ANNALES OFFICIELLES 2012

CONCOURS ECRICOME PREPA

*ÉPREUVE **ÉCRITE***
ÉPREUVE **SPÉCIFIQUE**
OPTION SCIENTIFIQUE

Mathématiques

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier ches les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Deux exercices d'application des connaissances de base ;
un problème faisant largement appel aux possiblités.

Évaluation

Deux exercices de valeurs sensiblement égale ;
12 à 14 points pour le problème.

Épreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1.

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.
2. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$ puis que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Etablir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y - x}{2}$.
4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0, 1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geqslant 0}$.
   (b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.

   A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.
7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :
   $$|f(x + h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}.$$
   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$
8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = xf(x)$. Justifier que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1 + x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1 + x).$$

EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- I_n la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $W \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.

On admettra que si U, V sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ commutent alors :
- U^k et V^q commutent pour tous entiers k et q;
- U^{-1} commute avec V lorsque U est inversible.

1. Deux résultats préliminaires.

   (a) Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $U^q = 0_n$.

   Prouver que $I_n - U$ est inversible et que $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$.

   (b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.

   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \ker(f)$ et $f(x) \in \ker(f - \mathrm{Id})$ puis établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Etude d'une suite de matrices. Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$

   On introduit la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B_0 = B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = (B_k)^2 (2B_k - I_n)^{-1}.$$

   On considère pour tout entier $k \geqslant 0$ la proposition

> $(\mathcal{H}_k)$: « $2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $B_k - B = [B(B - I_n)]\, C_k$, et $B_k(B_k - I_n) = [B(B - I_n)]^{2^k} D_k$ avec $B_k B = B B_k$, $C_k B = B C_k$ et $D_k B = B D_k$ »

   (a) Justifier que $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente et que $2B - I_n$ est inversible. En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

   (b) On suppose la propriété $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un entier $k \geqslant 0$. Montrer que :

$$\begin{aligned} 2B_{k+1} - I_n &= [I_n + 2B_k(B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1} - B &= \left[(B_k - B)^2 - (B^2 - B)\right] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1}(B_{k+1} - I) &= \left[B_k(B_k - I_n)(2B_k - I)^{-1}\right]^2 \end{aligned}$$

   En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

(c) Prouver l'existence d'un entier p tel que : $B_p\left(B_p - I_n\right) = 0_n$.

Etablir que la matrice B_p est diagonalisable, que la matrice $B - B_p$ est nilpotente et que : $\forall k \geqslant p, \quad B_{k+1} = B_k$.

PROBLEME.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Etude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Pour tout entier $k \in \{0, 1, .., n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$e_k = X^k$$

Rappelons que $(e_0, e_1, .., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \text{ et } f(P)(1) = P(1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = \left[(X-1)P\right]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\ker(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Ecrire la matrice A de f dans la base $(e_0, e_1, .., e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Montrer que f et g sont diagonalisables.

Partie II : Etude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_n$ et on suppose que $\forall i \in \{0, .., n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, .., i$. On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.
- Plus généralement, pour tout entier k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

- Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage. **On convient que $Z_0 = n$.**
- F_k est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, x^r$.
- $E(Z_k)$ l'espérance de la variable Z_k.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, ..., n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

2. Etablir les deux formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, .., n-1\}$

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : (n+1)\, P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : (r+1)\, P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

3. On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, .., n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.

   En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.

   En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)\, F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Etablir que $F_k'(1) = E(Z_k)$ et $F_k''(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.
   (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F_k'(1))_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F_k''(1))_{k\in\mathbb{N}}$.
   (c) Donner la valeur de $F_k'(1)$ et de $F_k''(1)$ en fonction de k et n. Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties **I** et **II** et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question **II.4** la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, .., n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$u_k = (X-1)^k.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, e_r = F_k = f^k(e_n)$.
2. Prouver que $(u_0, u_1, .., u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, .., n\}$. Retrouver ainsi que f est diagonalisable.
4. Justifier que : $e_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$ et que : $\forall r \in \{0, 1, .., n\}, \quad u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$.
5. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r$.
6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, .., n\}$. A l'aide des questions précédentes, établir que :
$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$
7. Application.
   (a) Soit $j \in \{0, 1, .., n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, .., n\}$.

(b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \dfrac{C_n}{2^k}$.

La série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?

CORRIGÉ

EXERCICE 1.

1. La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^x e^{-at}dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^x = \frac{1-e^{-ax}}{a} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{a}$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{a}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{x+e^t} \leqslant \dfrac{1}{e^t} = e^{-t}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ étant convergente, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}$ converge également.

2. La première inégalité résulte du fait suivant : $x + e^t - 2\sqrt{xe^t} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{e^t}\right)^2 \geqslant 0$. On en déduit pour tout réel $t \geqslant 0$ que :

$$0 \leqslant \frac{1}{x+e^t} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{xe^t}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-t/2} \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt = \frac{I_{1/2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right)dt = \int_0^{+\infty}\frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}dt = (y-x)\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+e^t)(y+e^t)}$$

et pour tout réel $t \geqslant 0$, on peut écrire

$$0 < \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leqslant \frac{1}{e^t \times e^t} = e^{-2t} \Rightarrow 0 < f(x) - f(y) \leqslant (y-x)\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{y-x}{2}.$$

4. Si $y > x$ alors l'encadrement précédent montre que

$$f(x) - f(y) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

c'est-à-dire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|y-x|}{2}$$

En effet, si $x < y$ alors $f(x) - f(y) > 0$ donc $|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y)$ et $x - y < 0$ donc $|x-y| = y - x$ et si $x > y$ alors $f(x) - f(y) < 0$ donc $|f(x) - f(y)| = f(y) - f(x)$ et $x - y > 0$

donc $|x-y| = x-y$. Par conséquent, si $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $y \to x_0$ alors $\dfrac{|x_0-y|}{2} \underset{y\to x_0}{\to} 0$ donc l'encadrement précédent permet d'appliquer le théorème d'encadrement d'où

$$f(x_0) - f(y) \underset{y\to x_0}{\to} 0 \Leftrightarrow f(y) \underset{y\to x_0}{\to} f(x_0).$$

Ceci justifie la continuité de f en x_0 quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ c'est-à-dire f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] =]0,1]$. En effet, on a $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et l'encadrement $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ combiné au fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et au théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. La fonction $g : x \mapsto x - f(x) = x + (-f(x))$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme de deux telles fonctions) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) = \left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-1,+\infty[$ (car f tend vers 0 en $+\infty$ et $x \to +\infty$). Comme $0 \in [-1,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On conclut en remarquant que $\alpha = f(\alpha) \in f(\mathbb{R}_+) =]0,1]$.

6. (a) Pour tout entier n, on considère l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: « $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ ».

Initialisation $n = 0$. $\alpha - u_0 = \alpha - 0 = \alpha \in]0,1]$ donc $0 < \alpha - u_0 \leqslant 1 = \dfrac{1}{2^0}$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un certain entier n. D'après la justification de la question 4, on a :

$$|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)| \leqslant \frac{|\alpha - u_n|}{2} \leqslant \frac{1}{2}.\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Etant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}$, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha - u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

(b)
```
function SUITE(e : real) : real;
var u,v : real;
begin
u:=0; v:=1:
while v>e do begin u:=ECRICOME(u); v:=v/2; end;
SUITE:=u; writeln(SUITE); end.
```

7. En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$f(x+h) - f(x) + hg(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(x+e^t)^2 - (x+h+e^t)(x+e^t) + h(x+h+e^t)}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} dt$$

puis en utilisant l'inégalité triangulaire, on aboutit à

$$|f(x+h)-f(x)+hg(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \right| dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{e^t * (e^t)^2} dt = h^2 \int_0^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{h^2}{3}$$

Autrement dit, on a démontré que :

$$f(x+h)-f(x)-hg(x) \underset{h\to 0}{=} O\left(h^2\right) \underset{h\to 0}{=} o(h) \Leftrightarrow f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x)-hg(x)+o(h)$$

c'est-à-dire que f admet un DL_1 en $x>0$ donc f est dérivable en x et $f'(x)=-g(x) \quad \forall x>0$.

8. La fonction T est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme produit de deux telles fonctions) et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) &= f(x)+xf'(x) = f(x)-xg(x) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{x}{(x+e^t)^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{x+e^t-x}{(x+e^t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{x+e^t} \right)' dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} \left(-\frac{1}{x+e^t} \right)' dt = \lim_{T\to+\infty} \left(\frac{1}{x+e^0} - \frac{1}{x+e^T} \right) \\
&= \frac{1}{x+1} = (\ln(1+x))'
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x)+C$. En faisant tendre x vers 0^+ et en utilisant la continuité de f en 0, on obtient

$$0f(0) = \ln(1)+C \Leftrightarrow C=0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

EXERCICE 2.

1. (a) Un calcul direct montre que :

$$(I_n-U)\left(\sum_{k=0}^{q-1} U^k\right) = \sum_{k=0}^{q-1} \left(U^k-U^{k+1}\right) \underset{\text{télescopique}}{\overset{\text{somme}}{=}} U^0-U^q = I_n$$

donc I_n-U est inversible et $(I_n-U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$.

(b) Etant donné que $A(A-I_n)=0_n$, on peut affirmer que $f\circ(f-\mathrm{Id})=0 \Leftrightarrow f^2-f=0$ donc on a

$$\begin{aligned}
f(x-f(x)) &= f(x)-f^2(x) = \left(f-f^2\right)(x) = 0 \Rightarrow x-f(x) \in \ker(f) \\
(f-\mathrm{Id})(f(x)) &= f^2(x)-f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in \ker(f-\mathrm{Id}).
\end{aligned}$$

Ainsi le vecteur x s'écrit

$$x = (x-f(x))+f(x) \in \ker(f)+\ker(f-\mathrm{Id})$$

ce qui démontre que $\mathbb{R}^n \subset \ker(f) + \ker(f - \mathrm{Id})$. Comme $\ker(f)$ et $\ker(f - \mathrm{Id})$ sont deux sous-espaces vectoriels de E, on peut aussi affirmer que $\ker(f) + \ker(f - \mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}^n$ donc $\mathbb{R}^n = \ker(f) + \ker(f - \mathrm{Id})$. En outre, si

$$x \in \ker(f) \cap \ker(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x) = 0 \\ (f - \mathrm{Id})(x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x) = 0 \\ f(x) - x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = f(x) = 0$$

donc $\ker(f) \cap \ker(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$ ce qui démontre que

$$\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}) = E_0(f) \oplus E_1(f)$$

ce qui est l'une des caractérisations de la diagonalisabilité donc f est diagonalisable.

2. (a) Comme I_n commute avec $2B$, on a

$$\begin{array}{c} I_n - (2B - I_n)^2 = I_n - \left(4B^2 - 4B + I_n\right) = -4B(B - I_n) \\ \Rightarrow \left(I_n - (2B - I_n)^2\right)^N = (-4)^N (B(B - I_n))^N = 0 \end{array}$$

Comme $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente, on en déduit que la matrice $I_n - \left(I_n - (2B - I_n)^2\right) = (2B - I_n)^2$ est inversible c'est-à-dire qu'il existe une matrice A telle que

$$(2B - I_n)^2 A = I_n \Leftrightarrow (2B - I_n)[(2B - I_n) A] = I_n$$

donc la matrice $2B - I_n$ est inversible.
Justifions maintenant $(\mathcal{H}_0)$. On a : $2B_0 - I_n = 2B - I_n$ inversible et

$$\begin{array}{rcl} B_0 - B & = & B - B = 0_n = [B(B - I_n)] C_0 \\ B_0(B_0 - I_n) & = & B(B - I_n) = [B(B - I_0)]^{2^0} D_0 \end{array}$$

si l'on pose $C_0 = 0_n$ et $D_0 = I_n$. En outre, on a

$$B_0 B = BB = BB_0, \quad C_0 B = 0_n B = 0_n = B0_n = BC_0, \quad D_0 B = I_n B = BI_n = BD_0$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_0)$.

(b) A l'aide de la commutation de B_k avec B, un calcul direct nous donne

$$\begin{array}{c} (2B_{k+1} - I_n)(2B_k - I_n) = 2B_{k+1}(2B_k - I_n) - (2B_k - I_n) \\ = 2(B_k)^2 - 2B_k + I_n = I_n + 2B_k(B_k - I_n) \\ \Rightarrow 2B_{k+1} - I_n = [I_n + 2B_k(B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ (B_{k+1} - B)(2B_k - I_n) = B_{k+1}(2B_k - I_n) - B(2B_k - I_n) \\ = B_k^2 - 2BB_k + B = \underset{B, B_k \text{ commutent}}{=} (B_k - B)^2 - B^2 + B \\ \Rightarrow B_{k+1} - B = \left[(B_k - B)^2 - \left(B^2 - B\right)\right] \times [2B_k - I_n]^{-1} \end{array}$$

Pour finir, on a

$$\begin{array}{c} B_{k+1}(B_{k+1} - I)(2B_k - I_n)^2 = B_{k+1}(2B_k - I_n)(B_{k+1}(2B_k - I_n) - (2B_k - I_n)) \\ = B_k^2\left(B_k^2 - 2B_k + I_n\right) = B_k^2(B_k - I_n)^2 = [B_k(B_k - I_n)]^2 \end{array}$$

ce qui permet de conclure en multipliant par $\left[(2B_k - I_n)^2\right]^{-1}$. D'autre part, il existe C_k et D_k commutant avec B telles que

$$\begin{aligned}
B_{k+1} - B &= \left[(B_k - B)^2 - \left(B^2 - B\right)\right] \times \left[2B_k - I_n\right]^{-1} \\
&= \left[\left(\left[B\left(B - I_n\right)\right] C_k\right)^2 - B\left(B - I_n\right)\right] \left[2B_k - I_n\right]^{-1} \\
&= \left[\left[B\left(B - I_n\right)\right]^2 C_k^2 - B\left(B - I_n\right)\right] \left[2B_k - I_n\right]^{-1} \\
&= B\left(B - I_n\right)\left[B\left(B - I_n\right) C_k^2 - I_n\right] \left[2B_k - I_n\right]^{-1} \\
B_{k+1}\left(B_{k+1} - I_n\right) &= \left[B_k\left(B_k - I_n\right)\left(2B_k - I_n\right)^{-1}\right]^2 = \left[\left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^k} D_k \left(2B_k - I_n\right)^{-1}\right]^2 \\
&= \left(\left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^k}\right)^2 \left[D_k\left(2B_k - I_n\right)^{-1}\right]^2 \\
&= \left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^{k+1}} \left[D_k\left(2B_k - I_n\right)^{-1}\right]^2
\end{aligned}$$

On pose alors

$$C_{k+1} = B\left(B - I_n\right) C_k^2 - I_n, \quad D_{k+1} = \left[D_k\left(2B_k - I_n\right)^{-1}\right]^2.$$

La matrice $2B_k\left(B_k - I_n\right)$ est nilpotente donc la matrice $I_n + 2B_k\left(B_k - I_n\right)$ est inversible. En outre, la matrice $\left(2B_k - I_n\right)^{-1}$ est inversible donc la matrice $2B_{k+1} - I_n$ l'est aussi (produit de ces deux matrices inversibles). Il est ensuite aisé de vérifier les commutations demandées ce qui justifie $\left(\mathcal{H}_{k+1}\right)$.

(c) Puisque $2^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, il existe un entier p tel que $\forall n \geqslant p, \quad 2^n \geqslant N$ et l'on a :

$$\begin{aligned}
B_p\left(B_p - I_n\right) &= \left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^p} D_p = \left[B\left(B - I_n\right)\right]^N \left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^p - N} D_p \\
&= 0\left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^p - N} D_p = 0 \\
\left(B - B_p\right)^N &= \left(-\left[B\left(B - I_n\right)\right] C_p\right)^N = \left[B\left(B - I_n\right)\right]^N \left(-C_p\right)^N = 0\left(-C_p\right)^N = 0
\end{aligned}$$

donc d'après la question 1.b, la matrice B_p est diagonalisable et la matrice $B - B_p$ est clairement nilpotente. En outre, pour tout $k \geqslant p$:

$$\begin{aligned}
B_k\left(B_k - I_n\right) &= \left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^k} D_k = \left[B\left(B - I_n\right)\right]^N \left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^k - N} D_k \\
&= 0\left[B\left(B - I_n\right)\right]^{2^k - N} D_k = 0 \Rightarrow B_k^2 = B_k \\
\left(2B_k - I_n\right)^2 &= 4B_k^2 - 4B_k + I_n = 4B_k\left(B_k - I_n\right) + I_n = I_n \\
\left(2B_k - I_n\right)^{-1} &= 2B_k - I_n \Rightarrow B_{k+1} = B_k^2\left(2B_k - I_n\right)^{-1} = B_k^2\left(2B_k - I_n\right) \\
&= B_k\left(2B_k - I_n\right) = 2B_k^2 - B_k = 2B_k - B_k = B_k
\end{aligned}$$

donc la suite $\left(B_k\right)_{k\geqslant N}$ est constante ce qui démontre que $\forall k \geqslant N, \quad B_{k+1} = B_N$.

PROBLEME.

Partie I.

1. L'ensemble des polynômes étant stable par somme, produit et dérivation, on en déduit que $g(P)$ est un polynôme quand P est un polynôme. En outre, on a

$$\deg\left(g(P)\right) \leqslant \max\left(\deg\left(\left(X - 1\right)P'\right), \deg\left(P\right)\right) \leqslant \max\left(\deg\left(P\right), \deg\left(P\right)\right) = \deg\left(P\right) \leqslant n$$

donc $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. La dérivation étant linéaire et l'application $Q \mapsto \left(X - 1\right)Q$ aussi, on en déduit que g est linéaire (par composition) donc g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout réel $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} f(g(P))(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x \left[(X-1)\,P\right]'(t)dt = \frac{1}{x-1}\left[(t-1)\,P(t)\right]_1^x \\ &= \frac{1}{x-1}(x-1)P(x) = P(x) \\ f(g(P))(1) &= g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1) \end{aligned}$$

donc $f(g(P)) = P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \ker(g)$ alors

$$g(P) = 0 \Rightarrow f(g(P)) = f(0) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \Rightarrow \ker(g) = \{0\}.$$

3. g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension et $\ker(g) = \{0\}$ donc g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur lui-même et sa réciproque g^{-1} est également un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur lui-même. En outre, on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad g(P) = Q \Rightarrow f(g(P)) = f(Q) \Leftrightarrow P = f(Q)$$

donc $g^{-1} = f$ ce qui démontre que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur lui-même. En particulier, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} g(e_k) &= (k+1)e_k - ke_{k-1}, \quad \forall x \neq 1, \quad f(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{x^{k+1}-1}{x-1} \\ &= \frac{1}{k+1}\left(1 + x + \cdots + x^k\right), \quad f(e_k)(1) = 1 = \frac{1}{k+1}(1+1+\cdots+1^k) \\ &\Rightarrow f(e_k) = \frac{1}{k+1}(e_0 + e_1 + \cdots + e_k) \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_0) & f(e_1) & f(e_2) & f(e_k) & f(e_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & \cdots & 1/(k+1) & \cdots & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1/3 & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/(k+1) & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & 1/(k+1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 1/(n+1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 1/(n+1) \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \\ e_{k-1} \\ e_k \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{matrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} g(e_0) & g(e_1) & g(e_2) & g(e_k) & g(e_n) & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -k & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & k+1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & n+1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \\ e_{k-1} \\ e_k \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}$$

5. La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ceux-ci étant deux à deux distincts, on en déduit que A est diagonalisable (elle possède $n+1$ valeurs propres distinctes et elle est de taille $n+1$). L'argument est le même pour B.

Partie II.

1. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z_k = i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, on a :

$$P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=0}^{n} P((Z_{k+1} = r) \cap (Z_k = i))$$

L'événement $(Z_{k+1} = r) \cap (Z_k = i)$ est impossible lorsque $i < r$. En effet, au k-ième tirage, on pioche le numéro $i < r$ donc on doit effectuer le tirage suivant dans l'urne U_i dont tous les numéros sont $\leqslant i < r$ donc on ne peut piocher la boule numéro r au tirage suivant $(Z_{k+1} = r)$. Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = r) &= \sum_{i=r}^{n} P((Z_{k+1} = r) \cap (Z_k = i)) = \sum_{i=r}^{n} P(Z_k = i)\, P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) \\ &= \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} \end{aligned}$$

En effet, la probabilité $P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r)$ signifie que l'on a pioché la boule numéro i (donc on pioche au tirage suivant dans l'urne U_i contenant $i+1$ boules) et que l'on calcule la probabilité d'obtenir la boule numéro r (U_i n'en contient qu'une seule boule ayant ce numéro) donc cette probabilité vaut $\dfrac{1}{i+1}$.

2. On choisit $r = n$ dans la formule précédente donc

$$P(Z_{k+1} = n) = \sum_{i=n}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} = \frac{P(Z_k = n)}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n)$$

La formule de question 1 montre en outre que

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = r) &= \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} = \frac{P(Z_k = r)}{r+1} + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} \\ P(Z_{k+1} = r+1) &= \sum_{i=r+1}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} \end{aligned}$$

En retranchant ces deux égalités, on obtient

$$P(Z_{k+1}=r)-P(Z_{k+1}=r+1)=\frac{P(Z_k=r)}{r+1}$$
$$\Leftrightarrow (r+1)P(Z_{k+1}=r)-(r+1)P(Z_{k+1}=r+1)=P(Z_k=r)$$

3. En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k\in\mathbb{N}$, on obtient :

$$(n+1)(S_n-P(Z_0=n))=S_n\Leftrightarrow (n+1)(S_n-1)=S_n\Leftrightarrow S_n=1+\frac{1}{n}$$

En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k\in\mathbb{N}$ lorsque $r+1<n$ et compte-tenu que $P(Z_0=r)=0,\quad P(Z_0=r+1)=0$, on obtient :

$$(r+1)(S_r-P(Z_0=r))-(r+1)(S_{r+1}-P(Z_0=r+1))=S_r\Leftrightarrow rS_r=(r+1)S_{r+1}$$

(donc la suite $(rS_r)_{1\leqslant r\leqslant n-1}$ est constante). Si $r+1=n\Leftrightarrow r=n-1$, on en déduit

$$n(S_{n-1}-P(Z_0=n-1))-n(S_n-P(Z_0=n))=S_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow nS_{n-1}-n(S_n-1)=S_{n-1}\Leftrightarrow (n-1)S_{n-1}=1\Leftrightarrow S_{n-1}=\frac{1}{n-1}$$

4. Un calcul direct donne

$$(x-1)\sum_{r=0}^{n}P(Z_{k+1}=r)\,rx^{r-1}+\sum_{r=0}^{n}P(Z_{k+1}=r)\,x^r=\sum_{r=0}^{n}(r+1)P(Z_{k+1}=r)\,x^r$$
$$-\sum_{r=1}^{n}r(Z_{k+1}=r)\,x^{r-1}=\sum_{r=0}^{n}(r+1)P(Z_{k+1}=r)\,x^r-\sum_{r=0}^{n-1}(r+1)(Z_{k+1}=r+1)\,x^r$$
$$=(n+1)P(Z_{k+1}=n)\,x^n+\sum_{r=0}^{n-1}P(Z_k=r)\,x^r=P(Z_k=n)\,x^n+\sum_{r=0}^{n-1}P(Z_k=r)\,x^r=F_k(x)$$

5. (a) Il est immédiat que

$$F_k'(x)=\sum_{r=0}^{n}P(Z_k=r)\,rx^{r-1}\Rightarrow F_k'(1)=\sum_{r=0}^{n}rP(Z_k=r)=E(Z_k)$$
$$F_k''(x)=\sum_{r=0}^{n}P(Z_k=r)\,r(r-1)x^{r-2}\Rightarrow F_k''(1)=\sum_{r=0}^{n}r(r-1)P(Z_k=r)=E(Z_k(Z_k-1))$$

grace au théorème du transfert.

(b) En suivant l'indication de l'énoncé, on obtient

$$F_{k+1}'(1)+F_{k+1}'(1)=F_k'(1)\Leftrightarrow F_{k+1}'(1)=\frac{1}{2}F_k'(1)$$
$$2F_{k+1}''(1)+F_{k+1}''(1)=F_k''(1)\Leftrightarrow F_{k+1}''(1)=\frac{1}{3}F_k''(1).$$

(c) Les deux suites considérées sont géométriques de raison respective $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ donc pour tout entier k, on a :

$$F_k'(1)=\frac{1}{2^k}F_0'(1)=\frac{n}{2^k}.\quad F_k''(1)=\frac{F_0''(1)}{3^k}=\frac{n(n-1)}{3^k},$$
$$V(Z_k)=E(Z_k^2)-(E(Z_k))^2=E(Z_k(Z_k-1))+E(Z_k)-(E(Z_k))^2$$
$$=F_k''(1)+F_k'(1)-(F_k'(1))^2=\frac{n(n-1)}{3^k}+\frac{n}{2^k}-\frac{n^2}{4^k}.$$

Partie III.

1. Par définition de F_k, la première égalité demandée est vraie. Ensuite, l'application g étant bijective de réciproque f, on a
$$g(F_{k+1}) = F_k \Leftrightarrow F_{k+1} = g^{-1}(F_k) = f(F_k)$$
Une récurrence immédiate montre que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad F_k = f^k(F_0)$. Etant donné que $F_0 = P(Z_0 = n)\, x^n = e_n$, on peut affirmer que $F_k = f^k(e_n)$.

2. Il s'agit d'une famille de polynômes échelonnées en degré donc elle est libre. En outre, elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ et incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc on peut affirmer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Si $x \neq 1$ alors
$$f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)^r\, dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_{t=1}^{t=x} = \frac{(x-1)^r}{r+1} = \frac{u_r(x)}{r+1}$$
et si $x = 1$ alors $f(u_r)(1) = u_r(1) = 0 = \dfrac{u_r(1)}{r+1}$ donc $f(u_r) = \dfrac{u_r}{r+1}$. Autrement dit, chaque u_r est un vecteur propre de f et la famille $(u_r)_{0\leqslant r\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc f est diagonalisable.

4. Pour tout réel x, la formule du binôme de Newton nous donne
$$\begin{aligned} e_n(x) &= x^n = ((x-1)+1)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(x-1)^r = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r(x) \\ u_r(x) &= (x-1)^r = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}x^j(-1)^{r-j} = \sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e_j(x). \end{aligned}$$

5. Etant donné que $f(u_r) = \dfrac{u_r}{r+1}$, une récurrence immédiate montre que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(u_r) = \dfrac{u_r}{(r+1)^k}$.
En utilisant la linéarité de f^k, on a
$$f^k(e_n) = f^k\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r\right) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^k(u_r) = \sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}u_r.$$

6. En appliquant les relations précédentes, on a :
$$\begin{aligned} F_k &= f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}u_r = \sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e_j \\ &= \sum_{\substack{(r,j)\in\{0,..n\}^2 \\ \text{avec } j\leqslant r}}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e_j \text{ (Fubini)} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{r=j}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e_j \text{ (Fubini)} \\ &= \sum_{j=0}^{n}e_j\sum_{r=j}^{n}\frac{(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \end{aligned}$$

Etant donné que $F_k = \sum_{k=0}^{n} P(Z_k = j)\, e_j$, l'unicité des coefficients (car $(e_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base) montre que $P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \dfrac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}$.

7. (a) D'après la question précédente et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier k et tout $j \in \{0, .., n\}$:

$$0 \leqslant P(Z_k = j) = |P(Z_k = j)| \leqslant \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \underset{r\geqslant j}{\leqslant} \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k} = \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

si on pose $M_{n,j} = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}$. Si $j \geqslant 1$ alors $\forall k \geqslant 0$, $|P(Z_k = j)| \leqslant \dfrac{M_{n,j}}{2^k}$. La série $\sum_k \dfrac{M_{n,j}}{2^k} = M_{n,j} \sum_k \dfrac{1}{2^k}$ étant convergente (série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$), on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, .., n\}$.

(b) Si $j = 0$ alors

$$P(Z_k = 0) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{0}}{(r+1)^k} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}$$

$$\Rightarrow |P(Z_k = 0) - 1| = \left| \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right| \leqslant \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \leqslant \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{2^k} = \frac{C_n}{2^k}$$

avec $C_n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}$. La suite $\left(\dfrac{C_n}{2^k}\right)_{k\geqslant 0}$ convergeant vers 0, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{k\to+\infty} (P(Z_k = 0) - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} P(Z_k = 0) = 1$$

donc la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = 0)$ diverge grossièrement.

RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve.

Avec une moyenne de 10,2 et un écart-type de 5,5, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Question globalement bien traitée.
2. La première inégalité est souvent établie. La majoration de $f(x)$ fut plus sélective car un nombre significatif de candidats bloque sur le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{xe^t}}$, la convergence des intégrales considérées étant relativement peu mentionnée.
3. Si la minoration de $f(x) - f(y)$ est assez réussie, sa majoration l'est beaucoup moins. Bon nombre de candidats cherchent à utiliser pour cela la majoration de $f(x)$ établie à la question 2.
4. Le théorème de la bijection est souvent cité sans parler de continuité et lorsqu'elle l'est, l'argument est souvent « f est continue car $x \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ est continue ». Quant à la monotonie, elle est souvent justifiée de façon incorrecte par le calcul de f' (via la dérivation sous le symbole intégral).

5. La plupart des candidats justifie l'existence et l'unicité du point fixe par la bijectivité de f. Peu de candidats sont en mesure d'introduire la bonne fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
6. (a) La valeur absolue fut souvent négligée.
   (b) Cette question fut relativement peu traitée par les candidats. Généralement, ceux qui l'abordent ne répondent que partiellement à la question (le calcul de N ou bien, N étant fixé, le calcul de u_N).
7. Une part importante de candidats se ramène à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}$. La majoration de cette celle-ci nécessitant un peu de finesse fut plus sélective.
8. On parle souvent de « la » primitive de $\dfrac{1}{x+1}$. La question de la constante d'intégration est rarement soulevée.

EXERCICE 2

1. (a) q1.a. Elle est souvent réussie en exploitant la réponse donnée par l'énoncé.
   (b) Elle est bien traitée.
2. (a) La première affirmation est correctement traitée, l'inversibilité de $(2B - I_n)^2$ est justifiée mais l'inversibilité de $2B - I_n$ n'est établie que par une faible part des candidats. Rares sont les candidats cherchant les valeurs de C_0 et D_0.
   (b) Il n'est presque jamais question des matrices qui commutent.
   (c) Elle a été peu abordée et rarement achevée.

PROBLEME

PARTIE I

1. Correctement menée.
2. Après avoir montrer que $(f \circ g)(P)(x) = x$ pour $x \neq 1$, la plupart des candidats affirme que $f \circ g = \mathrm{Id}$.
3. Contre toute attente, la preuve de l'isomorphisme fut sélective (notamment concernant les dimensions) ainsi que l'égalité $g^{-1} = f$. Une minorité de candidats justifie sans calcul que f est un endomorphisme, la plupart justifie directement que f est linéaire en revenant aux définitions. Bien entendu, ils mentionnent rarement le degré de $f(P)$ et quasiment aucun ne vérifie que $f(P)$ est bien un polynôme.
4. De très grandes difficultés pour cette question classique.Si la matrice B est obtenue par une fraction importante des candidats, bien peu son en mesure de proposer la matrice A (très souvent, les coefficients de celle-ci dépendent de x).

5. Dans un nombre important de copies, il a confusion entre diagonalisabilité et inversibilité : « puisque les valeurs propres sont non nulles, les endomorphismes f et g sont diagonalisables ».

PARTIE II

1. Elle est traitée par beaucoup de candidats en « bricolant » autour de la réponse de l'énoncé, peu de réponses satisfaisantes tant du point vue du choix du système complet d'événements « $\left\{(Z_k = i)\,,\quad \boxed{r \leqslant i \leqslant n}\right\}$ » que de la justification correcte des probabilités conditionnelles.
2. Elle est correctement traitée.
3. La somme S_n est souvent calculée en calculant explicitement S_n et en utilisant les sommes de séries géométriques. La constante de la suite $(rS_r)_{1\leqslant r\leqslant n-1}$ est justifiée par les candidats sachant manipuler avec aisance les symboles de sommation.
4. Cette question est sélective car elle demande une certaine aisance dans la manipulation des symboles de sommation.
5. (a) Correctement traitée même si le théorème de transfert est assez peu mentionné.
   (b) Certains candidats parviennent aux formules de récurrence. Malheureusement, ils fournissent pas toujours l'expression explicite de $F_k'(1)$ et $F_k''(1)$.
   (c) Seuls les meilleurs candidats l'abordent et la réussissent.

PARTIE III

1. Peu de candidats parviennent à établir la seconde égalité proposée.
2. L'argumentation est généralement correcte pour ceux ayant abordé la question.
3. Si le calcul de $f(u_r)$ est correct, peu de candidats observent alors un vecteur propre et encore moins en déduisent un argumentaire de diagonalisabilité.
4. Etonnament, peu de candidats observent qu'il s'agit simplement de la formule du binôme.
5. Seules les meilleures copies fournissent une réponse convenable.
6. Peu traitée.
7. (a) Seules les meilleures copies répondent correctement.
   (b) Question peu abordée mais lorsqu'elle l'est, elle est correctement traitée.