Ecricome 2010

Exercice 1

1. (a) Soit $t \in [0,1[$, il est de notoriété publique que pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

soit encore en prenant l'inverse des deux membres :

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} = \frac{1-t}{1-t^n}$$

et en soustrayant $1-t$ dans chaque membre, il vient :

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t) = \frac{1-t}{1-t^n} - (1-t)$$

et en réduisant :

$$\boxed{\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t) = \frac{(1-t)\, t^n}{1-t^n}}$$

Comme les trois fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k}$, $t \mapsto -(1-t)$ et $t \mapsto \dfrac{(1-t)\, t^n}{1-t^n}$ sont continues sur l'intervalle $[0,1[$, avec $0 < 1$ la **croissance et la linéarité de l'intégrale** entraînent que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} dt - \int_0^1 (1-t)\, dt = \int_0^1 \frac{(1-t)\, t^n}{1-t^n} dt$$

soit :

$$0 \leq u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{(1-t)\, t^n}{1-t^n} dt \qquad (1)$$

et comme $\frac{(1-t)t^n}{1-t^n} \leq \frac{t^n}{1-t^n} \leq t^n$ alors :

$$0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \int_0^1 t^n dt$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par le **théorème d'encadrement** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 0$ soit :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

(b) Selon le changement de variable préconisé $u = t^n$ (licite bien sûr car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et à valeurs dans $[0,1[$) nous avons d'une part $du = nt^{n-1}dt$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du &= \int_0^1 \frac{(t^n)^{1/n} - (t^n)^{2/n}}{1-t^n} nt^{n-1} dt \\ &= n \int_0^1 \frac{t-t^2}{1-t^n} t^{n-1} dt \\ &= n \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n} t^n dt \\ &= n\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \\ & \text{selon (1)} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}}$$

2. (a) Il est connu de tous que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ et par compatibilité de l'équivalence des fonctions pour le produit et le quotient ($x-1$ ne s'annule pas au voisinage épointé de 1) :

$$\frac{(\ln(x))^k}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{(x-1)^k}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^{k-1}$$

par suite :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k=1 \\ 0 & \text{si} \quad k \geq 2 \end{cases}}$$

(b) L'intégrande étant **continu** sur $]0,1[$ l'intégrale est doublement impropre en 0 et en 1. Le problème en 1 vient d'être réglé à la question précédente qui indique que pour toutes valeurs de $k \geq 1$, l'intégrande est **prolongeable par continuité** en 1. D'autre part :

$$x^{1/2}\frac{(\ln(x))^k}{x-1} \underset{x\to 0}{\sim} -x^{1/2}(\ln(x))^k$$

avec $\lim_{x\to 0} -x^{1/2}(\ln(x))^k = 0$ par **croissance comparée** (log-puissances). Par **caractérisation des fonctions négligeables** $\frac{(\ln(x))^k}{x-1} = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$ et comme la fonction racine carrée admet une intégrale convergente au voisinage de 0 selon les travaux de Riemann ($1/2 < 1$), le **critère de négligeabilité** appliqué aux fonctions positives nous assure que $\int_{1/2}^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}dx$ converge. Moralité la convergence avérée de $\int_0^{1/2} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}dx$ et de $\int_{1/2}^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}dx$ équivaut à celle de $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}dx$.

(c) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,0]$ en tant que somme de telles fonctions, on peut lui appliquer l'**inégalité de Taylor-Lagrange** à l'ordre 1, qui donne pour tout rél $x \in]-\infty,0]$:

$$|f(x) - f(0) - xf'(0)| \leq \frac{Mx^2}{2!} \tag{2}$$

où le réel M indépendant de n désigne la borne supérieure de $|f''|$ sur le segment $[x,0]$ avec :

- $f(0) = 0$;
- $f'(x) = e^x - 2e^{2x}$ donc $f'(0) = -1$;
- $f''(x) = e^x - 4e^{2x} = e^x(1-4e^x) \leq 1 - 4e^x$ avec $-3 \leq 1-4e^x \leq 1$ lorsque x parcourt l'intervalle $]-\infty,0]$ donc $|f''(x)| \leq 3$ et $M = 3$.

L'application de (2) donne donc le résultat final :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,0], \quad \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leq \frac{3x^2}{2!}} \tag{3}$$

3. (a) Soit n un entier naturel non nul, nous avons :

$$\begin{aligned} \left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du\right| &= \left|\int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u}du + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du\right| \\ &= \left|\int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln(u)}{n}}{1-u}du\right| \end{aligned}$$

Si nous appliquons le résultat (3) à $x = \frac{\ln(u)}{n}$ (soit $u = e^{nx}$) où $u \in]0,1[$, donc $x < 0$, il s'ensuit que :

$$\left|u^{1/n} - u^{2/n} + \tfrac{\ln(u)}{n}\right| \leq \frac{3(\ln(u))^2}{2!n^2}$$

Selon l'**inégalité triangulaire** :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}+\frac{\ln(u)}{n}}{1-u}du\right| &\leq \int_0^1 \left|\frac{u^{1/n}-u^{2/n}+\frac{\ln(u)}{n}}{1-u}\right| du \\ &\leq \int_0^1 \frac{3\left(\ln(u)\right)^2}{2!n^2(1-u)}du\end{aligned}$$

et par **linéarité de l'intégrale** :

$$\boxed{\forall n\geq 1,\quad \left|v_n+\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du\right| \leq \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{\left(\ln(u)\right)^2}{1-u}du}$$

(b) Comme nous avons vu à la question **2.b** que pour tout k entier naturel non nul $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}dx$ converge, en particulier $\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}du$ converge aussi et :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}du}{\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}du}{2n\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du} = 0$$

et par **encadrement** :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du} = -1$$

donc par caractérisation des suites équivalentes :

$$\boxed{v_n \sim -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du \sim -\frac{1}{n}I}$$

et comme $\forall n\geq 1$, $u_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{v_n}{n}$:

$$\boxed{u_n-\frac{1}{2}\sim -\frac{1}{n^2}I}$$

Exercice 2

1. (a) Allons-y ...Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et α un réel alors :

$$\begin{aligned}f(\alpha P+Q) &= (\alpha P+Q)''-4X(\alpha P+Q)' \\ &= \alpha P''+Q''-4X\alpha P'-4XQ' \\ &= \alpha f(P)+f(Q)\end{aligned}$$

par **linéarité de la dérivation**.
Vérifions pour terminer que $f(P)$ est bien un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour cela il suffit de constater que si au départ P est pris dans $\mathbb{R}_n[X]$, $P'\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $XP'\in\mathbb{R}_n[X]$ et $P''\in\mathbb{R}_{n-2}[X]\subset\mathbb{R}_n[X]$, donc par stabilité pour $+$ et $\bullet$ de $\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

(b) Nous avons sans commentaire particulier :

$$\boxed{f(1)=0 \quad\text{et}\quad f(X)=-4X}$$

Soit k un entier de $\{2,\ldots,n\}$ alors :

$$f\left(X^k\right)=k(k-1)X^{k-2}-4X\left(kX^{k-1}\right)$$

$$\boxed{\forall k\in\{2,\ldots,n\},\quad f\left(X^k\right)=k(k-1)X^{k-2}-4kX^k}$$

En notant $\mathcal{B}_c = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice A_n de f dans celle-ci s'écrit :

$$\boxed{A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & -8 & 0 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -12 & & k(k-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -4k & & n(n-1) \\ \vdots & & & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -4n \end{bmatrix}}$$

(c) Comme A_n est une **matrice triangulaire supérieure**, ses valeurs propres se trouvent directement sur sa diagonale principale et :

$$\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(A_n) = \{-4k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$$

Comme les valeurs propres de f sont deux à deux distinctes avec $\mathrm{Card}([\![0, n]\!]) = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, c'est une condition suffisante pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

De plus en notant $\forall k \in [\![0, n]\!]$, E_{-4k} l'espace propre associé à $-4k$, nous avons $\dim E_{-4k} \geq 1$ avec $\sum\limits_{k=0}^{n} \dim E_{-4k} = n + 1$ alors :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \dim E_{-4k} = 1}$$

(d) Soit d un entier naturel de l'ensemble $[\![0, n]\!]$. Soit $P = \sum\limits_{k=1}^{d} a_k X^k$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, de degré d alors de la relation $P'' - 4XP' = \lambda P$ il vient :

$$\sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1) X^{k-2} - 4X \sum_{k=1}^{d} a_k k X^{k-1} - \lambda \sum_{k=1}^{d} a_k X^k = 0$$

soit encore :

$$\sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1) X^{k-2} - 4 \sum_{k=1}^{d} a_k k X^{k} - \lambda \sum_{k=1}^{d} a_k X^k = 0$$

ou bien encore

$$(-4d - \lambda) a_d X^d + \cdots = 0$$

et comme l'on sait qu'un polynôme est nul si, et seulement si tous ses coefficients le sont, on obtient que :

$$\boxed{\lambda = -4d = -4 \deg(P)}$$

Comme $\dim E_{-4n} = 1$ nous pouvons écrire que $E_{-4n} = \mathrm{Vect}(P_n)$ où $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X$ (avec $a_n \neq 0$) constitue à lui seul une base de vecteur propres de E_{-4n}. Donc les vecteurs de E_{-4n} sont proportionnels à P_n dont **un seul** de coefficient $\dfrac{1}{a_n}$ noté H_n puisque dans ce cas, **unitaire**.

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme unitaire } H_n \text{ de degré } n \text{ tel que } f(H_n) = -4nH_n}$$

2. (a) Soit $n \geq 1$. La relation (ε_n) nous indique :

$$H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n \tag{4}$$

donc en la **dérivant** on obtient :

$$H_n''' - 4\left(H_n' + XH_n''\right) = -4nH_n'$$

soit en réorganisant encore :

$$\begin{aligned} H_n''' - 4XH_n'' &= -4nH_n' + 4H_n' \\ &= -4\left(n-1\right)H_n' \end{aligned}$$

Or $f\left(H_n'\right) = H_n''' - 4XH_n''$ et la combinaison des deux dernières relations nous donne bien :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad f\left(H_n'\right) = -4\left(n-1\right)H_n'}$$

Cette égalité traduit que polynôme H_n' de degré $n-1$ est un vecteur propre de f de valeur propre $-4\left(n-1\right)$ dont l'espace propre $E_{-4(n-1)}$ correspondant est toujours de dimension 1. Ainsi en prenant H_{n-1} comme vecteur unitaire de base de $E_{-4(n-1)}$, les vecteurs H_n' et H_{n-1} sont proportionnels et comme $H_n' = nX^{n-1} + \cdots$ le **coefficient de proportionnalité** vaut n. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad H_n' = nH_{n-1}} \tag{5}$$

En **dérivant** cette relation il vient :

$$\forall n \geq 2, \quad H_n'' = nH_{n-1}' = n\left(n-1\right)H_{n-2} \tag{6}$$

En combinant (4), (5) et (6) et on en déduit que :

$$\forall n \geq 2, \quad n\left(n-1\right)H_{n-2} - 4XnH_{n-1} = -4nH_n$$

soit de manière équivalente :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{\left(n-1\right)H_{n-2}}{4} = 0}$$

(b) Le polynôme H_0 appartient à l'espace propre E_0 qui est un ensemble uniquement consitué de **polynômes constants** dont le seul unitaire $\boxed{H_0\text{, est égal à } 1}$.
Quant au polynôme H_1, il appartient à l'espace propre E_{-4} uniquement consitué de polynômes de degré égal à **un**, donc de la forme $aX + b$. Comme H_1 est unitaire il s'écrit $X + b$. Or $f\left(X + b\right) = f\left(X\right) + bf\left(1\right) = -4X$ et :

$$f\left(H_1\right) = -4H_1$$

nous donne le moyen d'obtenir b puisque :

$$-4X = -4\left(X + b\right)$$

d'où $b = 0$. En conclusion :

$$\boxed{H_1 = X}$$

Pour finir :

$$H_2 = XH_1 - \frac{\left(2-1\right)}{4}H_0$$

$$\boxed{H_2 = X^2 - \frac{1}{4}}$$

et :

$$\begin{aligned} H_3 &= XH_2 - \frac{\left(3-1\right)}{4}H_1 \\ &= X\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}X \end{aligned}$$

$$\boxed{H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X}$$

(c) Voici un programme possible :

```
Program ecricome1;
var u,v,w :  real ; n :  integer ;
begin
    u := 1 ; v := 1 ;
    for n := 2 to 2010 do
      begin
      w := v - (n-1)*u/4 ;
      u :  = v ;
      v := w ;
      end;
    writeln(w) ;
end.
```

3. (a) Rappelons que $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un point critique de V sur l'ouvert U si les **dérivées partielles de V sont nulles** en C. L'existence de celles-ci ne pose aucun problème puisque V est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme et composée (je vous laisse détailler ...) avec :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = 2x - \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{z-x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = 2y + \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{y-z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = 2z + \dfrac{1}{y-z} - \dfrac{1}{z-x} \end{cases}$$

En C ces dérivées partielles sont **nulles**, alors :

$$\begin{cases} \dfrac{2\alpha - \beta - \gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 2\alpha \\ \dfrac{\alpha - 2\beta + \gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} = 2\beta \\ \dfrac{2\gamma - \alpha - \beta}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} = 2z \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\boxed{(S) : \begin{cases} 2\alpha - \beta - \gamma = 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 2\beta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma) \\ 2\gamma - \alpha - \beta = 2z(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \end{cases}}$$

(b) A partir de $Q(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on obtient :

$$Q'(X) = 3X^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)X + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \quad \text{et} \quad Q''(X) = 6X - 2(\alpha+\beta+\gamma)$$

et :

$$Q''(X) - 4XQ'(X) = 6X - 2(\alpha+\beta+\gamma) - 4X\left(3X^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)X + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\right)$$

donc :

$$\begin{aligned} Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) &= 6\alpha - 2(\alpha+\beta+\gamma) - 4\alpha\left(3\alpha^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\right) \\ &= -2\left(-2\alpha + \beta + \gamma + 2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma\right) \\ &= -2\left(2\alpha - \beta - \gamma - 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\right) \\ &\quad \text{selon } (S) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q''(\beta) - 4\beta Q'(\beta) &= 6\beta - 2(\alpha+\beta+\gamma) - 4\beta\left(3\beta^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)\beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\right) \\ &= -2\left(\alpha - 2\beta + \gamma + 2\beta^3 - 2\alpha\beta^2 - 2\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma\right) \\ &= -2\left(\alpha - 2\beta + \gamma - 2\beta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\right) \\ &\quad \text{selon } (S) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q''(\gamma) - 4\gamma Q'(\gamma) &= 6\gamma - 2(\alpha+\beta+\gamma) - 4\gamma\left(3\gamma^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\right) \\ &= 2\left(2\gamma - \beta - \alpha - 2z\gamma^2 - 2z\alpha\beta + 2z\alpha\gamma + 2z\beta\gamma\right) \\ &= 2\left(2\gamma - \alpha - \beta - 2\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\right) \\ & \text{selon } (S) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On constate bien que si $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ est solution de (S) alors $Q'' - 4XQ'$ admet pour racine α, β, γ. Réciproquement $Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = Q''(\beta) - 4\beta Q'(\beta) = Q''(\gamma) - 4\gamma Q'(\gamma) = 0$ entraîne que :

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - \gamma - 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma - 2\beta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma) = 0 \\ 2\gamma - \alpha - \beta - 2\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) = 0 \end{cases}$$

et nous retrouvons bien le système (S).

(c) On sait que si $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un point critique de V alors $Q'' - 4XQ'$ est un polynôme de degré trois admettant trois racines α, β, γ distinctes par définition de l'ouvert U, racines qui sont aussi celles de Q tel qu'il a été introduit. Donc il existe un réel c tel que :

$$Q'' - 4XQ' = cQ$$

soit encore par définition de l'application f :

$$f(Q) = cQ$$

Comme par définition Q est **unitaire** de degré trois, $Q = H_3$, il est non nul et aussi vecteur propre de valeur propre $\lambda = c = -4 \deg Q = -12$. Moralité :

$$\boxed{Q'' - 4XQ' = -12Q}$$

et, encore une fois, comme

$$\begin{aligned} Q &= H_3 \\ &= X^3 - \frac{3}{4}X \\ &= X\left(X - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

ainsi :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \left\{-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}^3$$

Il y a donc $3! = 6$ points critiques possibles, par un dénombrement basique qui sont :

$$\boxed{\left(0, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \quad \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)}$$

Problème

Partie I

1. (a)
```
Program ecricome2;
var n,k :  integer ; u :  real ;
begin
   writeln('Donner la valeur de n') ;
   readln(n) ;
   u := 0 ;
   for k := 1 to n do u := u+1/k ;
   writeln(u-ln(n)) ;
end.
```

(b) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} + \ln(n+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) \\ &= -\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= -\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme l'on sait que la **partie principale** du développement limité fournit un **équivalent** de la suite en question, il vient :

$$\boxed{u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}}$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge en tant que série proportionnelle à la série de Riemann de paramètre $2 > 1$, le **critère d'équivalence** appliqué aux séries à termes positifs nous assure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1}) \text{ converge}}$$

Soit n un entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_n$$

(car la somme est **télescopique**), soit encore :

$$u_n = u_1 - \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1})$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$ converge, la limite de u_n existe et est finie égale à $u_1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$, d'où la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est assurée.

(c) Etudier la convergence de la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\geq 1}$ revient à étudier la convergence d'une **série de Riemann**, celle de paramètre 2. Comme ce dernier est strictement supérieur à 1, on en déduit que la série, donc la suite, converge. Ceci dit il faut se méfier de la question où le concepteur exige surement de nous la démonstration de ce résultat. Je vous engage donc à vous replonger dans votre cours et mettre en place le critère de convergence série-intégrale.

2. (a) Tout d'abord la fonction F_Z est définie sur $\mathbb{R}$ ce qui est un bon commencement, de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction composée, de $t \mapsto -\exp(-t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$ et de exp de classe $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée $F' : t \mapsto \exp(-t)\, F_Z(t)$

positive sur $\mathbb{R}$ sans oublier de rajouter que $\lim_{x\to-\infty} F_Z(x)=0$ (car $\lim_{x\to-\infty}\exp(-t)=+\infty$ et $\lim_{A\to+\infty}\exp(-A)=0$) et $\lim_{x\to+\infty} F_Z(x)=0$ (car $\lim_{x\to+\infty}\exp(-t)=0$ et $\lim_{A\to 0}\exp(-A)=1$). Tous ces points traduisent bien que F_Z est bien une **fonction de répartition**, et en particulier les deux premiers assurent que cette première est celle d'une **variable à densité**, Z, dont une densité que l'on notera f_Z est obtenue par dérivation de F_Z sur $\mathbb{R}$ ce qui nous donne :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad f_Z(t)=\exp(-t)\exp(-\exp(-t))}$$

(b) Les propriétés de $t\mapsto\exp(-t)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ confèrent à W le statut de **variable à densité** dont on notera la fonction de répartition F_W définie sur $\mathbb{R}$ par $F_W(x)=\mathbf{P}([W\leq x])$ soit encore :

$$\begin{aligned}
F_W(x) &= \mathbf{P}([\exp(-Z)\leq x])\\
&= \begin{cases}\mathbf{P}([-Z\leq \ln x]) & \text{si}\quad x>0\\ 0 & \text{si}\quad x\leq 0\end{cases}\\
&\quad \text{car } \ln \text{ réalise une bijection strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&= \begin{cases}\mathbf{P}([Z\geq -\ln x]) & \text{si}\quad x>0\\ 0 & \text{si}\quad x\leq 0\end{cases}\\
&= \begin{cases}1-F_Z(-\ln x) & \text{si}\quad x>0\\ 0 & \text{si}\quad x\leq 0\end{cases}\\
&= \begin{cases}1-\exp(-\exp(\ln x)) & \text{si}\quad x>0\\ 0 & \text{si}\quad x\leq 0\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad F_W(x)=\begin{cases}1-\exp(-x) & \text{si}\quad x>0\\ 0 & \text{si}\quad x\leq 0\end{cases}}$$

Il est donc de notoriété publique que :

$$\boxed{W\hookrightarrow\varepsilon(1)}$$

(c) La fonction $x\longmapsto(\ln(x))^k e^{-x}$ étant définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}(\ln(x))^k e^{-x}dx$ présente deux impropretés , en 0 et en $+\infty$. Elle converge absolument si, et seulement si les intégrales $\int_0^1|\ln(x)|^k e^{-x}dx$ et $\int_1^{+\infty}\underbrace{(\ln(x))^k e^{-x}}_{\oplus}dx$ convergent.

- **Etude de la convergence en 0.**
Soit k un entier naturel. Nous avons :

$$|\ln(x)|^k e^{-x}\sim|\ln(x)|^k$$

puisque $\lim_{x\to 0^+} e^{-x}=1\neq 0$. D'autre part, par **croissance comparée** (log-puissance) :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}|\ln(x)|^k=0$$

et par **caractérisation de la négligeabilité** :

$$|\ln(x)|^k=o\left(x^{1/2}\right)$$

et l'on sait très bien que la fonction $x\mapsto x^{1/2}$ admet une intégrale convergente au voisinage de 0. Par conséquent le **critère de négligeabilité** appliqué aux fonctions positives assure que :

$$\int_0^1|\ln(x)|^k e^{-x}dx \text{ converge} \tag{7}$$

- **Etude de la convergence en $+\infty$.**
Soit k un entier naturel. Nous avons, puisque lorsque $x\geq 1$:

$$(\ln(x))^k e^{-x}\leq(x-1)^k e^{-x}$$

en associant l'**inégalité de convexité** appliqué à $-\ln$ (qui donne sur $\mathbb{R}_+^*$ $\ln(x) \leq x-1$) et la croissance de $t \mapsto t^k$ sur $[1,+\infty[$. D'autre part :

$$(x-1)^k e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^k e^{-x}$$

Enfin $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge, c'est $\Gamma(k-1)$, cela entraîne, par théorème que $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge aussi si bien que l'emploi successif du **critère d'équivalence** et de comparaison appliqués aux fonctions positives nous indique que :

$$\int_1^{+\infty} (\ln(x))^k e^{-x} dx \text{ converge} \tag{8}$$

L'association des résultats (7) et (8) nous permettent de conclure que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} (\ln(x))^k e^{-x} dx \text{ est absolument convergente}}$$

(d) Soit k un entier naturel. La variable Z admet un moment d'ordre k si, et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_Z(t)\, dt$ est convergente, soit si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \exp(-t)\exp(-\exp(-t))\, dt$ est convergente. En cas de convergence :

$$\mathbf{E}\left(Z^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \exp(-t)\exp(-\exp(-t))\, dt$$

Le changement de variable $x = \exp(-t)$ (donc $dx = -xdt$) proposé étant de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $]0,1[$ est licite et assure que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \exp(-t)\exp(-\exp(-t))\, dt$ et $\int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k e^{-x} dx$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Comme nous retrouvons à $(-1)^k$ près l'intégrale convergente de la question précédente, nous pouvons conclure que Z admet un moment d'ordre k avec :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Z^k\right) = \int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k e^{-x} dx}$$

Partie II

1. (a) Soit $n \geq 1$. Le nombre de pioches nécessaires pour obtenir deux boules distinctes dépasse n si, et seulement si les premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro. Autrement dit :

$$\boxed{[Y_2 > n] = C_n}$$

Sachant qu'il y a 3 possiblités de pioche unicolore,

$$\mathbf{P}(C_n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(C_n) = \mathbf{P}([Y_2 > n]) = \frac{1}{3^{n-1}}}$$

Au passage nous retrouvons bien que $\mathbf{P}([Y_2 > 1]) = 1$. D'autre part on a classiquement pour chaque entier naturel $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y_2 = n]) &= \mathbf{P}([Y_2 > n-1]) - \mathbf{P}([Y_2 > n]) \\ &= \frac{1}{3^{n-2}} - \frac{1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \mathbf{P}([Y_2 = n]) = \frac{2}{3^{n-1}}}$$

(b) Soit $n \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y_3 - Y_2 = n]) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([Y_3 - Y_2 = n] \cap \Omega) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([Y_3 - Y_2 = n] \cap [Y_2 = k]) \\
&\quad \text{selon la première version de la formule des probabilités totales} \\
&\quad \text{associée au système complet d'événements } ([Y_2 = k])_{k \geq 2} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k])
\end{aligned}$$

de plus pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]) &= \mathbf{P}([Y_2 = k])\, \mathbf{P}_{[Y_2 = k]}([Y_3 = n + k]) \\
&\quad \text{selon la formule des probas composées} \\
&= \frac{2}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

car si $[Y_2 = k]$, l'événement $[Y_3 = n + k]$ est réalisé si et seulement si les $n - 1$ pioches suivants les k premières ne fournissent que des boules portant un numéro déjà obtenu (deux chances sur trois par pioche) et la $n^{\text{ème}}$ la boule dont le numéro n'est jamais tombé jusqu'alors (une chance sur trois). Comme les pioches se font avec remise il vient finalement :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Enfin pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y_3 - Y_2 = n]) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-1}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 1/3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}([Y_3 - Y_2 = n]) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{Y_3 - Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

ce qui paraît assez logique !

2. (a) Comme on ne peut obtenir i boules différentes en moins de i titrages successifs avec remise, $Y_i(\Omega) \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, i - 1\}$, l'inclusion réciproque étant immédiate,nous avons bien :

$$\boxed{Y_i(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, i - 1\}}$$

D'autre part le nombre minimum de pioches nécessaires à l'obtention d'une $(i + 1)^{\text{ème}}$ nouvelle boule sachant que i différentes ont déjà été obtenues vaut 1,

$$\boxed{(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

(b) Soit $n \geq 1$ et $k \geq i$. Recommençons le même type de raisonnement qu'à la question **II.1.b :** si $[Y_i = k]$ l'événement $[Y_{i+1} - Y_i = n]$ est réalisé si et seulement si les $n-1$ pioches suivants les k premières nécessaires à l'obtention de i boules différentes ne fournissent que des boules portant un numéro déjà obtenu (i chances sur r par pioche), et la $n^{\text{ème}}$ la boule dont le numéro n'est jamais tombé jusqu'alors avec une probabilité de $1 - i/r$). Ainsi la remise des boules (synonyme d'indépendance) nous fait donc écrire que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \forall k \geq i, \quad \mathbf{P}_{[Y_i=k]}\left([Y_{i+1} - Y_i = n]\right) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)}$$

(c) Selon la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événements $([Y_i = k])_{k \geq i}$ nous avons pour chaque entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([Y_{i+1} - Y_i = n]\right) &= \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbf{P}_{[Y_i=k]}\left([Y_{i+1} - Y_i = n]\right)\mathbf{P}\left([Y_i = k]\right) \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)\mathbf{P}\left([Y_i = k]\right) \\
&= \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)\underbrace{\sum_{k=i}^{+\infty}\mathbf{P}\left([Y_i = k]\right)}_{=1 \text{ selon } Y_i(\Omega)} \\
&= \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{Y_{i+1} - Y_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{i}{r}\right)}$$

ce qui est somme toute logique ! Il s'ensuit d'après le cours que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Y_{i+1} - Y_i\right) = \frac{1}{1 - \frac{i}{r}} = \frac{r}{r-i} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(Y_{i+1} - Y_i\right) = \frac{\frac{i}{r}}{\left(1 - \frac{i}{r}\right)^2} = \frac{ri}{(r-i)^2}}$$

3. (a) Le nombre X_r de pioches nécessaires à l'obtention des r boules se décompose en la somme du nombre de tirages nécessaires à l'obtention de n'importe laquelle (un seul suffit, c'est Y_1) à celui nécessaire à l'obtention d'une nouvelle boule différente de la première $(Y_2 - Y_1)$ puis à celui d'une troisième boule différente des premières obtenues $(Y_3 - Y_2)$ et ainsi de suite, ce qui se traduit formellement par la somme suivante :

$$\begin{aligned}
X_r &= Y_1 + (Y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_2) + \cdots + (Y_r - Y_{r-1}) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{r-1} (Y_{j+1} - Y_j)
\end{aligned}$$

Et en posant le changement d'indice $i = r - j$:

$$\boxed{X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \left(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}\right)}$$

La variable X_r admet une espérance et une variance en tant que **combinaison linéaire** de telles variables **indépendantes** (c'est intéressant pour la variance) avec par **linéarité de l'espérance** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X_r\right) &= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{V}\left(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}\right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{r - (r-i)} \\
&= \frac{r}{r} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(X_r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{r}{i}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X_r) &= \sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{V}(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}) \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{ri}{(r-(r-i))^2} \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r(r-i)}{i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r^2}{i^2} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{ri}{i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r^2}{i^2} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r^2}{i^2} + 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{i} - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r^2}{i^2} + \frac{r^2}{r^2} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{i} - \frac{r}{r}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{r}{i}}$$

(b) Nous avons vu à la question à la question **I.1.b** que la suite $(u_r)_{r\geq 1}$ converge. Donc il existe un réel α tel que $\lim_{r\to\infty} u_r = \alpha$ avec, rappelons-le, $u_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} - \ln(r) = \frac{\mathbf{E}(X_r)}{r} - \ln(r)$. Ainsi lorsque r tend vers l'infini,

$$\frac{\mathbf{E}(X_r)}{r} - \ln(r) = \alpha + o(1)$$

soit encore :

$$\mathbf{E}(X_r) = r\ln(r) + r\alpha + ro(1)$$

Enfin comme $ro(1) = r\varepsilon(r)$ avec $\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$ alors :

$$\boxed{\mathbf{E}(X_r) \underset{r\to\infty}{=} r\ln(r) + r\alpha + o(r)}$$

De même nous savons depuis la question **I.1.c** que la suite $\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}\right)_{r\geq 1}$ converge, donc il existe un réel β (non nul car la suite eststrictement croissante de premier terme non nul) tel que $\lim_{r\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} = \beta$ donc :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} \sim \beta$$

D'autre part $r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \underset{r\to\infty}{=} o\left(r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}\right)$ puisque $\lim_{r\to\infty} \frac{r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}}{r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}} = 0$, en effet $\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \sim \ln r$ donc $r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \sim r\ln r$ et $\frac{r\ln r}{r^2\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}} = \frac{\ln r}{r} \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}}$ tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Par conséquent par compatibilité de l'équivalence avec le produit :

$$\boxed{\mathbf{V}(X_r) \sim r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} \sim \beta r^2}$$

Partie III

1. (a) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$. L'évenement $A_{k,m}$ est réalisé si, et seulement si au cours des m premières pioches effectuées avec remise les numéros appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, r\} - \{k\}$. Ainsi comme les résultats ne proviennent que du seul hasard, Laplace[1] nous informe que :

$$\boxed{\mathbf{P}(A_{k,m}) = \frac{(r-1)^m}{r^m} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^m}$$

puisque Ω est l'ensemble des $m-$listes constituées d'éléments pris dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, r\}$. De même k numéros (qu'il faut considérer fixés notés $i_1, \ldots, i_k$) n'ont pas été piochés au cours des m premières pioches si, et seulement si au cours des m premières pioches effectuées avec remise les numéros appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, r\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$. Alors toujours selon Pierre-Simon la probabilité demandée vaut :

$$\boxed{\left(\frac{r-k}{r}\right)^m}$$

Au passage cette probabilité est celle de l'événement $A_{i_1,m} \cap \ldots \cap A_{i_k,m}$ pour k fixé dans $\{1, 2, \ldots, r\}$.

(b) L'événement $[X_r > m]$ est réalisé si, et seulement si au cours des m premières pioches, au moins l'un des r n'a pas été pioché. Ce qui se traduit formellement par :

$$[X_r > m] = \bigcup_{k=1}^{r} A_{k,m}$$

donc :

$$\boxed{\mathbf{P}([X_r > m]) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_{k,m}\right)}$$

L'union n'étant pas nécessairement disjointe.
Par la **formule du crible** on sait que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X_r > m]) &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} \mathbf{P}(A_{i_1,m} \cap \ldots \cap A_{i_k,m}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} \left(\frac{r-k}{r}\right)^m \\
&= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} 1
\end{aligned}$$

La somme $\sum\limits_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} 1$ est égale au nombre de **suites strictement croissantes** dont les termes sont à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, r\}$, soit $\binom{r}{k}$. Donc :

$$\boxed{\mathbf{P}([X_r > m]) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m}$$

2. (a) Pour $m \in \mathbf{N}^*$, on définit la propriété

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad \text{"}\mathbf{P}(D_1 \cup \ldots \cup D_m) \le \mathbf{P}(D_1) + \mathbf{P}(D_2) + \cdots + \mathbf{P}(D_m)\text{"}$$

- Comme $D_1 \cup \ldots \cup D_1 = D_1$ la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Supposons que pour m fixé dans $\mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ soit vraie. Soit $D_1, \ldots, D_{m+1}$ $m+1$ événements définis sur un même espace probabilisé, alors de la relation :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D_1 \cup \ldots \cup D_{m+1}) &= \mathbf{P}((D_1 \cup \ldots \cup D_m) \cup D_{m+1}) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) + \mathbf{P}(D_{m+1}) - \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) \cap D_{m+1}\right)
\end{aligned}$$

[1]Nombre de cas favorables divisé par le nombre total de cas.

on déduit que :

$$\mathbf{P}\left(D_1 \cup \ldots \cup D_{m+1}\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) + \mathbf{P}\left(D_{m+1}\right)$$

et selon l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbf{P}\left(D_1 \cup \ldots \cup D_{m+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left(D_k\right) + \mathbf{P}\left(D_{m+1}\right)$$

d'où :

$$\mathbf{P}\left(D_1 \cup \ldots \cup D_{m+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{m+1} \mathbf{P}\left(D_k\right)$$

et donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.
Ce raisonnement par récurrence standart prouve que $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
Remarque : c'est l'**inégalité de Boole**.

(b) La fonction exp étant **convexe** sur $\mathbb{R}$ sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier **au-dessus** de celle en d'équation $y = 1 + x$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x}$$

Enfin comme pour tout m non nul, $\mathbf{P}\left(A_{k,m}\right) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^m$ il vient par **croissance** de la fonction $t \mapsto t^m$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(1 - \tfrac{1}{r}\right)^m \leq \left(\exp\left(-\tfrac{1}{r}\right)\right)^m$$

soit par propriété élémentaire de la fonction exp :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\left(A_{k,m}\right) \leq \exp\left(-\frac{m}{r}\right)}$$

(c) Comme pour $\varepsilon > 0$, $M_r \leq (1+\varepsilon)\, r \ln(r)$ alors :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_r(\omega) > (1+\varepsilon)\, r \ln(r) \implies X_r(\omega) > M_r$$

donc :

$$\boxed{\left[X_r > (1+\varepsilon)\, r \ln(r)\right] \subset \left[X_r > M_r\right]}$$

Par croissance de la probabilité $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[X_r > (1+\varepsilon)\, r \ln(r)\right]\right) &\leq \mathbf{P}\left(\left[X_r > M_r\right]\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}\left(A_{k,M_r}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{r} \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right) \\
&\leq r \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right) \\
&\leq r \exp\left(-\frac{(1+\varepsilon)\, r \ln(r) - 1}{r}\right) \\
&\quad \text{selon la définition de la partie entière} \\
&\leq r \exp\left(-(1+\varepsilon) \ln(r) + \frac{1}{r}\right) \\
&\leq r \exp\left(-(1+\varepsilon) \ln(r)\right) \exp\left(\frac{1}{r}\right) \\
&\leq \frac{r}{r^{1+\varepsilon}} \exp\left(\frac{1}{r}\right) \\
&\leq r^{1-1-\varepsilon} \exp\left(\frac{1}{r}\right) \\
&\leq r^{-\varepsilon} \exp\left(\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

et comme $\exp\left(\frac{1}{r}\right) \leq e^1$ lorsque $r \geq 1$, moralité :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left([X_r > (1+\varepsilon)\, r \ln(r)]\right) \leq \frac{e}{r^{\varepsilon}}}$$

Comme $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{e}{r^{\varepsilon}} = 0$, le **théorème d'encadrement** nous donne :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{r\to\infty} \mathbf{P}\left([X_r > (1+\varepsilon)\, r \ln(r)]\right) = 0}$$

3. (a) Pour la justification il suffit de remarquer que la fonction $x \mapsto x\ln x + xt$ est strictement croissante et à valeurs dans $[0, +\infty[$ dès que $r \geq e^{-t} > 0$, il existe bien un rang $r_0(t)$ tel que :

$$\boxed{\forall r \geq r_0(t), \quad m_r \geq 1}$$

En outre pour chaque $r \geq r_0(t)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Z_r > t]) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X_r - r\ln(r)}{r} > t\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([X_r - r\ln(r) > rt]) \\ &= \mathbf{P}([X_r > rt + r\ln(r)]) \end{aligned}$$

Or la variable X_r ne prend que des **valeurs entières** donc :

$$\begin{aligned} [X_r > rt + r\ln(r)] &= [X_r \geq \lfloor rt + r\ln(r)\rfloor + 1] \\ &= [X_r \geq m_r + 1] \\ &= [X_r > m_r] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall r \geq r_0(t), \quad \mathbf{P}([Z_r > t]) = \mathbf{P}([X_r > m_r])}$$

(b) Soit k un entier naturel, lorsque r tend vers l'infini :

$$\ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \tag{9}$$

Or des inégalités :

$$m_r \leq r\ln(r) + rt < m_r + 1$$

on déduit aisément d'une part que :

$$r\ln(r) + rt - 1 < m_r \leq r\ln(r) + rt$$

et d'autre part que :

$$m_r = r\ln(r) + rt + o(r) \tag{10}$$

puisque l'écart entre $r\ln(r) + rt - 1$ et $r\ln(r) + rt$ est inférieur à 1 négligeable devant r lorsque r tend vers l'infini. Alors en combinant (9) et (10) on obtient lorsque r tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) &= (r\ln(r) + rt + o(r))\left(-\frac{k}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)\right) \\ &= -k\ln r - kt + \underbrace{o(r)\, o\left(\frac{1}{r}\right)}_{=o(1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) \underset{r\to\infty}{=} -k\ln r - kt + o(1)} \tag{11}$$

(c) Soit k un entier, nous avons :

$$\boxed{\binom{r}{k} = \frac{\overbrace{r(r-1)\times\cdots\times(r-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k!} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}} \tag{12}$$

Selon (11) :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r} &= \exp\left(-k\ln r - kt + o(1)\right)\\ &= \exp\left(-k\ln r\right)\exp\left(-kt\right)\exp\left(o(1)\right)\\ &= \frac{1}{r^k}\exp\left(-kt\right)\exp\left(o(1)\right)\\ &\sim \frac{\exp\left(-kt\right)}{r^k}\end{aligned} \tag{13}$$

Selon (12) et (13), par compatibilité de l'équivalence avec le produit :

$$\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}\frac{\exp\left(-kt\right)}{r^k} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{\exp\left(-kt\right)}{k!}$$

Donc :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad \lim_{r\to\infty}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp\left(-kt\right)}{k!}}$$

(d) Soit t un réel. Nous avons pour $r \geq r_0(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left([Z_r > t]\right) &= \mathbf{P}\left([X_r > m_r]\right)\\ &= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}\end{aligned}$$

et par **linéarité de la limite**, lorsque r tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\mathbf{P}\left([Z_r > t]\right) &= \lim_{r\to\infty}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\exp\left(-kt\right)}{k!}\end{aligned}$$

Enfin comme

$$\begin{aligned}1-\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\exp\left(-kt\right)}{k!} &= 1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k}\frac{\exp\left(-kt\right)}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k}\frac{\exp\left(-kt\right)}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-\exp\left(-t\right)\right)^k}{k!}\\ &= \exp\left(-\exp\left(-t\right)\right)\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad \lim_{r\to\infty}\mathbf{P}\left([Z_r \leq t]\right) = F_Z(t)}$$

$$\boxed{\text{La suite de variables aléatoires } \left(Z_r\right)_{r\geq 2} \text{ converge en loi vers } Z \text{ qui suit la loi de Gumbel}}$$

✠✠✠✠✠