

ECRICOME 2009 option Scientifique.

– **Exercice 1 :** Etude du spectre de l'endomorphisme A défini sur $M_n(R)$ par : $\Phi_A(M) = AM - MA$, où A est une matrice réelle carrée d'ordre n symétrique, après avoir montré que Φ_A est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(^tMN)$.

Exercice progressif, étude d'un exemple puis du cas général, permettant de bien évaluer les connaissances en algèbre linéaire et bilinéaire des candidats.

– **Exercice 2 :** Etude de la fonction f définie par la formule $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+x^2} e^{2t} dt$

Exercice portant sur le programme d'analyse de deuxième année, permettant d'évaluer les connaissances des candidats sur les problèmes de convergence et leur aisance par rapport aux calculs.

– **Problème :** Etude du comportement asymptotique de la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules noires obtenues, dans un jeu d'urne contenant des boules blanches et noires, de type markovien.

Problème étudiant de façon originale un modèle classique de probabilités discrètes. Il permet au candidat de valoriser ses connaissances en probabilités discrètes, mais aussi son aptitude à mener à bien des calculs. L'écriture d'une fonction en Pascal est une question aisée qui permet de tester le candidat en algorithmique.

L'épreuve ECRICOME 2009, option scientifique, est composée de deux exercices (algèbre linéaire et bilinéaire pour le premier, intégrales sur un intervalle quelconque pour le second) et un problème (probabilités discrètes), abordables et progressifs. Elle est bien équilibrée entre les programmes des deux années, contient une question d'algorithmique et permet aux candidats ayant une bonne maîtrise de leur cours de mettre en valeur leurs connaissances. Une épreuve qui semble bien adaptée au concours commun des écoles de la banque ECRICOME.

La correction

On peut constater une très grande dispersion des notes.

Des notes très faibles pour certains candidats qui arrivent tout juste à effectuer un produit matriciel, leurs compétences s'arrêtant là. Des incohérences qui n'effraient pas certains d'entre eux, c'est particulièrement vrai dans l'étude de fonction, où le tableau de variation, les limites et la courbe se contredisent allègrement, ou encore en probabilité où l'on peut trouver des probabilités négatives ou plus grandes que 1 !

De très bonnes copies pour les candidats qui montrent une bonne compréhension du sujet dans sa globalité, des connaissances satisfaisantes en mathématiques, une capacité certaine d'analyse.

Finalement le sujet permet de bien de départager les candidats. Avec un écart-type de 4.49 et une moyenne générale de 10.75 cette épreuve semble avoir joué son rôle très discriminant.

Rapport d'un correcteur

Je remercie Bertrand Micaux de permettre l'édition de son rapport de correction.

Rapport de correction

Exercice 1

Partie 1

- 1) Question bien traitée la plupart du temps. Certains étudiants ne font pas réellement les calculs (on ne trouve pas trace du calcul intermédiaire de AV_1 par exemple), d'autres essaient de tout faire d'un coup en posant $M = aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4$ et en calculant $\Phi_A(M)$, sans toujours parvenir à leurs fins.

Le caractère diagonalisable est en général convenablement justifié.

- 2) Le calcul de T^3 ne pose pas de difficulté aux étudiants. Le raisonnement sur les polynômes annulateurs est souvent convenable, même s'il n'est pas toujours convenablement exprimé (« les valeurs propres possibles de T sont... », confusion entre $\in$ et $\subset$). Comme on pouvait le craindre, les copies les plus faibles concluent que $\text{sp}(M) = \{-2, 0, 2\}$ ou ne parviennent pas à déterminer les racines du polynôme.
- 3) Cette question a été assez souvent éludée par les plus faibles. Les autres l'abordent avec un succès variable, la plupart du temps avec une rédaction insuffisamment précise. Toutefois, on parvient généralement à une famille génératrice exacte. Le caractère libre de cette famille n'est pas toujours justifié (lorsqu'il n'est pas simplement omis). Fait qui m'a un peu surpris, la grande majorité des copies n'entrevoit un noyau que comme cas particulier d'espace propre.

- 4) Peu de surprises ici.

- 5) Les étudiants qui ont traité les questions précédentes parviennent à donner des matrices P et D adéquates, souvent sans justification convaincante. De manière peu compréhensible, certains orthonormalisent la base de vecteurs propres.

Les meilleures copies déterminent soigneusement, par des raisonnements de dimension, des bases des sous-espaces propres $E_{-2}(M)$ et $E_2(M)$. Plus rarement, elles démontrent que les futures colonnes de leur matrice P forment une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et soulignent que P est une matrice de changement de base. Le recours à l'endomorphisme canoniquement associé à M n'a jamais été constaté.

Partie II

- 1) Question en général bien traitée. Certains oublient de rappeler que Φ_A est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tandis que d'autres passent un temps déraisonnable à le justifier (défauts qui n'ont pas été sanctionnés).

- 2) Le plus souvent, cette question a été correctement traitée, que ce soit en revenant aux coordonnées ou en utilisant les propriétés de la trace. Il n'est pas rare (ni désagréable) de voir des étudiants rappeler que $\text{tr}({}^tM) = \text{tr}(M)$ pour prouver la symétrie. Défauts les plus courants :

- prétendre que la symétrie est ici évidente,
- montrer que $\langle M | M \rangle > 0$ pour tout M pour ce qui est de la positivité,
- ne pas souligner que les termes de la somme sont positifs lors de la preuve du caractère défini.

- 3) Ici les résultats sont plus contrastés. La preuve de la symétrie donne lieu à quelques tentatives d'escroquerie (souvent basées sur des manipulations erronées de la transposée) mais elle est effectuée de manière satisfaisante dans de nombreuses copies. Certains aventuriers réchappent avec succès de leur recours aux coefficients des matrices pour effectuer la preuve.

Pour ce qui est de la conclusion, je reste perplexe devant les exotiques « endomorphismes symétriques réels » que j'ai parfois rencontrés.

- 4) a. Les étudiants savent dire que des vecteurs propres sont par définition des vecteurs propres non nuls, mais peu ont à l'esprit que le produit de matrices ne vérifie pas la propriété d'intégrité : on prétend, léger et sûr de soi, que $M = X{}^tY \neq 0$ puisque X et Y sont non nuls ! Seules quelques copies s'attardent à examiner ce qu'est cette matrice et savent conclure rigoureusement.

La partie ${}^tY A = \mu {}^tY$ a été presque toujours comprise, même si quelques candidats font sombrer leur calcul en y introduisant une improbable matrice Y^{-1} .

- b. De même, l'égalité demandée a été bien traitée lorsqu'elle était abordée. La conclusion partielle qu'on en tire m'a plus souvent laissé sur ma faim. Les étudiants oublient de rappeler que $M_{X,Y} \neq 0$ pour justifier que $\lambda - \mu$ est une valeur propre. En outre, j'aurais apprécié que l'on justifie l'inclusion $\Gamma \subset \text{sp}(\Phi_A)$ plus soigneusement, en prenant par exemple un élément dans le premier ensemble

et en justifiant son appartenance au second.

- 5) a. Aucune des copies que j'ai corrigées ne sait prouver que $M = 0$. Seules une ou deux fournissent un bon début, en parvenant à $MZ = 0$ pour tout vecteur colonne Z .
Plus souvent, les étudiants ont repéré le raisonnement par l'absurde même si leur rédaction n'est pas toujours des plus précises.
- b. Quand cette question a été abordée, elle l'a été de manière correcte.
- c. La conclusion est tirée avec insuffisamment de minutie, et n'est pas toujours très convaincante (quand il ne s'agit pas de bluff pur et simple).

Exercice 2

- 1) a. Cette question, en apparence inoffensive, pose trop souvent problème, ce qui me semble inquiétant. Trop rares sont ceux qui parviennent à la rédaction minimale de cette question : on se perd en raisonnements de comparaison inutiles alors que l'on s'apprête à intégrer sur un segment, faire tendre la borne supérieure vers $+\infty$, obtenant ainsi simultanément convergence et valeur de l'intégrale. Le recours à la fonction gamma ou à la densité d'une loi exponentielle, quoique un peu incongrus en pareil contexte, n'a pas été sanctionné lorsqu'il était mené soigneusement. Ces méthodes nous conduisent parfois à de rafraichissants multiples de $\sqrt{\pi}...$
- b. Question trop souvent mal traitée. Quand les étudiants ont saisi l'esprit de la question, il savent rappeler les hypothèses de continuité et de positivité. Les choses se gâtent lorsqu'il s'agit de mettre en évidence une équivalence ou une relation de négligeabilité. Certains se plaisent à rappeler que $\int(fg) = \int f \times \int g...$ ce qui ne leur est pas d'un grand secours.
- 2) a. Comme on pouvait s'y attendre, la première inégalité est bien plus souvent comprise que la seconde. Le symbole $\Longleftrightarrow$ est utilisé de manière désinvolte par beaucoup. On trouve trop souvent la rédaction désagréable (si ce n'est fausse) qui consiste à partir de la conclusion, enchaîner des lignes d'encadrement prétendument équivalentes, pour aboutir à une proposition trivialement vraie et affirmer que celle de départ était par conséquent exacte.
- b. Une majorité d'étudiants tombe dans le piège qui leur était tendu de « passer aux intégrales » sans justification préalable de la légitimité d'un tel raisonnement. Les termes de positivité, croissance voire linéarité de l'intégrale sont régulièrement confondus, ce qui n'est pas du meilleur effet. Inversement, des étudiants trop méticuleux réinventent la roue qu'ils ont péniblement découverte à la première question...
- c. Cette question présentait pour seule difficulté de requérir une bonne maîtrise du cours puisque la question précédente apportait la réponse sur un

plateau. Elle donne lieu à des réponses totalement farfelues chez une très large majorité des candidats. Parmi ceux qui situent approximativement la position du problème, la plupart reprend scolairement l'étude de $f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$ sans que cela soit garantie de succès. Certains font allusion au fait que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ sans plus de précision.

- 3) a. Les justifications du changement de variable ont été de qualité diverse ; l'aspect purement calculatoire de la question n'a pas posé de difficulté particulière, sans doute du fait que la réponse était donnée par l'énoncé.
- b. Le caractère $\mathcal{C}^1$ de f a été étudié de manière fort diverse. Les meilleurs parviennent à une rédaction irréprochable tandis que beaucoup se bornent à de vagues incantations invoquant les propriétés habituelles de stabilité par opérations élémentaires. Parfois les signes plus se transforment subrepticement en signes moins sans que l'on sache très bien pourquoi. Même les étudiants qui ont l'idée d'introduire une primitive de la fonction

$$u \mapsto h(u) = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$$

ne se tirent pas toujours d'affaire :

- Ils nous parlent de la primitive qui s'annule en 0 et écrivent l'intégrale correspondante... sans réaliser qu'elle est divergente : $+\infty$
 - Ils se trahissent en dérivant $x \mapsto \int_x h(u) du$, prétendant que l'on obtient suite à cela $(\lim_{+\infty} h) - h(x) = -h(x)$.
- c. Lorsque les étudiants ont l'idée de procéder à une intégration par partie, ils parviennent à la conclusion, moyennant quelques libertés prises avec la rigueur :
- Le retour sur un segment n'est que trop rarement constaté, alors que cela devrait de mon point de vue être un réflexe ;
 - La convergence du crochet n'est que très rarement justifiée de manière honnête : parler de croissances comparées pour dire que le terme en l'infini est nul ne me paraît pas suffisant quand la réponse finale est donnée par l'énoncé, et j'attendais un raisonnement par équivalents, même rapide.
 - La question des convergences est presque toujours incomplètement traitée (on parle de la convergence de la première intégrale mais pas de la deuxième) quand elle n'est pas tout simplement escamotée.
- La stricte croissance de f n'a pas posé de problèmes sérieux.
- 4) a. On retrouve à l'identique les défauts évoqués pour la question précédente. Quant à la convergence de l'intégrale sur $]0, +\infty[$, on est souvent gratifié d'une bien inutile et laborieuse étude en $+\infty$ (parfois correcte cependant) pour faire l'impasse sur le problème en 0, pourtant pas bien méchant.

- b.** Question souvent abordée, sans que cela soit très convaincant. Les étudiants n'ont que trop rarement le réflexe de s'interroger sur la limite du rapport des deux fonctions qu'ils comparent. En lieu et place, le correcteur est gratifié de considérations formelles où des termes sont évincés d'autorité dès qu'ils tendent vers 0, et où l'on additionne sans frémir (et peut-être sans s'en rendre compte) des équivalents. Seules les meilleures copies savent s'extraire de ce magma de raisonnements hasardeux.
- c.** Ici la confusion règne. Deux voies étaient possibles : appliquer une version du théorème de « prolongement C^1 » ou revenir au taux d'accroissement. De nombreuses copies louvoient entre les deux ou oublient de vérifier certaines hypothèses. Peu ont la présence d'esprit de calculer $f(0)$ ou de remarquer que l'existence de $f'(0)$ n'allait pas de soi à ce point de l'étude.

Problème

Partie I

- 1) La plupart des copies fournissent la bonne réponse (suggérée par la question suivante) assortie d'explications d'une clarté variable. On justifie volontiers les cas extrêmes, on dédaigne souvent d'évoquer les valeurs intermédiaires.
- 2) Peu d'étudiants prennent la peine de formaliser leur raisonnement à l'aide d'événements et de la formule des probabilités composées, mais certains le font de manière tout à fait convenable. Des erreurs de décompte et de manipulation de factorielles peuvent survenir.
- 3) La première vérification pose moins de problème que la seconde, et donne parfois lieu à une répétition du raisonnement présenté dans la question précédente. La seconde vérification échoue très souvent pour cause de mauvaise réduction au même dénominateur (la présence de deux signes moins dans une factorielle pouvait induire en erreur les étourdis). Un candidat parvient à justifier fort agréablement la deuxième égalité en devinant sa signification probabiliste.
- 4) Trop d'étudiants se contentent ici d'un raisonnement « à points de suspension ». On nous parle parfois de « télescopage » en restant vague. Le raisonnement à l'aide des $\sum$, lorsqu'il est entrepris, est mené à son terme de manière satisfaisante.
- 5) La formule de l'espérance est en général connue, même si l'on prend insuffisamment garde aux valeurs extrêmes ; cela serait l'occasion pour les étudiants de s'interroger sur l'existence de l'espérance, préoccupation trop rarement rencontrée dans les copies. Cette question a permis de distinguer les étudiants qui réfléchissent à ce qu'ils écrivent, qui voient la nécessité

d'isoler le terme pour $k = b + 1$ avant d'appliquer le résultat de la question précédente. Les autres foncent tête baissée et justifient l'égalité finale en affirmant doctement que $1 = 0$ à constante multiplicative près (non nulle, comme il se doit).

Partie II

- 1) Le sens expérimental de ces probabilités a souvent été saisi, les valeurs attendues sont apparues régulièrement dans les copies. La disjonction de cas pour $p_{n,n}$ n'est pas toujours traitée. Trop souvent, on affuble la suite $(p_{n,k})_{k \in [0,n]}$ du rôle de système complet d'événements pour justifier le dernier calcul.
- 2) Cette question a été prudemment évitée par la majorité des candidats. Ceux qui s'y risquent peinent à convaincre, tant leur justifications sont désordonnées et approximatives : le recours aux événements, qui me paraît ici indispensable, est un luxe que peu de candidats s'autorisent. Là encore, le concept de système complet d'événement est malmené. Seule une copie s'interroge sur la possibilité que les événements par rapport auxquels on conditionne puissent être de probabilité nulle.
- 3)
 - a. Quand elle a été abordée, la première partie de la question a été menée à bien. La conséquence que les candidats devaient en tirer a été assez largement traitée.
 - b. Question d'algorithmique dédaignée par la plupart des candidats, traitée avec un bonheur inégal sinon. Des versions récursives imparfaites (car moins adaptées au libellé exact de la question) coïtoient des versions itératives plus ou moins convenables. Le programme proposé n'a jamais été accompagné de justifications rédigées : au mieux trouve-t-on en marge le calcul de $\mathbb{E}(X_0)$.
 - c. Question souvent abordée et convenablement traitée. Beaucoup appliquent la méthode standard de traitement des suites arithmético-géométriques, qui aurait pu être abrégée puisque la réponse était donnée. D'autres procèdent par récurrence.
- 4)
 - a. Un peu plus de succès ici que dans la question 2, cette question étant un peu plus facile.
 - b. Souvent bien traitée
- 5)
 - a. Question peu abordée, qui demandait il est vrai un peu plus de calculs. Certains pensent à utiliser la formule de transfert directement, d'autres décomposent d'abord u_n ; personne ne justifie l'existence des espérances manipulées.
 - b. Ceux qui ne se sont pas laissés impressionner par la longueur de la formule ont su la prouver.
 - c. Cette récurrence a été menée de manière parfois laborieuse (voire mal rédigée, peut-être par manque de temps). Beaucoup ont buté sur la factorisation menant au troisième terme de la somme.
 - d. Question qui, lorsqu'elle est abordée, l'est correctement.

CORRIGE EXERCICE 1

PARTIE I : Etude d'un cas particulier

1. Un calcul direct nous donne :

$$\begin{aligned}\Phi_A(V_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -V_2 + V_3 \\ \Phi_A(V_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -V_1 + V_4 \\ \Phi_A(V_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V_1 - V_4 \\ \Phi_A(V_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = V_2 - V_3\end{aligned}$$

donc T est bien la matrice de Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) . En outre, la matrice T est symétrique à coefficients réelles donc elle est diagonalisable (en base orthonormale).

2. Un calcul direct nous donne :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^3 = T^2 \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4T.$$

Ainsi le polynôme $X^3 - 4X = X(X^2 - 4)$ annule la matrice T donc les valeurs propres de T sont parmi les racines de ce polynôme c'est-à-dire qu'elles appartiennent à l'ensemble $\{-2, 0, 2\}$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ alors

$$TX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - y = 0 \\ t - x = 0 \\ x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} t \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=Y_1} + \underbrace{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=Y_2} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(W_1, W_2).$$

Les deux vecteurs (Y_1, Y_2) sont non colinéaires donc ils forment une base de l'espace propre associé à 0 de la matrice T .

4. Un calcul direct donne :

$$TX_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_1, \quad TX_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

5. La famille (X_1, X_2, Y_1, Y_2) est libre puisque

$$\begin{aligned}\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma Y_1 + \delta Y_2 &= 0 \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + \delta = 0 \\ \gamma - 2\beta - 2\alpha = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\beta - 2\alpha + \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = 0 & (1) + (4) \\ \gamma = 0 & (2) + (3) \\ \alpha = \beta \\ \alpha = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 & (3) + (4) \\ \beta = 0 & (3) - (4) \end{cases}\end{aligned}$$

et elle de cardinal 4 qui est la dimension de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. D'après les questions précédentes, on a

$$TX_1 = 2X_1, \quad TX_2 = -2X_2, \quad TY_1 = 0, \quad TY_2 = 0.$$

Si u est l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à T , sa matrice dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est T et dans la base (X_1, X_2, Y_1, Y_2) est la matrice $D = \text{diag}(2, -2, 0, 0)$. La matrice de passage

de la base canonique de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2, Y_1, Y_2) étant la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on est

assuré de l'égalité $T = PDP^{-1}$.

PARTIE II : Réduction de Φ_A dans le cas général

1. Il est immédiat que Φ_A est une application de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. En outre, pour tous vecteurs M, N de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et tous scalaires α, β de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_A(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha AM + \beta AN - \alpha MA - \beta NA \\ &= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) = \alpha\Phi_A(M) + \beta\Phi_A(N) \end{aligned}$$

ce qui justifie la linéarité de Φ_A donc Φ_A est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. En utilisant les deux propriétés de la trace rappelés dans l'énoncé, pour tous matrices M, N, P de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et tous réels α, β , on a :

- symétrie :

$$\langle M | N \rangle = \text{Tr}(^tMN) = \text{Tr}(^t(^tMN)) = \text{Tr}(^tN^t(^tM)) = \text{Tr}(^tNM) = \langle N | M \rangle.$$

- linéarité à gauche

$$\begin{aligned} \langle \alpha M + \beta N | P \rangle &= \text{Tr}(^t(\alpha M + \beta N)P) = \text{Tr}((\alpha^tM + \beta^tN)P) = \text{Tr}(\alpha^tMP + \beta^tNP) \\ &= \alpha \text{Tr}(^tMP) + \beta \text{Tr}(^tNP) = \alpha \langle M | P \rangle + \beta \langle N | P \rangle. \end{aligned}$$

- définie positif :

$$\langle M | M \rangle = \text{Tr}(^tMM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j})^2 \geq 0$$

$$\langle M | M \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j})^2 = 0 \stackrel{\forall i,j}{\Leftrightarrow} \stackrel{(m_{i,j})^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} \forall i,j, \quad (m_{i,j})^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i,j, \quad m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$

3. Un calcul direct nous donne :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_A(M) | N \rangle &= \text{Tr}(^t(AM - MA)N) = \text{Tr}((^tM^tA - ^tA^tM)N) = \text{Tr}((^tMA - A^tM)N) \\ &= \text{Tr}(^tMAN - A^tMN) = \text{Tr}(^tMAN) - \text{Tr}(A[^tMN]) = \text{Tr}(^tMAN) - \text{Tr}([^tMN]A) \\ &= \text{Tr}(^tMAN - ^tMNA) = \text{Tr}(^tM(AN - NA)) = \langle M | \Phi_A(N) \rangle. \end{aligned}$$

L'endomorphisme Φ_A est donc symétrique pour le produit scalaire $\langle | \rangle$ ce qui entraîne sa diagonalisabilité (en base orthonormale).

4. (a) On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ donc $M_{X,Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) = (x_i y_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Les

vecteurs X et Y étant non nuls (ce sont des vecteurs propres), il existe au moins un indice i_0 et un indice j_0 tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$ donc $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$ ce qui assure la non-nullité de la matrice $M_{X,Y}$. En outre, en composant par la transposée l'égalité $AY = \mu Y$, on a

$$^t(AY) = ^t(\mu Y) \Leftrightarrow ^tY^tA = \mu^tY \Leftrightarrow ^tYA = \mu^tY$$

(b) En utilisant l'associativité du produit matriciel, on a

$$\begin{aligned}\Phi_A(M_{X,Y}) &= A(X {}^tY) - (X {}^tY)A = (AX) {}^tY - X ({}^tYA) = (\lambda X) {}^tY - X (\mu {}^tY) \\ &= \lambda X {}^tY - \mu X {}^tY = \lambda M_{X,Y} - \mu M_{X,Y} = (\lambda - \mu)M_{X,Y}.\end{aligned}$$

Le vecteur $M_{X,Y}$ est non nul et appartient à l'espace propre $E_{\lambda-\mu}(\Phi_A)$ donc $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A quels que soient les valeurs propres λ, μ de A c'est-à-dire que $\Gamma \subset \text{Sp}(\Phi_A)$.

5. (a) La matrice A étant symétrique et à coefficients réelles, elle est diagonalisable. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour A alors pour tout vecteur Z de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$Z = \sum_{k=1}^n \alpha_k E_k \Rightarrow MZ = M \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k E_k \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k M E_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k 0 = 0.$$

L'endomorphisme canoniquement associée à M est donc l'endomorphisme nul donc sa matrice dans toute base est nulle et M est l'un de ces matrices donc M est la matrice nulle.

Or la matrice M est un vecteur propre de Φ_A donc M est non nulle ce qui fournit une contradiction. Par conséquent, il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.

(b) En suivant l'indication de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_A(M) &= \alpha M \Leftrightarrow AM - MA = \alpha M \Rightarrow (AM - MA)Z_0 = \alpha MZ_0 \Leftrightarrow AMZ_0 - MAZ_0 = \alpha MZ_0 \\ &\Leftrightarrow AMZ_0 - M\mu Z_0 = \alpha MZ_0 \Leftrightarrow A(MZ_0) - \mu MZ_0 = \alpha MZ_0 \Leftrightarrow A(MZ_0) = (\alpha + \mu)MZ_0.\end{aligned}$$

Ainsi MZ_0 est non nul (par hypothèse) et appartient à $E_{\alpha+\mu}(A)$ donc c'est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\alpha + \mu$.

- (c) D'après ce qui précède, pour toute valeur propre α de Φ_A et toute valeur propre μ de A , $\alpha + \mu$ est une valeur propre de A . Si on la note λ , on dispose alors de la relation

$$\alpha + \mu = \lambda \Leftrightarrow \alpha = \lambda - \mu \in \Gamma$$

ce qui montre que toute valeur propre α de Φ_A appartient à Γ donc $\text{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$. Cette inclusion ainsi que celle obtenue à la question **II.4.b** montre l'égalité $\text{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

CORRIGE EXERCICE 2

1. (a) La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel $X > 0$, on a

$$\int_0^X e^{-at} dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_{t=0}^{t=X} = \frac{1 - e^{-aX}}{a} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{a}$$

ce qui démontre la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ et sa valeur est $\frac{1}{a}$.

- (b) Pour tout réel x , la fonction $t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on dispose de la domination suivante

$$e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} e^{-2t}O\left(\sqrt{e^{2t}}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} e^{-2t}O(e^t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-t}).$$

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (d'après la question précédente), on en déduit que la fonction $t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ l'est aussi.

2. (a) Etant donné que chaque membre de l'encadrement est positif, on peut élever au carré l'encadrement proposé :

$$x^2 e^{2t} \leq 1 + x^2 e^{2t} \leq \left(x e^t + \frac{e^{-t}}{2x} \right)^2 \Leftrightarrow x^2 e^{2t} \leq 1 + x^2 e^{2t} \leq x^2 e^{2t} + 1 + \frac{e^{-2t}}{4x^2}$$

Ce dernier encadrement étant clairement vérifié, l'encadrement proposé initialement est également vérifié.

- (b) En multipliant l'encadrement précédent par e^{-2t} , on a :

$$\forall x > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad x e^{-t} \leq e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq x e^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}.$$

Les trois membres de cet encadrement étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par rapport à t), on peut intégrer cet encadrement ce qui nous donne :

$$\forall x > 0, \quad x \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \left(x e^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x} \right) dt = x \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + \frac{1}{2x} \int_0^{+\infty} e^{-3t} dt \Leftrightarrow x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}$$

- (c) L'encadrement précédent montre que $\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) - x \leq \frac{1}{6x}$ donc, d'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ c'est-à-dire que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f .
3. (a) La fonction $t \mapsto x e^t$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ sur $[x, +\infty[$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc $u = x e^t$ est bien un changement de variable. En outre, on a

$$\begin{aligned} du &= x e^t dt = u dt \Leftrightarrow dt = \frac{du}{u}, \quad \begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = x \\ t \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty \end{cases} \\ f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^t)^2} \sqrt{1 + x^2 (e^t)^2} dt = \int_x^{+\infty} \left(\frac{x}{u} \right)^2 \sqrt{1 + u^2} \frac{du}{u} = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du. \end{aligned}$$

Bien entendu, un tel changement de variable n'affecte pas la convergence des intégrales donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u} du$ converge quel que soit $x > 0$.

- (b) La fonction $x \mapsto \int_{+\infty}^x \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du$ est l'unique primitive tendant vers 0 en $+\infty$ de la fonction $u \mapsto \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3}$

donc elle est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^3}$. On en déduit que la fonction

$$f : x \mapsto x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du = -x^2 \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du$$

est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée vaut :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -2x \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du - x^2 \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^3} = -2x \left(\frac{f(x)}{-x^2} \right) - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = \frac{2f(x) - \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

- (c) On procède à l'aide d'une intégration par parties. Pour tout réel $X > 0$, on a :

$$\begin{aligned} (A) \quad & \int_x^X \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du = \left[-\frac{1}{2u^2} \sqrt{1 + u^2} \right]_{u=x}^{u=X} - \int_x^X -\frac{1}{2u^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2u}{\sqrt{1 + u^2}} du \\ &= \frac{1}{2x^2} \sqrt{1 + x^2} - \frac{\sqrt{1 + X^2}}{2X^2} + \frac{1}{2} \int_x^X \frac{du}{u \sqrt{1 + u^2}} \end{aligned}$$

Puisque l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$ converge quel que soit $x > 0$ (d'après la question **3.a**), on est assuré

que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_x^X \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du = \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$. En outre, on a :

$$\frac{\sqrt{1+X^2}}{2X^2} \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{X^2}}{2X^2} = \frac{X}{2X^2} = \frac{1}{2X} \underset{X \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0,$$

donc la fonction

$$X \mapsto \frac{1}{2} \int_x^X \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = \int_x^X \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - \frac{1}{2x^2} \sqrt{1+x^2} + \frac{\sqrt{1+X^2}}{2X^2}$$

tend vers $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - \frac{1}{2x^2} \sqrt{1+x^2}$ lorsque $X \rightarrow +\infty$. Par conséquent, la fonction $X \mapsto \int_x^X \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$

possède une limite finie lorsque $X \rightarrow +\infty$ d'où la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} &= \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - \frac{1}{2x^2} \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du = \frac{1}{2x^2} \sqrt{1+x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \\ \Rightarrow \underset{\times 2x^2}{2f(x)} &= \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}$$

4. (a) On procède à l'aide d'une intégration par parties sur $[x, X]$ puis en faisant tendre X vers $+\infty$ (comme à la question précédente), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_x^X \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} &= \left[\ln(u) \cdot (1+u^2)^{-1/2} \right]_{u=x}^{u=X} - \int_x^X \ln(u) \left(-\frac{1}{2} \right) (2u)(1+u^2)^{-3/2} du \\ &= \frac{\ln(1+X^2)}{1+X^2} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^X \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du \end{aligned}$$

Etant donné que

$$\frac{\ln(1+X^2)}{1+X^2} = \frac{\overbrace{\ln(X^2)}^{\rightarrow +\infty} + \overbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{X^2}\right)}^{\rightarrow \ln(1)=0}}{\underbrace{X^2 \left(1 + \frac{1}{X^2}\right)}_{\rightarrow 1}} \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(X^2)}{X^2} = \frac{2 \ln(X)}{X^2} \underset{X \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0,$$

et que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge pour tout $x > 0$, un argumentaire similaire à la question

précédente montre que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ converge pour tout $x > 0$. En outre, on a :

$$\forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du.$$

Pour finir, on constate que la fonction $u \mapsto \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, tend vers 0 lorsque u tend vers 0 (d'après les croissances comparées, $u \ln(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} 0$) donc elle se prolonge continûment en 0. En

particulier, l'intégrale $\int_0^1 \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ est convergente et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ convergeant, on

est assuré de la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$.

(b) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ étant convergente, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du = \int_0^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ et

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} = +\infty$ donc, en utilisant l'égalité de la question précédente, on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

En combinant les questions **3.b**, **3.c** et l'équivalent précédent, on a :

$$f'(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln(x)$$

En utilisant la question **3.c.** et le développement limité à l'ordre de 2 en 0 de $\sqrt{1+x^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2f(x) - 1 &= \sqrt{1+x^2} - 1 + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^2 (-\ln(x) + o(\ln(x))) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} -x^2 \ln(x) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2 \ln(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} -x^2 \ln(x) \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2 \ln(x)} + o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) + o(1)\right)}_{\rightarrow 1} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x^2 \ln(x). \end{aligned}$$

(c) On a établi à la question **3.b** que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et d'après la question précédente, on a

$$f(x) - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^2 \ln(x)}{2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+0^2 e^{2t}} = f(0),$$

ce qui entraîne la continuité en 0 de f . En outre, on a :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de prolongement continu de la dérivée : la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$.

CORRIGE PROBLEME

PARTIE I

1. La variable Y prend clairement des valeurs entières. Il est indispensable de faire au moins un tirage pour obtenir une boule blanche donc $Y \geq 1$. D'autre part, si l'on pioche uniquement des boules noires aux b

premiers tirages, il ne reste que des boules blanches au $(b+1)^e$ tirage donc $Y \leq b+1$ ce qui nous assure que $Y(\Omega) \subset \llbracket 1, b+1 \rrbracket$. Pour finir, si $k \in \llbracket 1, b+1 \rrbracket$, il est possible que les tirages précédents la k^e pioche ne fournissent que des boules noires et que la k^e pioche fournisse une boule blanche donc $\llbracket 1, b+1 \rrbracket \subset Y(\Omega)$ ce qui établit l'égalité ensembliste $Y(\Omega) = \llbracket 1, b+1 \rrbracket$.

2. Si l'on désigne par B_k (resp. N_k) l'évènement «obtenir une boule blanche (resp. noire) à la k -ième pioche», on a :

$$\begin{aligned} p(Y = k) &= p(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) = p(N_1)p_{N_1}(N_2) \dots p_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1})p_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{b}{N} \times \frac{b-1}{N} \times \dots \times \frac{b-(k-2)}{N} \times \frac{a+(k-1)}{N} = \frac{b(b-1) \dots (b-k+2) [a+(k-1)]}{N^k} \end{aligned}$$

3. En utilisant la formule précédente, on a :

$$P(Y = b+1) = \frac{b(b-1) \dots (b-[(b+1)-2]) [a+((b+1)-1)]}{N^{b+1}} = \frac{b(b-1) \times \dots \times 1 \times N}{N^{b+1}} = \frac{b!}{N^b}.$$

Pour la seconde formule, on procède par simplification du second membre de l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} &= \frac{b(b-1) \dots 1}{(b-k+1)(b-k) \dots 1} \cdot \frac{1}{N^{k-1}} - \frac{b(b-1) \dots 1}{(b-k)(b-k-1) \dots 1} \cdot \frac{1}{N^k} \\ &= \frac{b(b-1) \dots (b-k+2)}{N^{k-1}} - \frac{b(b-1) \dots (b-k+1)}{N^k} \\ &= \frac{b(b-1) \dots (b-k+2)}{N^{k-1}} \left[1 - \frac{b-k+1}{N} \right] \\ &= \frac{b(b-1) \dots (b-k+2)}{N^{k-1}} \left[\frac{N-b+k-1}{N} \right] \\ &= \frac{b(b-1) \dots (b-k+2)}{N^{k-1}} \left[\frac{a+k-1}{N} \right] \\ &= \frac{b(b-1) \dots (b-k+2) [a+(k-1)]}{N^k} = P(Y = k) \end{aligned}$$

4. En exploitant les règles de calculs sur les symboles $\sum$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) &= \sum_{k=1}^M ka_{k-1} - \sum_{k=1}^M ka_k \stackrel{q=k-1}{=} \sum_{q=0}^{M-1} (q+1)a_q - \sum_{k=1}^M ka_k = a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} (k+1)a_k - Ma_M - \sum_{k=1}^{M-1} ka_k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} [(k+1) - k]a_k - Ma_M = a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k - Ma_M = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M. \end{aligned}$$

5. En combinant les questions **I.3.** et **I.4.**, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{b+1} kP(Y=k) = \sum_{k=0}^b kP(Y=k) + (b+1)P(Y=b+1) \\
&= \sum_{k=0}^b k \left(\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} \right) + (b+1) \cdot \frac{b!}{N^b} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k} \right) - b \cdot \frac{b!}{(b-b)!N^b} + (b+1) \cdot \frac{b!}{N^b} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k} \right) - b \cdot \frac{b!}{0!N^b} + (b+1) \cdot \frac{b!}{N^b} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k} \right) - b \cdot \frac{b!}{N^b} + (b+1) \cdot \frac{b!}{N^b} = \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k} \right) + \frac{b!}{N^b} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k} \right) + \frac{b!}{0!N^b} = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b-k)!N^k}.
\end{aligned}$$

PARTIE II

1. Un calcul direct nous donne

$$p_{n,0} = p(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = p(B_1)p_{B_1}(B_2) \dots p_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{a}{N} \times \frac{a}{N} \times \dots \times \frac{a}{N} = \left(\frac{a}{N} \right)^n$$

Si $n > b$ alors $p_{n,n} = 0$ (d'après la remarque de l'énoncé). Si $n \leq b$ alors on a

$$\begin{aligned}
p_{n,n} &= p(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) = p(N_1)p_{N_1}(N_2) \dots p_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) \\
&= \frac{b}{N} \times \frac{b-1}{N} \times \dots \times \frac{b-(n-1)}{N} = \frac{b(b-1) \dots (b-n+1)}{N^n}.
\end{aligned}$$

Au cours des n tirages, on obtient soit 0, 1, 2, .. ou n boules noires. Ces évènements étant deux à deux incompatibles, ils forment donc une famille totale d'évènements donc $\sum_{k=0}^n p_{n,k} = 1$.

2. La famille (N_n, B_n) formant une famille totale d'évènements, la formule des probabilités totales montre que :

$$\begin{aligned}
p_{n,k} &= p(X_n = k) = p[(X_n = k) \cap N_n] + p[(X_n = k) \cap B_n] = p[(X_{n-1} = k-1) \cap N_n] + p[(X_{n-1} = k) \cap B_n] \\
&= p(X_{n-1} = k-1)p_{(X_{n-1}=k-1)}(N_n) + p(X_{n-1} = k)p_{(X_{n-1}=k)}(B_n) = p_{n-1,k-1} \cdot \frac{b-(k-1)}{N} + p_{n-1,k} \cdot \frac{a+k}{N} \\
&= \frac{(b+1-k)p_{n-1,k-1}}{N} + \frac{(a+k)p_{n-1,k}}{N} \Rightarrow N \cdot p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}
\end{aligned}$$

3. (a) En utilisant la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned}
N.E(X_n) &= N \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^n k N p_{n,k} = \sum_{k=1}^n k N p_{n,k} = \sum_{k=1}^n k [(a+k) p_{n-1,k} + (b+1-k) p_{n-1,k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^n k (a+k) p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n k (b+1-k) p_{n-1,k-1} \\
&= \sum_{k=0}^n k (a+k) p_{n-1,k} + \sum_{q=0}^{n-1} (q+1) (b+1-(q+1)) p_{n-1,q} \quad (q = k-1) \\
&= \sum_{k=0}^n k (a+k) p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) (b-k) p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k (a+k) p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) (b-k) p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [k(a+k) + (k+1)(b-k)] p_{n-1,k} = \sum_{k=0}^{n-1} [k(a+b-1) + b] p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [k(N-1) + b] p_{n-1,k} = (N-1) \sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1,k} + b \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k} \\
&= (N-1) E(X_{n-1}) + b \Rightarrow E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}
\end{aligned}$$

(b) function ecricome(n : integer) : real;

begin

if n=0 then ecricome := 0 else ecricome := 0.99*ecricome(n-1) + 0.1;

end;

(c) La suite $(E(X_n))_n$ est arithmético-géométrique et l'on a :

$$L = \left(1 - \frac{1}{N}\right) L + \frac{b}{N} \Leftrightarrow \frac{L}{N} = \frac{b}{N} \Leftrightarrow L = b$$

donc la suite $E(X_n) - b$ est géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ ce qui nous donne :

$$E(X_n) - b = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n [E(X_0) - b] = -b \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \Rightarrow E(X_n) = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

4. (a) La famille $((X_n = k))_{0 \leq k \leq n}$ forme une famille totale d'événements donc l'on a :

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= p(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^n p([(X_n = k) \cap N_{n+1}]) = \sum_{k=0}^n p(X_n = k) p_{(X_n=k)}(N_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^n p_{n,k} \cdot \frac{b-k}{N} \Rightarrow N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b-k) \cdot p_{n,k}
\end{aligned}$$

(b) Un calcul direct nous donne :

$$N \cdot q_{n+1} = b \sum_{k=0}^n p_{n,k} - \sum_{k=0}^n k p_{n,k} = b - E(X_n) = b \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \Rightarrow q_{n+1} = \frac{b}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

5. (a) D'après le théorème du transfert, on a :

$$\begin{aligned}
N.u_n &= N.E(X_n(X_n - 1)) = \sum_{k=0}^n N.k(k-1)p(X_n = k) = \sum_{k=1}^n N.k(k-1)p(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k(k-1)N.p_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^n k(k-1) [(a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^n k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1} \\
&= \sum_{k=0}^n k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{q=0}^n (q+1)q(b-q)p_{n-1,q} \quad (q = k-1) \\
&= \sum_{k=0}^n k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^n k(k+1)(b-k)p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^n k[(k-1)(a+k) + (k+1)(b-k)]p_{n-1,k} = \sum_{k=0}^n k[k(a+b-2) + b-a]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^n k[(k-1)(a+b-2) + b-a + (a+b-2)]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^n k[(k-1)(a+b-2) + 2b-2]p_{n-1,k} = \sum_{k=0}^n k[(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)]p_{n-1,k} \quad (p_{n-1,n} = 0)
\end{aligned}$$

(b) Un calcul direct nous donne :

$$\begin{aligned}
N.u_n &= (a+b-2) \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)p_{n-1,k} + 2(b-1) \sum_{k=0}^{n-1} kp_{n-1,k} \\
&= (N-2)E(X_{n-1}(X_{n-1} - 1)) + 2(b-1)E(X_{n-1}) = (N-2)u_n + 2b(b-1) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right] \\
u_n &= \left(1 - \frac{2}{N} \right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

(c) On pose $(\mathcal{H}_n) : \ll u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right] \gg$.

Initialisation $n = 0$: $u_0 = E(X_0(X_0 - 1)) = 0$ (car $X_0 = 0$) et

$$b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right)^0 - 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^0 \right] = b(b-1) [1 + 1 - 2] = 0 = u_0$$

donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un certain entier n et démontrons $(\mathcal{H}_{n+1})$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_n + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= \left(1 - \frac{2}{N}\right) b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= b(b-1) \left[1 - \frac{2}{N} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - 2 \left(1 - \frac{2}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \frac{2}{N} - \frac{2}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - \left[2 \left(1 - \frac{2}{N}\right) + \frac{2}{N}\right] \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - \left[2 - \frac{4}{N} + \frac{2}{N}\right] \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - \left[2 - \frac{2}{N}\right] \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - 2 \left[1 - \frac{1}{N}\right] \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) Par définition, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= E(X_n(X_n - 1)) = E(X_n^2 - X_n) = E(X_n^2) - E(X_n) = V(X_n) + (E(X_n))^2 - E(X_n) \\
V(X_n) &= u_n - (E(X_n))^2 + E(X_n) \\
&= b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] - \left(b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]\right)^2 + b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = b(b-1) - b^2 + b = 0
\end{aligned}$$