# MATHEMATIQUES

Option économique

**Mardi 6 mai 1997, de 8h à 12h**

## EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note $f_n$ la fonction définie par :

$\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n.\ln(x)$.

1) a. Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   b. En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$ et $v_n$ solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2) Étude de la suite $(u_n)$.
   a. Montrer que : $\forall n \geq 3,\ 1 < u_n < e$.
   b. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que $(u_n)$ est décroissante.
   c. En déduire que $(u_n)$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$ ; en déduire que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

3) Étude de la suite $(v_n)$.
   a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   b. Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que : $\forall n \geq 3,\ n\ln(n) < v_n$.
   c. Soit la fonction g, définie par : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Étudier g et donner son signe. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ n > 2\ln(n)$.
   d. En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
   e. Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

## EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{C_{n+p}^n}$, où p désigne un entier naturel fixé.

1) Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$, la série de terme général $u_n$ diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

2) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ (n + p + 2)u_{n+2} = (n + 2)u_{n+1}$.
   b. En déduire, par récurrence sur n, que $S_n = \dfrac{1}{p-1}\left[1 - (n+p+1)u_{n+1}\right]$.
3) a. On pose $v_n = (n + p)u_n$. Montrer que la suite $(v_n)$ est décroissante.
   b. En déduire que la suite $(v_n)$ converge et que sa limite $\ell$ est positive ou nulle.
   c. Utiliser les résultats précédents pour montrer que la série de terme général $u_n$ converge et donner sa somme en fonction de p et $\ell$.
4) On suppose, dans cette question seulement, que $\ell \neq 0$.
   a. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$
   b. En déduire une contradiction avec le résultat de la troisième question.
5) Donner la valeur de $\ell$ et en déduire, en fonction de p, la somme de la série de terme général $u_n$.

**EXERCICE 3**

I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ pour laquelle il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.
On définit alors les matrices suivantes :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k \text{, avec la convention } M^0 = I. \qquad \ln(I + M) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k .$$

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1) a. Montrer que E est un espace vectoriel sur **R** et donner sa dimension.
b. Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.
c. Montrer que toute matrice non nulle de E n'est pas diagonalisable.

Dans la suite, A désigne une matrice quelconque de E.

2) a. Calculer $A^k$ pour tout k de $\mathbb{N}$.
b. Exprimer exp(A) et ln(I + A) en fonction de I et A.

3) Montrer que ln[exp(A)] = A.

4) a. Vérifier que ln(I + A) appartient à E.
b. Montrer que : exp[ ln(I + A) ] = I + A

5) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exp(mA) = [\exp(A)]^m$.

6) Montrer que exp(A) est inversible et que : $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$.

7) Quelle condition doivent vérifier deux matrices A et B de E pour que exp(A + B) = exp(A) exp(B) ?

**PROBLÈME**

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**Partie I**

On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne.
On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1) On note $N(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre N. Montrer que $N(\Omega) = [\![ 2, n + 1 ]\!]$.

2) Montrer que : $\forall k \in [\![ 1, n ]\!]$, $P(N > k) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.

Rappel : $A_n^k$ désigne le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments.

3) a. Montrer que : $\forall k \in [\![ 2, n ]\!]$, $P(N = k) = P(N > k - 1) - P(N > k)$.
b. Calculer $P(N = n + 1)$ puis en déduire la loi de N.

4) Montrer que l'espérance E(N) de la variable aléatoire N est : $E(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$.

**Partie II**

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité f (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et de fonction de répartition F. On suppose, de plus, f continue sur $\mathbb{R}^+$.

On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \int_0^x t\,f(t)\,dt$.

1) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(x) = \int_0^x [1 - F(t)]dt\ -\ x.P(X > x)$.

2) On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\,dt$ converge.

a. Calculer $\varphi\,'(x)$ et en déduire que la fonction $\varphi$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que $\varphi$ est majorée et en déduire que X a une espérance.

c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq\ x.P(X > x)\ \leq\ \int_x^{+\infty} t\,f(t)\,dt$.

d. En utilisant le fait que X a une espérance, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t\,f(t)\,dt = 0$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,P(X > x)$, puis montrer que : $E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\,dt$.

**Partie III**

On considère la fonction $F_n$, définie par : $\begin{cases} F_n(x) = 0 \ \text{ si } \ x < 0 \\ F_n(x) = 1 - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} \ \text{ si } \ x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que $F_n$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité $T_n$.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

b. Montrer que $I_{k+1} = (k + 1)\,I_k$ puis donner la valeur de $I_k$.

3) En déduire, en utilisant la partie II, que $T_n$ a une espérance et que $E(T_n) = E(N)$.

**Partie IV**

On considère la déclaration de fonction suivante, rédigée en Turbo-Pascal :

```
Function f (p, q : integer) : real ;
        var j : integer ;
            z : real ;
        begin
            If (p ≤ 0) or (q < 0) then write (' valeurs incorrectes')
            else If (q = 0) or (q = 1) then f := 1 ;
            else begin
            z :=1 ;
            For j := 1  to  (q -1)  do  z := z * ( 1 - j / p) ;
            f := z ;
            end ;
        end;
```

1) Montrer que, si p est un entier naturel non nul et si q est un entier naturel : $f(p, q) = \dfrac{A_p^q}{p^q}$.

2) Utiliser cette déclaration pour écrire un algorithme en Turbo-Pascal donnant la valeur commune de E(N) et $E(T_n)$ lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.