

# edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD  
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

**MATHEMATIQUES**

*Option Scientifique*

Mardi 5 Mai 1998, de 8 h à 12 h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## EXERCICE 1

Question préliminaire :

La suite  $(x_n)$  est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général  $x_n$  converge, alors la série de terme général  $x_n^2$  converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que : si  $n \geq N$ , alors  $x_n^2 \leq x_n$ ).

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée  $\text{ch}$ , définie par  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

et d'autre part la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- 1) Étudier la fonction  $\text{ch}$  et dresser son tableau de variations.
- 2) Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $\text{ch}$  au voisinage de 0.
- 3) a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement positive et strictement décroissante.  
b. En déduire que  $(u_n)$  est convergente et donner sa limite.

4) On pose, pour tout  $n$  élément de  $\mathbf{N}$  :  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ .

- a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est strictement négative.
- b. Montrer que  $(v_n)$  est convergente de limite nulle.

c. Pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}^*$ , simplifier  $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$ .

En déduire que la série de terme général  $v_n$  est divergente.

5) a. Montrer que :  $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$ .

- b. En déduire que la série de terme général  $u_n^2$  est divergente.
- c. En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général  $u_n$ .

**EXERCICE 2**

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc "Pile" ou "Face" avec la probabilité  $1/2$ .

On note  $P_k$  (resp  $F_k$ ) l'événement : " on obtient Pile (resp Face) au  $k^{\text{ème}}$  lancer ".

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple,  $P_1 F_2$  à la place de  $P_1 \cap F_2$ .

On note  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur  $k$  si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" puis "Face" dans cet ordre aux lancers  $k-1$  et  $k$  ( $k$  désignant un entier supérieur ou égal à 2),  $X$  prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui prend la valeur  $k$  si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" suivi de "Pile" aux lancers  $k-1$  et  $k$  ( $k$  désignant un entier supérieur ou égal à 2),  $Y$  prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer les espérances de  $X$  et  $Y$  et de vérifier que, "contre toute attente",  $E(Y) > E(X)$ .

1) Calculer  $P(X = 2)$ .

2) a. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que si le premier lancer est un "Pile", alors il faut et il suffit que  $P_2 P_3 \dots P_{k-1} F_k$  se réalise pour que  $(X = k)$  se réalise.

b. En déduire que :

$$\forall k \geq 3, P(X = k) = \frac{1}{2} P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}.$$

c. On pose, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2,  $u_k = 2^k P(X = k)$ . Déterminer  $u_k$ , puis donner la loi de  $X$ .

3) Montrer que  $X$  a une espérance, notée  $E(X)$ , et la calculer.

4) a. Montrer que  $(F_1, P_1 P_2, P_1 F_2)$  est un système complet d'événements.

b. En déduire que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 4 :

$$P(Y = k) = \frac{1}{2} P(Y = k-1) + \frac{1}{4} P(Y = k-2). \quad (*)$$

c. On pose, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2,  $v_k = P(Y = k)$ .

Déterminer  $v_2$  et  $v_3$  puis montrer qu'en posant  $v_0 = 1$  et  $v_1 = 0$ , on a,

$$\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à } 2 : v_k = \frac{1}{2} v_{k-1} + \frac{1}{4} v_{k-2}.$$

d. En déduire la suite  $(v_k)_{k \geq 0}$  puis donner la loi de  $Y$ .

e. Montrer que  $Y$  a une espérance, notée  $E(Y)$ , et la calculer.

**EXERCICE 3**

1) On dit que  $Z$  suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de  $Z$  est  $f$ , définie sur  $\mathbf{R}$

$$\text{par : } f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

a. Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.

b. Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ .

c. Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de  $V = Z_1 + Z_2$ .

- 2) Dans cette question,  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose  $Z = X - Y$ .
- Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de  $-Y$ .
  - Déterminer une densité de  $Z$  et vérifier que  $Z$  suit la loi exponentielle bilatérale.
  - Déterminer l'espérance de  $Z$ .
  - On pose  $T = |Z|$ . Déterminer la fonction de répartition de  $T$  et vérifier que  $T$  suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

### PROBLÈME

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On considère l'espace vectoriel  $\mathbf{R}_n[X]$  des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à  $n$  ; on rappelle que  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1.

On note  $\varphi$  l'application qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbf{R}_n[X]$  associe le polynôme  $\varphi(P) = Q$  défini par :  $Q = (X - 1)P' - XP''$ .

#### Partie I : étude de $\varphi$ .

- Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
  - Pour tout  $j$  élément de  $[0, n]$ , calculer  $\varphi(X^j)$ .
  - Écrire la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ .
  - En déduire que  $\varphi$  est diagonalisable.
- Pour tout  $k$  élément de  $[0, n]$ , on désigne par  $L_k$  l'unique polynôme unitaire vérifiant  $\varphi(L_k) = kL_k$  et on écrit  $L_k = \sum_{i=0}^k a_i X^i$ , avec  $a_p = 1$ .
  - Montrer que  $p = k$ , c'est-à-dire que  $L_k$  est de degré  $k$ .
  - Déterminer  $L_0$ .
  - Écrire, lorsque  $k$  est supérieur ou égal à 1, le système d'équations dont  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  sont solutions.
  - En déduire que :  $\forall i \in [0, k]$ ,  $a_i = (-1)^{k-i} (k-i)! \left[ C_k^i \right]^2$ .
- On note  $f_k$  la fonction réelle définie par  $f_k(x) = x^k e^{-x}$ .  
Montrer que :  $\forall k \in [0, n]$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x)$ .

**Partie II : étude d'un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .**

1) P et Q étant des polynômes de  $\mathbf{R}_n[X]$ , on pose :

$$\psi(P, Q) = (P / Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x) dx.$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale  $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$  converge.

b. Vérifier que l'intégrale définissant (P / Q) est convergente.

c. Montrer que  $\psi$  est un produit scalaire défini sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .

2) Soit k un entier naturel non nul. Les fonctions f et g étant de classe  $C^k$  sur l'intervalle [a, b] de  $\mathbf{R}$ , montrer la formule d'intégration par parties d'ordre k :

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t) dt = \left[ \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f^{(j)}(t) g^{(k-j-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t) dt.$$

3) Montrer que :  $\forall i \in [0, k-1]$ ,  $f_k^{(i)}(0) = 0$ . ( $f_k$  étant la fonction définie à la question I3)

4) Soient i et k deux entiers naturels.

a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \int_0^x L_i(t) f_k^{(k)}(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j L_i^{(j)}(x) f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t) f_k(t) dt.$$

b. En déduire que  $\int_0^{+\infty} L_i(t) L_k(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t) dt$

c. Montrer que, pour le produit scalaire  $\psi$ , la famille  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  est une famille orthogonale de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

d. Montrer que  $I_{k+1} = (k+1) I_k$ , puis donner la valeur de  $I_k$ .

En déduire la norme de  $L_k$ , notée  $\|L_k\|$ , puis donner une base orthonormale de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

**Partie III : étude des racines de  $L_n$ .**

On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1.

On pose  $R(x) = \prod_{j=1}^p (x - x_j)$ , où  $x_1, x_2, \dots, x_p$  sont les racines positives, distinctes, d'ordre

impair de  $L_n$ . On convient que  $R(x) = 1$  si  $L_n$  n'a pas de racine d'ordre impair dans  $\mathbf{R}^+$ .

1) Montrer que  $RL_n$  est positif sur  $\mathbf{R}^+$ .

2) On suppose dans cette question que  $p < n$ .

a. En remarquant que R est élément de  $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ , montrer que  $(R / L_n) = 0$ .

b. En déduire que  $RL_n$  est le polynôme nul.

3) a. En notant la contradiction obtenue en 2b), conclure que  $p = n$ .

b. En déduire que  $L_n$  a n racines réelles distinctes et toutes positives.