



ANNALES  
OFFICIELLES  
2011

CONCOURS  
ECRICOME  
PREPA

**ÉPREUVE ÉCRITE**  
**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE**  
OPTION ÉCONOMIQUE

■ **Mathématiques**



**ECRICOME**  
VISER PLUS HAUT

[www.ecricome.org](http://www.ecricome.org)

## ■ Esprit général

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

## Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

## Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égales.

## Epreuve

*Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,*

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

## SUJET

### EXERCICE 1

On dit qu'une matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel  $k$  non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où  $0_n$  représente la matrice carrée nulle d'ordre  $n$ .

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , on dit que le couple  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de  $A$  lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N \Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de  $A$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de  $A$ .

(b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les produits  $\Delta X_1$ ,  $\Delta X_2$  et  $\Delta X_3$ .

(b) Justifier que la matrice  $\Delta$  est diagonalisable et déterminer une matrice  $P$  inversible telle que :  $P^{-1} \Delta P = D$ .

(c) Calculer  $P^{-1}$ .

4. (a) Etablir que  $N$  est une matrice nilpotente.

(b) Vérifier que  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de la matrice  $A$ .

(c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de  $A^n$  en fonction des puissances de  $\Delta$ , de  $N$  et de  $n$ .

(d) Etablir que : Pour tout entier naturel  $k \geq 1$ ,  $\Delta^k N = N$ .

(e) Proposer une décomposition de Dunford de  $A^n$ .

## EXERCICE 2

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction numérique  $f$  des variables réelles  $x$  et  $y$  définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \quad f(x, y) = xy + \ln(x) \ln(y).$$

### PARTIE I. Etude des zéros de $\varphi$ .

- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , ainsi que la limite de  $\frac{\varphi(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
- Prouver que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Justifier la dérivabilité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer sa fonction dérivée.
- Montrer que  $\varphi$  est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de  $\varphi$  au voisinage du point d'abscisse 0.
- Dresser le tableau de variations de  $\varphi$ .
- On rappelle que  $\ln(2) \simeq 0,7$ . Montrer l'existence d'un unique réel  $\alpha$  tel que :  $\varphi(\alpha) = 0$  et justifier que :  $\sqrt{2} < \alpha < 2$ .
- Etablir la convergence de l'intégrale  $I = \int_0^\alpha \varphi(x) dx$  et vérifier que :

$$I = \frac{\alpha(6 + \alpha^2)}{9}.$$

- On considère les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$a_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad b_0 = 2,$$

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si } \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \text{ alors } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si } \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \text{ alors } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

Ecrire un programme en Pascal calculant  $a_7$  et  $b_7$ .

**PARTIE II. Extrema de  $f$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .**

Rappelons que  $\alpha$  est l'unique réel vérifiant  $\varphi(\alpha) = 0$ .

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$  est l'unique point critique de  $f$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .
3. Calculer les dérivées partielles secondes sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et établir que pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 + \frac{1}{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$

4. La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum local sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  ? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

**EXERCICE 3****PARTIE I. Un jeu en ligne.**

La société Le hazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

|   | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | ★ |   |   |
| 2 | ★ |   |   |
| 3 |   | ★ |   |

On définit les événements  $H, V, D$  par :

- $H$  : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- $V$  : « les trois jetons sont alignés verticalement ».

- $D$  : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
  - $N$  « les trois jetons ne sont pas alignés ».
1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
  2. Déterminer les probabilités  $p(H), p(V), p(D)$  des événements  $H, V, D$ .
  3. En déduire que la probabilité de l'événement  $N$  est égale à :

$$p(N) = \frac{19}{21} \simeq 0,9048.$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
  - (a) Pour chaque entier naturel  $i$  non nul, on note  $Z_i$  le gain de la société à la  $i^{\text{e}}$  relance.  
Calculer l'espérance mathématique  $E(Z_i)$  de  $Z_i$ .
  - (b) Quel gain journalier  $Z$  la société peut-elle espérer ?

## PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
  - (a) Donner la loi de la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de parties gagnées.
  - (b) Indiquer l'espérance et la variance de  $X$ .
  - (c) Exprimer la perte  $T$  du joueur en fonction de  $X$ .
2. Quel est le nombre minimum  $n$  de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50 % ? (*On admettra que  $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$  et  $\ln(2) \simeq 0,7$* ).
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
  - (a) Donner la loi de la variable aléatoire  $Y$ .
  - (b) Indiquer l'espérance et la variance de  $Y$ .
  - (c) Pour tout entier naturel  $k$ , montrer que la probabilité  $p_k$  que le joueur joue au plus  $k$  parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k.$$

### PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case  $(A, 1)$ , les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note  $\Delta$  l'événement " la fonction aléatoire est dérégulée " et on pose  $p(\Delta) = x$  avec  $x \in ]0, 1[$ .

1. Calculer les probabilités conditionnelles  $p_{\Delta}(H)$ ,  $p_{\Delta}(V)$ , et  $p_{\Delta}(D)$  des événements  $H, V, D$  sachant l'événement  $\Delta$ .
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(\Delta, \bar{\Delta})$  pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à :

$$p(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.$$

3. Soit  $G$  la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de  $x$  pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de  $x$  que la fonction aléatoire ait été dérégulée ?

**CORRIGÉ****EXERCICE 1**

1. Un calcul direct montre que

$$N^2 = 0, \quad N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N = \Delta N, \quad \Delta + N = A$$

donc  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de  $A$ .

2. (a)  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si la matrice  $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$  n'est pas inversible c'est-à-dire si le système

$$\mathcal{S}_\lambda : \begin{cases} (3-\lambda)x + y - z = 0 \\ -2x - \lambda y + 2z = 0 \\ (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

admet des solutions non nulles. En utilisant l'opération élémentaire  $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$ , on obtient l'équivalence :

$$\mathcal{S}_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} y + (3-\lambda)x - z = 0 \\ (\lambda-1)(2-\lambda)x + (2-\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Il admet une solution non nulle si et seulement si

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ \text{ou} \\ (\lambda-1)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2\} \\ \text{ou} \\ 1 - \lambda = 0 \end{cases}$$

donc les valeurs propres de  $A$  forment l'ensemble  $\{1, 2\}$ .

- (b) Calculons la dimension de chaque espace propre :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Par conséquent, on a (car les deux premières colonnes de chacune des matrices ci-dessus sont colinéaires et les deux dernières ne sont pas colinéaires) donc

$$\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$$

ce qui démontre que la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

3. (a) Un calcul direct donne

$$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1, \quad \Delta X_2 = X_2, \quad \Delta X_3 = X_3$$

- (b) D'après la question précédente, la famille  $(X_1, X_2, X_3)$  est constituée de vecteurs pour la matrice  $\Delta$ . En outre, les vecteurs  $X_1$  et  $X_3$  sont clairement non colinéaires et le vecteur  $X_2$  ne peut être combinaison linéaire de  $X_1$  et  $X_3$  (considérer pour cela le troisième coefficient de ces vecteurs) donc la famille  $(X_1, X_2, X_3)$  est libre, elle est de cardinal 3 et  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  est de dimension 3 donc  $(X_1, X_2, X_3)$  est une base de  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Par conséquent, la famille  $(X_1, X_2, X_3)$  est une base de vecteurs propres de  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  pour la matrice  $\Delta$  ce qui démontre qu'elle est diagonalisable c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que :  $P^{-1}\Delta P = D$ . En outre, en considérant la matrice  $P$  de changement de base de la base canonique de  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  à la base  $(X_1, X_2, X_3)$  (constitué de vecteurs propres pour les valeurs propres 2, 1, 1), on peut affirmer que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

- (c) Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ -x - 2z = b \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2(1)+(2) \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} x = 2a + b \\ y = c \\ z = -a - b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. (a) Un calcul direct montre que  $N^2 = 0$  donc  $N$  est nilpotente.  
(b) Toujours par calcul direct on a :

$$N + \Delta = A, \quad N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N = \Delta N, \quad N^2 = 0$$

donc  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de la matrice  $A$ .

- (c) Puisque  $A = N + \Delta$  et que les matrices  $\Delta, N$  commutent, la formule du binôme de Newton s'applique ce qui montre que :

$$\begin{aligned} A^n &= (N + \Delta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0 \text{ si } k \geq 2} \Delta^{n-k} = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \end{aligned}$$

- (d) On procède par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$ , la question 4.b montre que  $\Delta^1 N = \Delta N = N$  donc l'initialisation est vérifiée. Pour l'hérédité, si  $\Delta^k N = N$  pour un certain entier  $k$ , on a :

$$\Delta^{k+1} N = \Delta \cdot \Delta^k N = \Delta \cdot N = N$$

ce qui démontre la propriété au rang  $k + 1$  donc l'hypothèse est vérifiée pour tout rang  $k \geq 1$ .

(e) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$A^n = \Delta^n + nN.$$

Puisque  $\Delta^n$  est diagonalisable car elle est semblable à la matrice diagonale  $D^n$  puisque :

$$\Delta^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}.$$

La matrice  $nN$  est nilpotente car  $(nN)^2 = n^2N^2 = n^20 = 0$  et les matrices  $\Delta^n$ ,  $nN$  commutent car :

$$\Delta^n (nN) = n\Delta^n N = nN = nN\Delta^n = (nN) \Delta^n$$

donc on peut affirmer que  $(\Delta^n, nN)$  est une décomposition de Dunford de  $A^n$ .

## EXERCICE 2

### PARTIE I. Etude des zéros de $\varphi$ .

- Déterminons la limite de lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , ainsi que la limite de  $\frac{\varphi(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - x \ln x = -\infty.$$

La courbe représentant  $\varphi$  admet une branche parabolique de direction l'axe des  $y$ .

- $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  en tant que somme et produit de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Le problème de continuité se situe en 0. Par prépondérance de la fonction puissance sur la fonction  $\ln$ ,

$$\lim_{0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2 \ln x) = 1 - 0 = \varphi(0).$$

$\varphi$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

- $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Sa fonction dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \varphi'(x) = -2x \ln x - x = -x(2 \ln x + 1).$$

- Montrons que  $\varphi$  est dérivable en 0.

$$\lim_{0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} -x \ln x = 0$$

La demi-tangente au point d'abscisse 0 est horizontale.

- D'où le tableau de variation de  $\varphi$ .

|            |   |            |                             |            |           |
|------------|---|------------|-----------------------------|------------|-----------|
| $x$        | 0 |            | $e^{-\frac{1}{2}}$          |            | $+\infty$ |
| $\varphi'$ |   | +          | 0                           | -          |           |
| $\varphi$  |   | $\nearrow$ | $\varphi(e^{-\frac{1}{2}})$ | $\searrow$ |           |
|            | 1 |            |                             |            | $-\infty$ |

6. On rappelle que  $\ln 2 \simeq 0,7$ . La restriction de  $\varphi$  à l'intervalle  $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$  réalise une bijection de  $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$  sur  $\left]-\infty, \varphi(e^{-\frac{1}{2}})\right]$ . Tout élément de  $\left]-\infty, \varphi(e^{-\frac{1}{2}})\right]$  possède un unique antécédent par  $\varphi$ .  
en particulier 0 possède un unique antécédent  $\alpha$  par  $\varphi$  c'est-à-dire que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, on a

$$\varphi(\sqrt{2}) = 1 - 2 \ln \sqrt{2} = 1 - \ln 2 > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(2) = 1 - 2 \ln 2 > 0$$

donc  $\sqrt{2} < \alpha < 2$ .

7. La fonction  $x \mapsto \varphi(x)$  est continue sur  $[0, \alpha]$  donc l'intégrale  $I$  existe.

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^\alpha \varphi(x) dx = \alpha - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\alpha x^2 \ln x dx \\ &= \alpha - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^3 \ln x}{3} \right]_\varepsilon^\alpha + \frac{1}{3} \int_\varepsilon^\alpha x^2 dx = \alpha - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_\varepsilon^\alpha \\ &= \alpha - \frac{\alpha^3 \ln \alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9} = \alpha - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9} = \frac{\alpha(6 + \alpha^2)}{9} \quad \text{car} \quad \ln \alpha = \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

8. function phi(x :real) :  
begin real; phi :=1-x\*x\*ln(x); end;  
var a,b : real; k : integer;  
a :=sqrt(2); b :=2;  
for k=1 to 7 do  
If phi(a)phi((a+b)/2) <0 then b :=(a+b)/2 else a :=(a+b)/2;  
writeln('a(7) =', a, 'b(7) =', b);  
end.

## PARTIE II. Extrema de $f$ sur $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

- La fonction  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  en tant que somme et produit de fonctions de classe  $C^2$  sur cet ouvert.
- Calculons les dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y + \frac{\ln y}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x + \frac{\ln x}{y} \end{aligned}$$

Les points candidats sont solutions du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + \frac{\ln y}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \frac{\ln x}{y} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} xy = -\ln y \\ xy = -\ln x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ x^2 + \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{\alpha} \\ x = y = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

Le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$  est l'unique point critique de  $f$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

3. Calculons les dérivées partielles secondes sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  Pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\ln y}{x^2} = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{\ln y}{y^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\ln x}{y^2} = -\left(\frac{x}{y}\right)^2 \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 + \frac{1}{xy} \end{cases}$$

4. Un calcul direct donne

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = (1 - \varphi(\alpha)) = 1 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = 1 + \alpha^2. \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = (1 - \varphi(\alpha)) = 1 \\ rt - s^2 = 1 - (1 + \alpha^2)^2 < 0 \end{cases}$$

donc  $f$  ne présente aucun extremum local sur l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et à fortiori aucun extremum global.

## EXERCICE 3

### PARTIE I. Un jeu en ligne.

1. Placer trois jetons c'est choisir trois cases parmi les neuf cases pour y déposer les jetons. Il ya donc

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = 84 \text{ distributions possibles des trois jetons dans les trois cases.}$$

2. Il y a trois façons de placer les trois jetons alignés horizontalement, trois façons de placer les trois jetons alignés verticalement, deux façons de placer les trois jetons alignés en diagonale. D'où les probabilités  $p(H), p(V), p(D)$  des événements  $H, V, D$ .

$$p(H) = p(V) = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}, \quad p(D) = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}.$$

- 3.

$$p(N) = 1 - p(\overline{N}) = 1 - p(H \cup V \cup D) = 1 - (p(H) + p(V) + p(D))$$

car les événements  $H, V$  et  $D$  sont incompatibles. Par conséquent, on obtient

$$p(N) = \frac{19}{84} \simeq 0,22619.$$

4. (a)

$$E(Z_i) = 2 \cdot \frac{19}{84} - 18 \cdot \frac{2}{84} = \frac{2}{21} \text{ euros.}$$

(b) La société peut espérer un gain égal à

$$\begin{aligned} E(Z_1 + \dots + Z_{10000}) &= E\left(\sum_{i=1}^{10000} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{10000} E(Z_i) \\ &= \sum_{i=1}^{10000} \frac{2}{21} = \frac{2}{21} \times 10000 = \frac{20000}{21} \simeq 952,38 \end{aligned}$$

euros par jour.

## PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

- (a) L'épreuve est la répétition de 100 épreuves de Bernoulli indépendantes. La loi de la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de parties gagnées suit une loi binomiale de paramètres :  
 $n = 100, p = \frac{2}{21}$ .

- (b) L'espérance et la variance de  $X$  valent :

$$E(X) = np = \frac{200}{21} \simeq 10 \text{ parties}, V(X) = np(1-p) = \frac{200 \cdot 19}{21^2} = \frac{3800}{441}.$$

- (c) Soit  $P$  la perte pour le joueur :

$$P = 18X - 2(100 - X) = 20X - 200.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(P) = 20(E(X) - 10) = 20\left(\frac{200}{21} - 10\right) = -\frac{200}{21} \simeq -10 \text{ Euros}.$$

2. Nombre de parties  $n$  au minimum qu'il devra jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% .

$$1 - P(X = 0) \geq 0.5 \iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq 0.5 \iff n \geq \frac{\ln 0.5}{\ln \frac{19}{21}} \simeq 7.$$

3. (a) La loi de la variable aléatoire  $Y$  est géométrique de paramètre  $p = \frac{2}{21}$ .  
 (b) Espérance et la variance de  $Y$ .

$$E(Y) = \frac{21}{2}, \quad V(Y) = \frac{19}{21} \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{19 \cdot 21}{4}.$$

- (c) Pour tout entier naturel  $k$ , calculons la probabilité  $p_k$  que le joueur joue au plus  $k$  parties avant de gagner pour la première fois :

$$p_k = \sum_{j=1}^k \frac{2}{21} \left(\frac{19}{21}\right)^{j-1} = \frac{2}{21} \frac{1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k}{1 - \frac{19}{21}} = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k.$$

## PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

1. Calculons des probabilités conditionnelles  $p_{\Delta}(H)$ ,  $p_{\Delta}(V)$ , et  $p_{\Delta}(D)$  des événements  $H, V, D$  sachant l'événement  $\Delta$ . Placer trois jetons sachant  $\Delta$  c'est choisir deux cases parmi les huit cases pour y déposer les jetons. Il ya donc  $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = 28$  distributions possibles. D'où :

$$p_{\Delta}(H) = p_{\Delta}(V) = p_{\Delta}(D) = \frac{1}{28}.$$

2. En utilisant la formule des probabilités totale avec le système complet d'événements  $(\Delta, \overline{\Delta})$ , on a :

$$p(N) = p_{\Delta}(N)p(\Delta) + p_{\overline{\Delta}}(N)p(\overline{\Delta})$$

$$p(N) = \frac{25}{28}x + \frac{19}{21}(1-x) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.$$

3.

$$E(G) = 2 \left( -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \right) - 18 \left( \frac{x}{84} + \frac{2}{21} \right) = -\frac{20x}{84} + \frac{2}{21} \geq 0 \iff \frac{2}{5} = \frac{4}{10} \geq x.$$

La valeur maximale de  $x$  pour que l'espérance de gain soit positive est de  $\frac{2}{5}$ .

4.

$$p_{\overline{N}}[\Delta] = \frac{p_{\Delta}[\overline{N}] p[\Delta]}{p(\overline{N})} = \frac{\frac{3x}{28}}{\frac{x}{84} + \frac{2}{21}} = \frac{9x}{x+8}.$$

## RAPPORT

### COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Le nombre de candidats abordant la question d'informatique est en hausse (un peu moins d'un candidat sur trois) et elle est un peu mieux réussie que les autres années. Rappelons que cette question est assez fortement valorisée au sein du barème de l'épreuve.

Avec une moyenne de 10,9 et un écart-type de 4,1, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

### COMMENTAIRES PARTICULIERS

#### EXERCICE 1

L'exercice a été plutôt bien réussi par une majorité des candidats.

Cependant, parmi les très nombreux candidats qui ont bien reconnu que  $X_1, X_2, X_3$  sont des vecteurs propres de  $\Delta$ , bien peu ont su s'en servir avec rigueur pour prouver que  $\Delta$  est diagonalisable; au point que, en moyenne, les maladroits qui ont recommencé la recherche des valeurs propres puis des sous-espaces propres, ont une meilleure note à la question 3 (mais se sont évidemment pénalisés par le temps qu'ils y ont nécessairement consacré). Rappelons qu'une matrice  $3 \times 3$  peut être diagonalisable sans posséder 3 valeurs propres distinctes.

La justification de l'existence et de l'inversibilité de  $P$  est en général confuse, voire absente.

La question ouverte qui termine l'exercice n'a été traitée que par les candidats qui comprennent ce qu'ils font et a donc bien permis de les valoriser.

#### EXERCICE 2

L'exercice d'analyse ne comportait que peu de difficultés et a été très discriminant.

Les limites sont assez mal justifiées (en invoquant souvent les croissances comparées à mauvais escient), la dérivabilité de  $\varphi$  en 0 est correctement menée en général mais l'interprétation graphique de la dérivabilité en 0 est rarement donnée. Le signe de la dérivée est mal ou pas étudié (beaucoup pense que  $\varphi'$  est négative sur  $\mathbb{R}_+$ ).

Peu de candidats prouvent l'existence de l'intégrale  $I$  par la continuité de  $\varphi$  sur  $[0, \alpha]$ . Le calcul d'intégrale est souvent mal conduit, en conservant généralement la borne 0 dans l'intégrale.

L'informatique est mieux traitée que les années passées : un tiers des candidats ont abordé cette question et plus du quart des candidats ont obtenu une note correcte à cette question.

Concernant la fonction de deux variables, l'unicité du point critique est plus souvent affirmée que justifiée. Le calcul de  $r, s, t$  est assez souvent mal conduit, et mal interprété.

### EXERCICE 3

L'exercice de probabilité est le moins bien traité.

Les formules de cours sont généralement connues mais mal utilisées. Les questions dont les réponses sont données ont encore donné lieu à des tentatives de « démonstration au bluff ». Rappelons une fois de plus que ceci est très mal vu et évidemment vain.

De nombreux candidats n'ont pas réussi à justifier les 84 positionnements possibles. Les bases du dénombrement : ordre / répétition (ou simultanété) ne sont pas souvent cités. Les probabilités de la deuxième question ont posé moins de problèmes mais la valeur de  $P(N)$  est souvent donnée sans justification complète. La variable  $Z_i$  est souvent mal comprise.

La partie 2 faisait apparaître deux lois classiques qui ont été abordées avec succès.

La partie 3, plus subtile, n'a été abordée et réussie que par peu de candidats y compris les calculs de probabilités de la question 1.