ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

Option Economique

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

EXERCICE 1

1) On considère la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbf{R}_+^*$ par : $g(x) = \ln x + 2x + 1$.

a. Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

b. En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]\,0,\ 1/e\,[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

2) On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R},\ f(x, y) = x(\ln x + x + y^2)$.

a. Déterminer le seul point critique de f, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.

b. Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point.

c. Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$.

EXERCICE 2

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E, défini par :

$f_a(e_2) = 0$ et $f_a(e_1) = f_a(e_3) = a\,e_1 + e_2 - a\,e_3$.

1) a. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f_a$.

b. Montrer qu'une base de $\mathrm{Ker} f_a$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.

2) Écrire la matrice A de f_a dans $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$.

3) On pose : $e'_1 = f_a(e_1)$

$e'_2 = e_1 - e_3$

$e'_3 = e_3$

a. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.

b. Donner la matrice A' de f_a dans cette base.

c. En déduire que 0 est la seule valeur propre de A.

A est-elle inversible ? A est-elle diagonalisable ?

4) Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI$, I désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

a. Montrer, sans calcul, que $B(x)$ est inversible.

b. Calculer $(A - xI)(A + xI)$ puis écrire $[B(x)]^{-1}$ en fonction de x, I et A.

c. Pour tout n de $\mathbf{N}$, déterminer $[B(x)]^n$ en fonction de x, n, I et A.

EXERCICE 3

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec la probabilité 1/2.

On note P_k (resp F_k) l'événement : " on obtient pile (resp face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ".

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers k−1 et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

1) Calculer $P(X = 2)$.

2) a. En remarquant que $(X = 3) = P_1 P_2 F_3 \cup F_1 P_2 F_3$, calculer $P(X = 3)$.

b. Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.

c. Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

d. Calculer $P(X = 0)$.

3) On se propose dans cette question de retrouver le résultat de la question 2c) par une autre méthode.

a. Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2 P_3 \ldots P_{k-1} F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.

b. En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :

$$\forall\, k \geq 3,\ P(X = k) = \frac{1}{2} P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}.$$

c. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.

Montrer que la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique. Retrouver ainsi le résultat annoncé.

4) Montrer que X a une espérance E(X), puis la calculer.

PROBLÈME

La partie I permet d'établir des résultats utiles pour les parties II et III.

Les parties II et III sont indépendantes entre elles.

On considère la fonction f, définie pour tout réel x positif ou nul par : $f(x) = 1 - e^{-x}$.

Partie I

1) a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt.$$

b. En écrivant l'égalité précédente pour n = 2, puis pour n = 3, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

Partie II

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la rela tion :
$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]0, 1]$.

b. Montrer, grâce à la question I1), que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

c. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2) a. Simplifier, pour tout n élément de $\mathbf{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - u_{k+1})$.

b. En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

c. En utilisant la question I 2), montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$.

d. Donner enfin la nature de la série de terme général u_n^2.

Partie III

1) On note φ la fonction, définie sur $\mathbf{R}_+$, par : $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$

Montrer que φ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

On considère la fonction réelle g, définie par : $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)\, dt$.

2) a. Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

b. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.

c. En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0, puis donner $g'(0)$.

3) a. Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\int_1^x \varphi(t)\, dt \leq \ln x$.

b. En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

4) a. Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

b. Montrer alors que : $x\, h'(x) = (x + 1)e^{-x} - 1$.

c. Étudier la fonction notée k, définie par : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $k(x) = (x + 1)e^{-x} - 1$.

d. Donner le signe de k, puis les variations de h, et enfin celles de g.

e. Dresser le tableau de variations de g, et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.