# École Supérieure de Commerce de Lyon

**CONCOURS D'ENTRÉE 1996**

# MATHÉMATIQUES

## 1ère épreuve (option économique)

*Lundi 6 mai 1996 de 8 heures à 12 heures*

**Sont autorisées :**

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

---

**EXERCICE 1**

On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2$ et exprimer $J$ comme combinaison linéaire de $I$ et $A^2$.

2. a. Calculer les valeurs propres de $A$ (les calculs devront figurer sur la copie) ; on trouvera trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que l'on rangera de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   b. Pour chaque entier $k$ de $\{1, 2, 3\}$, calculer un vecteur propre $X_k$ associé à la valeur propre $\lambda_k$ de $A$, tel que l'élément de la première ligne de $X_k$ soit égal à 1.

   c. En déduire une matrice carrée réelle $P$ d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $(1 \;\; 1 \;\; 1)$,

   telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ on ait $A = PDP^{-1}$.

3. Soient a, b, c des réels et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

a. Exprimer M comme combinaison linéaire de I, A, J, puis comme combinaison linéaire de I, A, $A^2$.

b. En déduire une matrice diagonale réelle $\Delta$ d'ordre 3 telle que $M = P\Delta P^{-1}$, où P est la matrice obtenue à la question 2.c.

**EXERCICE 2**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. a. Montrer que la fonction f est paire.
Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$.
(Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

b. Montrer qu'il existe un unique réel $l$ tel que $f(l) = l$. Justifier : $0 \le l \le \dfrac{1}{2}$.

c. Montrer, pour tout réel x :
$$|f'(x)| \le f(x) \le \frac{1}{2}.$$

2. On définit la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel n,} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n :
$$u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

b. Montrer, pour tout entier naturel n :
$$|u_{n+1} - l| \le \frac{1}{2}|u_n - l|, \quad \text{puis } |u_n - l| \le \frac{1}{2^{n+1}}.$$

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l$.

d. Déterminer un entier naturel n tel que $u_n$ soit une valeur approchée de $l$ à $0.5 \times 10^{-3}$ près.
En déduire une valeur approchée décimale de $l$ à $10^{-3}$ près.

## EXERCICE 3

On note $ln$ le logarithme népérien.

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -ln2 \leq x \leq ln2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé. (Unité : 5 cm).

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.

   a. Déterminer la fonction de répartition F de X.

   b. Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.

   c. On pose $Y = |X|$.
   Déterminer la fonction de répartition G de Y.
   Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité g de Y.

## EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

   b. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

3. a. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   b. Trouver un équivalent simple de $I_n$ quand n tend vers $+\infty$.