Correction EDHEC 2007
Voie scientifique

La correction comporte 24 pages.

Exercice 1

1. Pour tout entier n non nul, la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble) de telles fonctions. Ainsi l'intégrale définissant u_n ne présente qu'une impropreté, en $+\infty$.
Comme la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) \leq \varphi(0) = n$$

et :

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq ne^{-x}$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} ne^{-x}dx &= n\Gamma(1)\\ &= n\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} ne^{-x}dx$ converge donc. Le *critère de majoration appliqué aux fonctions positives* permet de conclure que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} \text{ converge et la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien définie}}$$

2. _

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned}\forall x \geq 1,\ \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} &\leq \frac{e^{-x}}{x} \text{ car } x+\frac{1}{n} \geq x \Longrightarrow \frac{1}{x+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{x} \text{ et } e^{-x} > 0\\ \forall x \geq 1,\ \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} &\leq e^{-x} \text{ car } x \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{x} \leq 1\end{aligned}$$

alors comme toutes les fonctions en jeu sont continues sur $[1, +\infty[$, la croissance de l'intégrale nous donne :

$$\begin{aligned}\forall A \geq 1,\ \int_1^A \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} &\leq \int_1^A e^{-x}dx\\ &\leq \left[-e^{-x}\right]_1^A\\ &\leq \left(e^{-1} - e^{-A}\right)\end{aligned}$$

Le *théorème de prolongement des inégalités*, nous permet d'écrire, comme :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} \text{ par cvce de l'intégrale} \quad \text{et} \quad \lim_{A\to+\infty} \left(e^{-1} - e^{-A}\right) = e^{-1}$$

que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} \leq e^{-1}$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n \leq e^{-1} \tag{1}$$

Enfin la positivité de l'intégrale, les bornes étant bien rangées, permet d'écrire que :

$$\forall A \geq 1, \quad 0 \leq \int_1^{A} \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}}$$

et par passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ (*théorème de prolongement des inégalités)* :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{A\to+\infty}\int_1^{A} \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} \\ \text{soit } 0 &\leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} \\ \text{ou encore } 0 &\leq w_n \end{aligned} \tag{2}$$

Conclusion : selon (1) et (2)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq w_n \leq e^{-1}}$$

(b) La fonction $\psi : x \longmapsto e^{-x}$ est décroissante sur $[0,1]$, donc $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) \geq \frac{1}{e}$, ainsi :

$$\frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{e}\frac{1}{x+\frac{1}{n}}$$

alors par continuité de toutes les fonctions en jeu sur le segment $[0,1]$, les bornes sont bien rangées, la croissance de l'intégrale nous donne :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{x+\frac{1}{n}} &\geq \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dx}{x+\frac{1}{n}} \\ &\geq \frac{1}{e}\ln\left[x+\frac{1}{n}\right]_0^1 \\ &\geq \frac{1}{e}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\geq \frac{1}{e}\left(\ln(n+1)-\ln n+\ln n\right) \\ &\geq \frac{1}{e}\ln(n+1) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq \frac{1}{e}\ln(n+1)}$$

(c) Comme :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\ln(n+1) = +\infty$$

le *théorème de comparaison* nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

D'autre part la *relation de Chasles* nous permet d'écrire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n + w_n$$

où la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, alors selon l'*algèbre des limites* :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} v_n + \lim_{n\to+\infty} w_n \\ &= \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

3. _

(a) La fonction $\theta : x \longmapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0,1]$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle) de telles fonctions. L'intégrale présente donc une impropreté en 0. Or comme :

$$\frac{1-e^{-x}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x}$$

(car $e^{-x}-1 \underset{0}{\sim} -x$) alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{x} = 1$ et θ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\theta(0) = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx \text{ est faussement impropre en 0 et est donc convergente}}$$

(b) Il est clair que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]a,1], \quad \text{où } a \in]0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ x + \frac{1}{n} &\geq x \\ \text{donc } \frac{1}{x+\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{x} \text{ car } t \longmapsto \frac{1}{t} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{alors } \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} &\leq \frac{1-e^{-x}}{x} \text{ (en multipliant par } 1-e^{-x} \geq 0 \text{ sur }]a,1]\text{)} \end{aligned}$$

En intégrant membre à membre, les deux fonctions en jeu étant continues sur l'intervalle d'intégration $]a,1]$, les bornes étant rangées car $a < 1$, la croissance de l'intégrale nous permet de dire que :

$$\int_a^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx \leq \int_a^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$$

Sachant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx \quad \text{et} \quad \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$$

par convergence des intégrales, le *théorème de prolongement des inégalités* nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$$

Enfin comme $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \geq 0$, par positivité de l'intégrale, les bornes étant bien rangées, nous avons finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx} \qquad (3)$$

(c) Par définition de v_n, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx - v_n\end{aligned}$$

alors selon (3) nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx - v_n \leq I$$

soit :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx - I \leq v_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx$$

ou encore :

$$\begin{aligned}&\left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 - I \leq v_n \leq \left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 \\ \Longrightarrow \quad &\ln(n+1) - I \leq v_n \leq \ln(n+1)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) - I \leq v_n \leq \ln(n+1)} \qquad (4)$$

(d) Comme précédemment vu, nous savons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, et comme v_n tend vers $+\infty$ nous pouvons écrire que :

$$w_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$$

Ainsi :

$$v_n + w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

soit donc :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \text{ car } u_n = v_n + w_n \qquad (5)$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln n \geq 0$, (4) entraîne que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ln(n+1) - I}{\ln n} \leq \frac{v_n}{\ln n} \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1) - I}{\ln n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$$

puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I}{\ln n} = 0$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} \\ &= \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\end{aligned}$$

avec :

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0$$

Le *théorème d'encadrement* permet de dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\ln n} = 1$$

ce qui équivaut à dire, selon la caractérisation des suites équivalentes, que :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n \tag{6}$$

Conclusion : selon (5) , (6) par transitivité de $\sim$

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$$

Exercice 2

1. Tout d'abord la famille (I, J, K, L) est génératrice de E par définition de l'énoncé. Il nous reste plus qu'à démontrer qu'elle est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, tel que $aI + bJ + cK + dL = 0$, montrons que $a = b = c = d = 0$. La combinaison linéaire nulle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

et la famille est donc libre. Comme son cardinal vaut 4, nous pouvons dire que :

$$\boxed{(I, J, K, L) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim E = 4}$$

2. _

(a) Sans commentaire particulier, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{c} JK = L \\ KL = J \\ LJ = K \end{array}} \tag{7}$$

(b) De même :

$$\boxed{J^2 = -I \qquad K^2 = -I \qquad L^2 = -I} \tag{8}$$

Nous en déduisons que :

- $\boxed{KJ = K^2L = -L}$ selon (7) et (8)
- $\boxed{LK = L^2J = -J}$ selon (7) et (8)
- $\boxed{JL = KL^2 = -K}$ selon (7) et (8)

(c) Soit M et M' deux matrices de E, elles s'écrivent donc chacune sous forme de combinaison linéaire des matrices I, J, K, L.

$$\begin{array}{ll} \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid & M = aI + bJ + cK + dL \\ \exists\,(a',b',c',d') \in \mathbb{R}^4 \mid & M' = a'I + b'J + c'K + d'L \end{array}$$

Alors :

$$\begin{aligned} MM' &= (aI + bJ + cK + dL)\,(a'I + b'J + c'K + d'L) \\ &= dd'L^2 + bb'J^2 + cc'K^2 + aa'I + bd'JL + cd'KL + bc'JK + cb'JK \\ &\quad + db'JL + dc'KL + ad'L + ab'J + a'bJ + ac'K + ca'K + a'dL \\ &= -dd'I - bb'I - cc'I + aa'I - bd'K + cd'J + bc'L + cb'L \\ &\quad - db'K + dc'J + ad'L + ab'J + a'bJ + ac'K + ca'K + a'dL \\ &= (-dd' - bb' - cc' + aa')\,I + (cd' + dc' + ab' + a'b)\,J \\ &\quad + (-bd' - db' + ac' + ca')\,K + (bc' + cb' + ad' + a'd)\,L \end{aligned}$$

Comme nous avons pu exprimer MM' comme combinaison linéaire des vecteurs de la base (I, J, K, L) de E, nous pouvons conclure que :

$$\boxed{E \text{ est stable pour le produit matriciel}}$$

3. Comme les matrices J et K ne sont pas commutantes, nous devons faire attention dans le calcul et:

$$\begin{aligned} A^2 &= (J+K)^2 \\ &= J^2 + JK + KJ + K^2 \\ &= -I + L - L - I \\ &= \boxed{-2I} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$A\left(-\frac{1}{2}A\right) = I$$

Nous avons donc pu trouver une matrice carrée d'ordre 4 notée B qui commute avec A telle que :

$$AB = BA = I$$

Ainsi A est inversible avec :

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A}$$

4. _

(a) Comme l'ensemble E est stable pour le produit matriciel et que A, M et A^{-1} en sont éléments, alors $\varphi_A(M) \in E$. D'autre part pour tout couple (M, M') de matrices de E et pour tout couple de réels (a, b), nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_A(aM + bM') &= A\,(aM + bM')\,A^{-1} \\ &= aAMA^{-1} + bAM'A^{-1} \text{ en développant} \\ &= a\varphi_A(M) + b\varphi_A(M') \end{aligned}$$

et φ_A est bien une application linéaire.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est bien un endomorphisme de } E}$$

(b) Par définition :

$$\ker \varphi_A = \{M \in E | \varphi_A(M) = 0\}$$

Or :

$$\begin{aligned} \varphi_A(M) = 0 &\iff AMA^{-1} = 0 \\ &\iff A^{-1}AMA^{-1}A = 0 \\ &\iff M = 0 \end{aligned}$$

et :

$$\boxed{\ker \varphi_A = 0} \tag{9}$$

L'égalité (9) équivaut à dire que φ_A est injective et comme nous travaillons en dimension finie, cela revient à dire que φ_A est bijective, autrement dit :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un automorphisme de } E}$$

5. _

(a) Pour écrire Φ_A la matrice de φ_A dans la base (I, J, K, L) nous nous devons de calculer les images $\varphi_A(I)$, $\varphi_A(J)$, $\varphi_A(K)$ et $\varphi_A(L)$ que l'on exprimera en fonction de I, J, K et L.

- Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_A(I) &= AIA^{-1} \\ &= I \end{aligned} \tag{10}$$

- Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_A(J) &= AJA^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}(J+K)J(J+K) \\ &= -\frac{1}{2}\left(J^2+KJ\right)(J+K) \\ &= -\frac{1}{2}\left(J^3+J^2K+KJ^2+KJK\right) \\ &= -\frac{1}{2}(-J-K-K-LK) \\ &= -\frac{1}{2}(K-K-K+J) \\ &= -\frac{1}{2}(-2K) \\ &= K \end{aligned} \tag{11}$$

- Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_A(K) &= AKA^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}(J+K)K(J+K) \\ &= -\frac{1}{2}\left(JK+K^2\right)(J+K) \\ &= -\frac{1}{2}\left(JKJ+K^2J+JK^2+K^3\right) \\ &= -\frac{1}{2}(LJ-J-J-K) \\ &= -\frac{1}{2}(K-J-J-K) \\ &= -\frac{1}{2}(-2J) \\ &= J \end{aligned} \tag{12}$$

- Nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi_A(L) &= ALA^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}(J+K)L(J+K) \\
&= -\frac{1}{2}(JL+KL)(J+K) \\
&= -\frac{1}{2}(JLJ+KLJ+JLK+KLK) \\
&= -\frac{1}{2}\left(JK+K^2-J^2-KJ\right) \\
&= -\frac{1}{2}(L-I+I+L) \\
&= -\frac{1}{2}(2L) \\
&= -L
\end{aligned} \tag{13}$$

Selon $(10), (11), (12)$ et (13) :

$$\boxed{\Phi_A = mat(\varphi_A, (I,J,K,L)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Selon (10) et (11) nous pouvons d'ores et déjà dire que -1 et 1 sont deux valeurs propres de Φ_A et comme cette dernière est clairement inversible (il suffit d'inverser les deux colonnes centrales pour voir que $rg\Phi_A = 4$), 0 n'est pas valeur propre. Mais cela ne nous donne pas les autres valeurs propres éventuelles, c'est pourquoi nous reviendrons à la définition classique d'une valeur propre ce qui nous amènera à résoudre un système homogène.
λ est une valeur propre de Φ_A si et seulement si $\Phi_A - \lambda I$ est non inversible avec :

$$\Phi_A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Effectuons l'opération élémentaire $L_2 \leftrightarrow L_3$ alors :

$$\Phi_A - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

puis l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_2$

$$\Phi_A - \lambda I \sim\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\Phi_A - \lambda I$ est non inversible si et seulement si la réduite de Gauss obtenue est non inversible, soit si et seulement si l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \in \{-1, 1\}$.
Conclusion :

$$\boxed{sp(\Phi_A) = \{-1, 1\}}$$

Déterminons $E_{-1}(\Phi_A)$ et $E_1(\Phi_A)$ les sous-espaces propres associés respectivement associés à

-1 et 1 avec :

$$\begin{aligned}
E_1(\Phi_A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid \Phi_A(X) = X \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid y - z = 0 \text{ et } -2t = 0 \right\} \\
&= \boxed{\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)} \qquad (14) \\
E_{-1}(\Phi_A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid \Phi_A(X) = -X \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid 2x = 0 \text{ et } y + z = 0 \right\} \\
&= \boxed{\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} \qquad (15)
\end{aligned}$$

Selon (14) et (15) : $\dim E_1(\varphi_A) = \dim E_{-1}(\varphi_A) = 2$ et comme $\dim E = 4$, nous avons :

$$\dim E_1(\varphi_A) + \dim E_{-1}(\varphi_A) = \dim E$$

ce qui permet de dire que :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable}}$$

6. _

(a) C'est une démonstration classique de cours. Notons $P = (p_{ij})_{(i,j)\in[|1,4|]}$, $Q = (q_{ij})_{(i,j)\in[|1,4|]}$ deux matrices de E, R la matrice produit $PQ = (r_{ij})_{(i,j)\in[|1,4|]}$ et enfin S le produit $QP = (s_{ij})_{(i,j)\in[|1,4|]}$ avec par définition :

$$\forall (i,j) \in [|1,4|], \quad r_{ij} = \sum_{k=1}^{4} p_{ik} q_{kj}$$

$$\forall (i,j) \in [|1,4|], \quad s_{ij} = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} p_{kj}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} tr\left(PQ\right) &= \sum_{i=1}^{4} r_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} p_{ik}q_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} p_{ik}q_{ki} \text{ en inversant l'ordre de sommation} \\ &= \sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} q_{ki}p_{ik} \text{ par commutativité du produit dans } \mathbb{R} \\ &= \sum_{k=1}^{4} s_{kk} \\ &= tr\left(QP\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall\left(P,Q\right)\in E^2,\quad tr\left(PQ\right)=tr\left(QP\right)}$$

(b) Avant de commencer, signalons que la matrice A vaut :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi nous constatons que ${}^tA=-A$, on dit que A est **antisymétrique.**
φ_A est un endomorphime symétrique si et seulement si :

$$\forall\left(P,Q\right)\in E^2,\quad \left(\varphi_A\left(P\right)\mid Q\right)=\left(P\mid\varphi_A\left(Q\right)\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \left(\varphi_A\left(P\right)\mid Q\right) &= tr\left({}^t\varphi_A\left(P\right)Q\right) \\ &= tr\left({}^t\left(APA^{-1}\right)Q\right) \\ &= -\frac{1}{2}tr\left({}^t\left(APA\right)Q\right) \\ \text{car } A^{-1} &= -\frac{1}{2}A,\ {}^t\left(\alpha A\right)=\alpha\,{}^tA \text{ et par linéarité de la trace} \\ &= -\frac{1}{2}tr\left(\left({}^tA\right)\left({}^tP\right)\left({}^tA\right)Q\right) \text{ par propriété de la transposition} \\ &= -\frac{1}{2}tr\left(\left(-A\right)\left({}^tP\right)\left(-A\right)Q\right) \text{ car } A \text{ est antisymétrique} \\ &= -\frac{1}{2}tr\left(A\,{}^tPAQ\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Or :

$$\begin{aligned} \left(P\mid\varphi_A\left(Q\right)\right) &= tr\left({}^tP\varphi_A\left(Q\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}tr\left({}^tPAQA\right) \\ &= -\frac{1}{2}tr\left(A\,{}^tPAQ\right) \text{ car } tr\left(BC\right)=tr\left(CB\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Conclusion : selon (16) et (17)

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E^2, \quad (\varphi_A(P) \mid Q) = (P \mid \varphi_A(Q)) \quad \text{et} \quad \varphi_A \text{ est un endomorphisme symétrique}}$$

(c) Comme nous venons de voir que φ_A est un endomorphime symétrique, le cours nous dit qu'il est diagonalisable (Φ_A n'est constitué que de réels) ce qui a été confirmé au **5.a** et que ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Or comme ceux-ci sont $\ker(\varphi_A - id)$ et $\ker(\varphi_A + id)$ alors :

$$\boxed{\ker(\varphi_A - id) \text{ et } \ker(\varphi_A + id) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E}$$

Exercice 3

1. Nous savons que les variables de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ sont iid[1] de loi commune la loi exponentielle de paramètre 1 qui, d'après le cours, s'identifie totalement à la loi grand gamma de paramètres 1 et 1. Alors par *stabilité* de cette dernière pour la somme de *variables indépendantes* nous pouvons écrire que :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \Gamma(1,n)}$$

Toujours d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(S_n) = n \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(S_n) = n}$$

2. Utilisons le *théorème de la limite centrée* dont voici le rappel :
*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On suppose que les variables sont **iid**, de loi commune pas forcément connue, admettant une espérance m et une variance σ^2 non nulle. Posons :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

alors :

$$(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \quad \text{où} \quad N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Ce qui entraîne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n^* \leq x]) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

En appliquant cela à notre variable S_n nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n \leq n]) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq \frac{n-n}{\sigma(S_n)}\right]\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n^* \leq 0]) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : nous avons bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n \leq n]) = \frac{1}{2}} \tag{18}$$

3. Il est clair que pour tout entier n non nul, $\mathbf{P}([S_n \leq n]) = F_{S_n}(n)$ où F_{S_n} est la fonction de répartition de la variable S_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{S_n}(t)\, dt$$

[1] **I**ndépendantes et **i**ndentiquement **d**istribuées.

où f_{S_n} est une densité de S_n que nous pouvons prendre égale à :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{\Gamma(n)} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([S_n \leq n]) &= F_{S_n}(n) \\ &= \int_{-\infty}^{n} f_{S_n}(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_{S_n}(t)\,dt + \int_0^n f_{S_n}(t)\,dt \text{ par } \textit{Chasles} \\ &= 0 + \int_0^n \frac{t^{n-1}e^{-t}}{\Gamma(n)}dt \\ &= \int_0^n \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}dt \end{aligned} \tag{19}$$

Conclusion : selon (18) et (19)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}dt = \frac{1}{2}}$$

4. _

(a) Comme le nombre rationnel $\frac{1}{2}$ est non nul le résultat de la question précédente permet d'écrire que :

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \tag{20}$$

Effectuons un changement de variable de variable affine dans l'intégrale, donc licite, car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,n]$: $z = \frac{t}{n}$ alors $dz = \frac{dt}{n}$ et :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^n \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}dt &= \int_0^1 \frac{(nz)^{n-1}e^{-nz}}{(n-1)!}ndz \\ &= \int_0^1 \frac{n^n z^{n-1}e^{-nz}}{(n-1)!}dz \\ &= \int_0^1 \frac{n^{n+1}z^{n-1}e^{-nz}}{n(n-1)!}dz \\ &= \int_0^1 \frac{n^{n+1}z^{n-1}e^{-nz}}{n!}dz \\ &= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \end{aligned}$$

Alors () nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow\quad & \frac{n!}{n^{n+1}}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{n!}{n^{n+1}} \text{ par compatibilité de } \sim \text{ avec le produit} \\ \Longrightarrow\quad & \int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{n!}{n^{n+1}} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}}$$

(b) Nous admettons que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ (**formule de James Stirling**) alors :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{n^{n+1}z^{n-1}e^{-nz}}{n!}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{2n^{n+1}} \\
\Longrightarrow\ & \int_0^1 \frac{n^{n+1}z^{n-1}e^{-nz}}{n!}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}e^{-n}}{2n} \\
\Longrightarrow\ & \int_0^1 \frac{n^{n+1}z^{n-1}e^{-nz}}{n!}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}e^{-n}}{\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{n^{n+1}z^{n-1}e^{-nz}}{n!}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}e^{-n}}$$

Problème

Partie I

1. _

(a) Appliquons la *formule des probabilités totales* associée au système complet d'événements $\left(U,\overline{U}\right)$ de probabilités non nulles, égales à $\frac{1}{2}$, puisque les urnes sont équiprobables du fait qu'elles sont choisies au hasard. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=1]) &= \mathbf{P}_U([X=1])\,\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}([X=1])\,\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\right)\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\times\frac{1}{2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(b) Encore une fois utilisons la *formule des probabilités totales* associée au même système complet d'événements utilisé à la question précédente, et :

$$\begin{aligned}
\forall k\geq 2,\ \mathbf{P}([X=k]) &= \mathbf{P}_U([X=k])\,\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}([X=k])\,\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \mathbf{P}_U\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right)\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_U\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right)\right) \qquad (21)
\end{aligned}$$

Faisons une pause pour expliquer les calculs :

$$\mathbf{P}_U\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} \qquad (22)$$

car l'urne U étant choisie au départ, tous les tirages s'y font, et ceux-ci donnent des résultats indépendants du fait que les tirages se font avec remise. Pour vous convaincre du résultat, voici la démonstration :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_U\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right)\\
=\ &\frac{\mathbf{P}\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\cap U\right)}{\mathbf{P}(U)} \text{ par définition d'une probabilité conditionnelle}\\
=\ &\frac{\mathbf{P}(U)\,\mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap B_2}(B_3)\times\cdots\times\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap\ldots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)}{\mathbf{P}(U)}\\
&\text{selon la } \textit{formule des probas composées}\\
=\ &\mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap B_2}(B_3)\times\cdots\times\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap\ldots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)\\
=\ &\mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}_U(B_2)\,\mathbf{P}_U(B_3)\times\cdots\times\mathbf{P}_U(B_{k-1})\,\mathbf{P}_U\left(\overline{B_k}\right)\\
&\text{car les tirages étant effectués avec remise, les résultats ne dépendent pas des boules}\\
&\text{précédemment obtenues mais seulement de l'urne dans laquelle ils sont effectués}\\
=\ &\underbrace{\frac{1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}}_{k-1 \text{ termes}}\times\frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

De même :

$$\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n} \tag{23}$$

Conclusion : selon $(21),(22)$ et (23)

$$\boxed{\forall k\geq 2,\quad \mathbf{P}([X=k])=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)}$$

Pour $k=1$, l'expression donne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{1-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-1}\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\forall k\geq 1,\quad \mathbf{P}([X=k])=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)}$$

2. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général :

$$k\mathbf{P}([X=k])=\frac{k}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right) \quad \text{où} \quad k\geq 1$$

est convergente. La convergence est assurée par le fait que $k\mathbf{P}([X=k])$ s'exprime comme combinaison linéaire de termes généraux de *séries dérivées de séries géométriques* de raisons $\frac{1}{n}$ et $\frac{n-1}{n}$

en valeur absolue strictement inférieures à 1. Ainsi X admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k\geq 1}\frac{k}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{k}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\sum_{k\geq 1}\frac{k}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\sum_{k\geq 1}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}+\frac{1}{2n}\sum_{k\geq 1}k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{2n}\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{n^2}{(n-1)^2}+\frac{n^2}{2n}\\
&= \frac{1}{2}\frac{n^2}{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=\frac{n^2}{2(n-1)}}$$

3. Montrons que X et Y suivent la même loi. Connaissant la loi de X, il nous faut chercher la loi de Y. Tout d'abord $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

   - Nous avons toujours par la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=1]) &= \mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}(U)+\mathbf{P}_{\overline{U}}(B_1)\,\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\\
&= \frac{1}{n}\times\frac{1}{2}+\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{24}$$

   - Pour tout $k\geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=k]) &= \mathbf{P}_U([Y=k])\,\mathbf{P}(U)+\mathbf{P}_{\overline{U}}([Y=k])\,\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\\
&= \mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k\right)\mathbf{P}(U)+\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k\right)+\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

     en utilisant le même raisonnement qu'au **1.b**

   Selon (24) et (25)

$$\begin{aligned}
\forall k\geq 1,\ \mathbf{P}([Y=k]) &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)\\
&= \mathbf{P}([X=k])
\end{aligned}$$

   Conclusion :

   $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$

   Ce résultat est tout à fait normal vu la symétrie des contenus des urnes U et V dans lesquelles les tirages sont toujours effectués, sans changement à partir du premier tirage, ce qui aurait pu nous éviter d'effectuer la démonstration précédente.

4. Les instructions manquantes sont :

```
Repeat x := x + 1; tirage := random(n); until (tirage > 0);
```

Partie II

1. _

(a) Le protocole n'intervenant qu'à partir du second tirage, le résultat est exactement le même que celui obtenu dans **I.1.a** (avec le même raisonnement) :

$$\boxed{\mathbf{P}([X=1]) = \frac{1}{2}}$$

(b) Utilisons la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(U, \overline{U}\right)$, cela donne :

$$\begin{aligned}\forall k \geq 2,\ \mathbf{P}([X=k]) &= \mathbf{P}_U([X=k])\,\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}([X=k])\,\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\\ &= \mathbf{P}_U\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_U\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\right) \qquad (26)\end{aligned}$$

Avec, comme dans la partie 1 :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_U\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\\ =\ & \frac{\mathbf{P}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k} \cap U\right)}{\mathbf{P}(U)} \text{ par définition}\\ =\ & \frac{\mathbf{P}(U)\,\mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{U\cap B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)}{\mathbf{P}(U)}\\ & \text{selon la formule des probas composées}\\ =\ & \mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{U\cap B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{U\cap B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)\\ =\ & \mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)\\ & \text{car selon les modalités des tirages dans cette partie, les différentes probabilités conditionnelles}\\ & \text{se simplifient en ne tenant compte que de la couleur de la boule obtenue au tirage précédent}\\ =\ & \underbrace{\frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n}}_{k-1 \text{ termes}} \times \frac{n-1}{n}\\ =\ & \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) \qquad (27)\end{aligned}$$

En revanche :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\\ =\ & \frac{\mathbf{P}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k} \cap \overline{U}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)} \text{ par définition}\\ =\ & \frac{\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\mathbf{P}_{\overline{U}}(B_1)\,\mathbf{P}_{\overline{U}\cap B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{\overline{U}\cap B_1\cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{\overline{U}\cap B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{\overline{U}\cap B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)}\\ & \text{selon la formule des probas composées}\\ =\ & \mathbf{P}_{\overline{U}}(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)\\ =\ & \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{k-3}\left(\frac{n-1}{n}\right)\\ =\ & \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \qquad (28)\end{aligned}$$

car le premier tirage s'effectue dans l'urne V et comme il donne une boule blanche, le deuxième tirage s'effectue dans U ainsi que les suivant jusqu'au rang k puisque les tirages ne donnent que des boules blanches, sauf le dernier. Alors selon () et () :

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2,\ \mathbf{P}([X=k]) &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : selon (26) , (27) et (28)

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}([X=k]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

2. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k\mathbf{P}([X=k])$, $k \geq 1$ est convergente. Or pour tout $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
k\mathbf{P}([X=k]) &= \frac{k}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\\
&= (n-1)\,\frac{k}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

La convergence est assurée par le fait que $k\mathbf{P}([X=k])$ est proportionnelle au terme général d'une *série dérivée d'une série géométrique* de raison $\frac{1}{n}$ en valeur absolue strictement inférieure à 1. Ainsi X admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \mathbf{P}([X=1]) + \sum_{k\geq 2} k\mathbf{P}([X=k])\\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k\geq 2}(n-1)\,\frac{k}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\sum_{k\geq 2} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} - 1\right)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}} - 1\right)\\
&= \frac{3n-2}{2(n-1)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{3n-2}{2(n-1)}}$$

3. Pour des raisons évidentes de symétrie du contenu des urnes et des modalités de changement d'urne:

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$$

Maintenant on laisse au lecteur le soin de refaire la démonstration, s'il le veut !

4. Voici une proposition :

```
Program edhec_2007bis ;
Var  x, n, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ; Readln(n) ; hasard : = random(2) ; x : = 0 ;
If  hasard = 0  then  begin x := x + 1 ; tirage : = random(n) ;
                          If  (tirage > 0)  then
                          Repeat x := x + 1 ; tirage : = random(n) ; until (tirage > 0) ;
                          end
                     Else  Repeat x := x + 1 ; tirage : = random(n) ; until (tirage > 0) ;
Writeln(x) ;
End.
```

Partie III

1. _

(a) Là encore le protocole n'intervenant qu'à partir du second tirage, le résultat est exactement le même que celui obtenu dans **I.1.a** (avec le même raisonnement) :

$$\boxed{\mathbf{P}([X=1]) = \frac{1}{2}}$$

(b) Utilisons encore la *formule des probabilités totales* associée au système complet d'événements $\left(U, \overline{U}\right)$, cela donne :

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2,\ \mathbf{P}([X=k]) &= \mathbf{P}_U([X=k])\,\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}([X=k])\,\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \mathbf{P}_U\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_U\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)\right) \qquad (29)
\end{aligned}$$

avec comme dans la question **I.1.b** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_U\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) &= \mathbf{P}_U(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} \text{ car les tirages se font toujours dans } U \qquad (30)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) &= \mathbf{P}_{\overline{U}}(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{B_{k-2}}(B_{k-1})\,\mathbf{P}_{B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right) \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n} \text{ car les tirages se font toujours dans } V \qquad (31)
\end{aligned}$$

Conclusion : selon (29), (30) et (31)

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2,\ \mathbf{P}([X=k]) &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)^{k-1} + n - 1}{n^k}\right) \qquad (32)
\end{aligned}$$

et comme la formule reste valable pour $k=1$ puisque :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)^0 + n - 1}{n^k}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+n-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

alors :

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}([X=k]) = \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{n^k}\right)}$$

(c) X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{(n-1)^{k-1}+n-1}{n^k}\right)$, $k \geq 1$, est convergente. Or comme ce terme général s'exprime comme combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes en tant que *séries dérivées de séries géométriques* de raisons respectivement égales à $\dfrac{n-1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ strictement inférieures à un en valeur absolue. Ainsi X admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k\geq 1} \frac{k}{2}\left(\frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{n^k}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + \left(\frac{n-1}{2n}\right)\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \\
&\quad \text{séparation légitime, toutes les séries sont cvtes} \\
&= \frac{1}{2n}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)^2} + \left(\frac{n-1}{2n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \\
&= \frac{n^2}{2(n-1)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance égale à } \frac{n^2}{2(n-1)}}$$

2. _

(a) Par la *formule des probabilités totales* associée au système complet d'événements $\left(U,\overline{U}\right)$, nous avons pour tout $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=2i]) &= \mathbf{P}_U([Y=2i])\,\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}([Y=2i])\,\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right)\mathbf{P}(U) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right) + \mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right)\right) \qquad (33)
\end{aligned}$$

avec en utilisant le même raisonnement qu'au **III.1.b.** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right) &= \underbrace{\mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\right)}_{\text{noire dans } U}\ \underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right)}_{\text{noire dans } V}\ \mathbf{P}_{\overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\times\cdots\times\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i-2}}}\left(\overline{B_{2i-1}}\right)}_{\text{noire dans } U}\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i-1}}}(B_{2i})}_{\text{blanche dans } V} \\
&= \underbrace{\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}}_{2i-1 \text{ termes dont } i \text{ termes égaux à } \frac{n-1}{n} \text{ et } i-1 \text{ égaux à } \frac{1}{n}}\times\frac{n-1}{n} \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1} \qquad (34)
\end{aligned}$$

car les tirs se font alternativement dans U (à tous les rangs impairs) et dans V (à tous les rangs pairs).

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right) &= \underbrace{\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\right)}_{\text{noire dans } V}\mathbf{P}_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right)\mathbf{P}_{\overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\times\cdots\times\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i-2}}}\left(\overline{B_{2i-1}}\right)}_{\text{noire dans } V}\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i-1}}}\left(B_{2i}\right)}_{\text{blanche dans } U}\\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}}_{2i-1 \text{ termes dont } i \text{ termes égaux à } \frac{1}{n} \text{ et } i-1 \text{ égaux à } \frac{n-1}{n}}\times\frac{1}{n}\\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}\\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \qquad (35)
\end{aligned}$$

car les tirs se font alternativement dans V (à tous les rangs impairs) et dans U (à tous les rangs pairs).

Conclusion : selon (33), (34) et (35)

$$\begin{aligned}
\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}\left([Y=2i]\right) &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{n^2-2n+2}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)^{i-1}}{n^{2i-2}}\right)\left(\frac{n^2-2n+2}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\left(\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}\left([Y=2i]\right)=\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\left(\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\right)}$$

(b) De même en utilisant toujours la *formule des probabilités totales* associée au système complet d'événements $\left(U,\overline{U}\right)$, nous avons pour tout $i\geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([Y=2i+1]\right) &= \mathbf{P}_U\left([Y=2i+1]\right)\mathbf{P}\left(U\right)+\mathbf{P}_{\overline{U}}\left([Y=2i+1]\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\\
&= \mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}\right)\mathbf{P}\left(U\right)+\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}\right)\mathbf{P}\left(\overline{U}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}\right)+\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i+1}\right)\right) \qquad (36)
\end{aligned}$$

avec en utilisant le même raisonnement qu'au **III.2.a.** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}\right) &= \underbrace{\mathbf{P}_U\left(\overline{B_1}\right)}_{\text{noire dans } U}\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right)}_{\text{noire dans } V}\mathbf{P}_{\overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\times\cdots\times\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i-1}}}\left(\overline{B_{2i}}\right)}_{\text{noire dans } V}\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i}}}\left(B_{2i+1}\right)}_{\text{blanche dans } U}\\
&= \underbrace{\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}}_{2i \text{ termes dont } i \text{ termes égaux à } \frac{n-1}{n} \text{ et } i \text{ égaux à } \frac{1}{n}}\times\frac{1}{n}\\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i}\left(\frac{1}{n}\right)^{i}\frac{1}{n}\\
&= \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i}\frac{1}{n} \qquad (37)
\end{aligned}$$

car les tirs se font alternativement dans U (à tous les rangs impairs) et dans V (à tous les rangs pairs).
D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i+1}\right) &= \underbrace{\mathbf{P}_{\overline{U}}\left(\overline{B_1}\right)}_{\text{noire dans } V}\ \underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right)}_{\text{noire dans } U}\ \mathbf{P}_{\overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\times\cdots\times\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i-1}}}\left(\overline{B_{2i}}\right)}_{\text{noire dans } U}\underbrace{\mathbf{P}_{\overline{B_{2i}}}\left(B_{2i+1}\right)}_{\text{blanche dans } V}\\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}}_{2i \text{ termes dont } i \text{ termes égaux à } \frac{1}{n} \text{ et } i \text{ égaux à } \frac{n-1}{n}}\times\frac{n-1}{n}\\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^i\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\frac{n-1}{n}\\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i \qquad (38)
\end{aligned}$$

car les tirs se font alternativement dans V (à tous les rangs impairs) et dans U (à tous les rangs pairs).
Conclusion : selon (36) , (37) et (38)

$$\begin{aligned}
\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Y=2i+1]) &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\left(\frac{1+n-1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}([Y=2i+1])=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i$$

et comme pour $i=0$, $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^i=\frac{1}{2}$ alors que $\mathbf{P}([Y=1])=\frac{1}{2}$ en reprenant le résultat (24) de la question **I.3** puisque les différents protocoles des tirages n'interviennent qu'à partir du deuxième tirage, nous pouvons écrire que :

$$\boxed{\forall i\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([Y=2i+1])=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i}$$

(c) Comme les termes généraux dépend explicitement de n, on notera $\left(\mathbf{E}_{2p}(Y)\right)_p$ et $\left(\mathbf{E}_{2p+1}(Y)\right)_p$ les deux suites extraites, de $\left(\mathbf{E}_p(Y)\right)_p$.

- On pose pour tout entier naturel p non nul $\mathbf{E}_{2p}(Y)=\sum_{k=1}^{2p}k\mathbf{P}([Y=k])$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{2p}(Y) &= \sum_{k=1}^{2p}k\mathbf{P}([Y=k])\\
&= \sum_{i=1}^{p}2i\mathbf{P}([Y=2i])+\sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)\mathbf{P}([Y=k])\\
&= \sum_{i=1}^{p}2i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\left(\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\right)+\sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\\
&= 2\left(\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\right)\sum_{i=1}^{p}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p-1}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\\
&= 2\left(\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\right)\sum_{i=1}^{p}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\left(\frac{n-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{p-1}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons à ce niveau trois sommes partielles de séries convergentes (*série géométrique* et sa *série dérivée* de raison strictement inférieure à un en valeur absolue). Par passage à la limite quand p tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to+\infty} \mathbf{E}_{2p}(Y) &= 2\left(\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\right)\frac{1}{\left(1-\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\right)^2} + \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\left(1-\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n^2}\right)} \\
&= 2\left(\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\right)\frac{n^4}{(n^2-n+1)^2} + n^2\frac{n-1}{(n^2-n+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{n^2}{n^2-n+1} \\
&= \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)} \text{ après simplifications}
\end{aligned}$$

Conclusion : comme la limite existe et est finie :

$$\boxed{\text{la suite } (\mathbf{E}_{2p}(Y))_{p\geq 1} \text{ converge vers } \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$$

- On pose pour tout entier naturel p non nul $\mathbf{E}_{2p+1}(Y) = \sum_{k=1}^{2p+1} k\mathbf{P}([Y=k])$ et nous constatons (au lieu de tout refaire) que :

$$\mathbf{E}_{2p+1}(Y) = \sum_{k=1}^{2p} k\mathbf{P}([Y=k]) + (2p+1)\mathbf{P}([Y=2p+1])$$

avec :

$$\begin{aligned}
(2p+1)\mathbf{P}([Y=2p+1]) &= (2p+1)\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{2p+1} \\
&\underset{p\to+\infty}{\sim} p\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{2p+1} \\
&\underset{p\to+\infty}{\sim} p\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{2p}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$p\left(\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^2\right)^p = p\exp\left(2p\ln\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\right)$$

avec :

$$\lim_{p\to+\infty} p\exp\left(2p\ln\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\right) = 0 \text{ car } \ln\left(\frac{n-1}{n^2}\right) < 0$$

car par croissances comparées $\forall(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$ ainsi :

$$\lim_{p\to+\infty}(2p+1)\mathbf{P}([Y=2p+1]) = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to+\infty}\mathbf{E}_{2p}(Y) &= \lim_{p\to+\infty}\mathbf{E}_{2p+1}(Y) \\
&= \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi les suites extraites de $(\mathbf{E}_p(Y))_{p\geq 1}$, de rang pair et de rang impair, sont convergentes vers une limite commune, ce qui induit que la suite $(\mathbf{E}_p(Y))_{p\geq 1}$ est convergente de limite $\frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty}\mathbf{E}_p(Y) &= \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}k\mathbf{P}([Y=k])\\ &= \mathbf{E}(Y)\\ &= \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance égale à } \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$$

3. _

(a) Lorsque $n=2$,

$$\begin{aligned}\forall k\geq 1,\ \mathbf{P}([X=k]) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(2-1)^{k-1}+2-1}{n^k}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad (39)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Y=2i]) &= \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}\left(\frac{2^2-4+2}{2\times 2^2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{i}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \qquad (40)\\ \forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Y=2i+1]) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2^2}\right)^{i}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} \qquad (41)\end{aligned}$$

Selon (40) et (41) :

$$\begin{aligned}\forall k\geq 1,\ \mathbf{P}([Y=k]) &= \left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad (42)\end{aligned}$$

Conclusion : selon (39) et (42)

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi, la loi } \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(b) Le fait que n soit égal à 2 rend la constitution des deux urnes U et V identiques (le passage de l'une à l'autre urne ne change rien) et dans ce cas les variables X et Y représentent des temps d'attente d'un premier succès (soit la première boule blanche, soit la première boule noire) de probabilité $\frac{1}{2}$ lors d'une série illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

4. Nous avons :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(Y) \leq \mathbf{E}(X) \\
\iff & \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)} \leq \frac{n^2}{2(n-1)} \\
\iff & 6n^2(n-1) \leq 2n^2\left(n^2-n+1\right) \\
\iff & 6n^3-6n^2 \leq 2n^4-2n^3+2n^2 \\
\iff & 2n^4-8n^3+8n^2 \geq 0 \\
\iff & 2n^2(n-2)^2 \geq 0 \text{ ce qui est toujours vrai}
\end{aligned}$$

Ayant raisonné par équivalences successives, nous pouvons affirmer que :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) \leq \mathbf{E}(X)}$$

le cas d'égalité étant trivialement obtenu pour :

$$\boxed{n = 2}$$

5. Voici une proposition de programme :

```
Program edhec_2007ter ;
Var  x, n, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ; Readln(n) ; hasard : = random(2) ; x := 0 ;
If  hasard = 0  then  Repeat x := x + 1 ; tirage : = random(n) ; until (tirage = 0)
                Else      Repeat x := x + 1 ; tirage : = random(n) ; until (tirage > 0) ;
Writeln(x) ;
End.
```