ou bien $T_n = N$ selon les cas).

   - Si $n \leq N$:
   $$T_n(\Omega) = [\![1, n]\!] \tag{7}$$
   - Si $n > N$:
   $$T_n(\Omega) = [\![1, N]\!] \tag{8}$$

   Conclusion : selon (7) et (8)

   $$\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]}$$

2.

   - La variable T_1 est la variable certaine égale à 1, puisque lorsque l'on a qu'une seule boule à lancer elle ne peut occuper qu'une seule case (à condition de ne pas rater son lancer ce que sous-entend le texte !). Ainsi :

   $$\boxed{T_1 \hookrightarrow \delta_1 \text{ loi de Dirac de paramètre } 1}$$

   - La variable T_2 ne peut prendre que deux valeurs 1 ou 2 puisqu'on lance deux boules. Ainsi $T_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$.
     - $\mathbf{P}([T_2 = 1]) = \dfrac{N}{N^2}$ car les deux boules lancées peuvent occuper N cases possibles (puisqu'il n'y a qu'une seule case occupée) et l'univers Ω est l'ensemble des $2-$**listes** constitué d'entiers de l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$.
     - $\mathbf{P}([T_2 = 2]) = \dfrac{A_N^2}{N^2} = \dfrac{N(N-1)}{N^2} = \dfrac{N-1}{N}$ en effet l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid [T_2(\omega) = 2]\}$ est celui des **arrangements d'ordre deux** (listes sans répétition) d'entiers de l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$. Maintenant on peut effectuer le dénombrement de chaque lancer séparément : choisir n'importe quelle case lors du premier lancer et il reste $N-1$ cases favorables parmi les N possibles pour le second lancer.
     Le lecteur pourra vérifier que $\mathbf{P}([T_2 = 1]) + \mathbf{P}([T_2 = 2]) = 1$.
     Conclusion :

     $$\boxed{\mathbf{P}([T_2 = 1]) = \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([T_2 = 2]) = \frac{N-1}{N}}$$

3.

- $\mathbf{P}([T_n = 1]) = \dfrac{N}{N^n} = \dfrac{1}{N^{n-1}}$ car il y a N choix possibles de LA case recevant toutes les boules. L'univers Ω est l'ensemble des $n-$**listes** constitué d'entiers de l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$. On peut aussi retrouver le résultat en disant que l'on peut placer la première n'importe (de probabilité 1) n'importe où, et les autres n'ont qu'une seule possibilité de placements parmi les N cases possibles (de probabilité $\left(\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$ par indépendance des lancers).

- $\mathbf{P}([T_n = 2]) = \dfrac{\binom{N}{2}(2^n - 2)}{N^n} = \dfrac{N(N-1)}{2}\dfrac{2^n-2}{N^n}.$
  Explications :
  - $\binom{N}{2}$ représente le nombre de choix de 2 cases parmi les N dans lesquelles toutes les boules iront se loger.
  - Une fois les cases choisies, $2^n - 2$ représente le nombre de rangements possibles des n boules dans ces deux cases. C'est le **nombre total d'applications possibles** entre l'ensemble (de départ) des n boules vers l'ensemble (d'arrivée) constitué des deux numéros de cases choisies auquel on retire les deux cas extrêmes où toutes les boules auraient pour image un même numéro.
  - $|\Omega| = N^n$.
  - $\mathbf{P}([T_n = n]) = 0$ si $n > N$ et si $n \leq N$, $\mathbf{P}([T_n = n]) = \dfrac{A_N^n}{N^n}$ car un rangement favorable des n boules dans les N cases correspond au nombre des $n-$**listes sans répétition** (ou $n-$arrangements) constituées d'entiers de l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$, puisque, ne l'oublions pas chaque boule occupe une case différente.
    Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([T_n = 1]) = \frac{1}{N^{n-1}}, \quad \mathbf{P}([T_n = 2]) = \frac{N(N-1)}{2}\frac{2^n-2}{N^n}, \quad \mathbf{P}([T_n = n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > N \\ \dfrac{A_N^n}{N^n} & \text{si } n \leq N \end{cases}}$$

4. A l'aide de la **formule des probabilités totales** à laquelle est associée le système complet d'événements $([T_n = i])_{i \in [\![1,n]\!]}$ nous avons, selon sa **première version** :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{P}([T_{n+1} = k]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([T_{n+1} = k] \cap [T_n = i]) \\
&= \sum_{i=k-1}^{k} \mathbf{P}([T_{n+1} = k] \cap [T_n = i]) + 0 \\
&\quad \text{car } \textbf{si} \text{ le nombre de cases occupées après } n \text{ tirages} \\
&\quad \text{vaut } i \text{ fixé dans } [\![1,n]\!] \text{, celui des cases occupées} \\
&\quad \text{après } n+1 \text{ tirage appartient à } \{i, i+1\} \\
&= \mathbf{P}_{[T_n = k-1]}([T_{n+1} = k])\,\mathbf{P}([T_n = k-1]) + \mathbf{P}_{[T_n = k]}([T_{n+1} = k])\,\mathbf{P}([T_n = k]) \\
&= \left(\frac{N-k+1}{N}\right)\mathbf{P}([T_n = k-1]) + \frac{k}{N}\mathbf{P}([T_n = k])
\end{aligned}$$

Explication :

- $\mathbf{P}_{[T_n = k-1]}([T_{n+1} = k]) = \dfrac{N-k+1}{N}$ car le nombre de cases occupées augmente d'une unité entre les n et $(n+1)-$ ème tirages, il reste donc $N - (k-1)$ cases parmi les N possibles qui peuvent être occupées par la $(n+1)-$ ème boule ;

- $\mathbf{P}_{[T_n = k]}([T_{n+1} = k]) = \dfrac{k}{N}$ car le nombre de cases occupées est inchangé entre les n et $(n+1)-$ ème tirages, il reste donc k cases parmi les N possibles qui peuvent être occupées par la

$(n+1)-$ ème boule.
Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{P}([T_{n+1}=k]) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)\mathbf{P}([T_n=k-1]) + \frac{k}{N}\mathbf{P}([T_n=k])} \tag{9}$$

5. Soit la fonction polynomiale G_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([T_n=k])\, x^k$$

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned} G_n(1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([T_n=k]) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) La fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que **fonction polynomiale** avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([T_n=k])\, x^{k-1}$$

en particulier pour $x=1$:

$$\boxed{G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([T_n=k]) = \mathbf{E}(T_n)}$$

(c) Comme $\mathbf{P}([T_n=n+1])=0$ la relation (9) est donc vraie pour $k \in [\![1,n+1]\!]$, en multipliant ses deux membres par x^k puis en sommant sur k, k allant de 1 à $n+1$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}([T_{n+1}=k])\, x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{N-k+1}{N}\right)\mathbf{P}([T_n=k-1])\, x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N}\mathbf{P}([T_n=k])\, x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{N-k}{N}\right)\mathbf{P}([T_n=k])\, x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N}\mathbf{P}([T_n=k])\, x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{N-k}{N}\right)\mathbf{P}([T_n=k])\, x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N}\mathbf{P}([T_n=k])\, x^k \text{ car } \mathbf{P}([T_n=0])=0 \\ &= \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n} (N-k)\,\mathbf{P}([T_n=k])\, x^k + \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbf{P}([T_n=k])\, x^{k-1} \\ &= x\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([T_n=k])\, x^k - \frac{x^2}{N}\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([T_n=k])\, x^{k-1} + \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbf{P}([T_n=k])\, x^{k-1} \\ &= xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G_n'(x) + \frac{x}{N}G_n'(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x-x^2\right)G_n'(x) + xG_n(x)}$$

(d) Par dérivation, toutes les fonctions en jeu étant dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que **fonctions polynomiales** :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}'(x) &= \frac{1}{N}\left((1-2x)\,G_n'(x) + \left(x-x^2\right)G_n''(x)\right) + G_n(x) + xG_n'(x) \\ &= \left(\frac{x-x^2}{N}\right)G_n''(x) + \left(\frac{1-2x}{N}+x\right)G_n'(x) + G_n(x) \end{aligned}$$

En particulier pour $x = 1$:

$$G'_{n+1}(1) = \left(\frac{1-2}{N} + 1\right) G'_n(1) + G_n(1)$$

autrement dit :

$$\boxed{\mathbf{E}(T_{n+1}) = \left(\frac{N-1}{N}\right) \mathbf{E}(T_n) + 1}$$

(e) La suite $(\mathbf{E}(T_n))_{n\geq 1}$ est **arithmético-géométrique**. La recherche du point fixe $c = \left(\frac{N-1}{N}\right) c +$ 1 donne $c = N$, et la suite $(\mathbf{E}(T_n) - N)_{n\geq 1}$ est **géométrique** de raison $\left(\frac{N-1}{N}\right)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_n) - N &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} (\mathbf{E}(T_1) - N) \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} (1 - N) \text{ car } T_1 \hookrightarrow \delta_1 \end{aligned}$$

soit donc :

$$\mathbf{E}(T_n) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} (1 - N) + N$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(T_n) = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]}$$