

## École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

# MATHÉMATIQUES

## 1ère épreuve (option économique)

*Lundi 4 mai 1998 de 8 heures à 12 heures*

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

### Exercice 1

La fonction logarithme népérien est notée  $\ln$ .

1. Soit  $x \in [-1; 1[$ .

a. Montrer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et tout  $t$  de  $[-1; 1[$  :

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

b. En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et tout  $t$  de  $[-1; x]$  :

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.$$

c. Etablir, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}.$$

d. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  converge et a pour somme  $-\ln(1-x)$ .

En particulier, montrer :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$ .

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu  $n$  lancers ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi  $n$  billets dont un seul est gagnant.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

### Exercice 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .  
b. En déduire que  $A$  n'est pas inversible et que  $A$  admet 0 pour unique valeur propre.  
c. Déterminer une base du sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 0.  
d. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. On note, pour tout réel  $a$ ,  $M(a) = I + 2aA + 2a^2A^2$ , et  $E$  l'ensemble des matrices  $M(a)$  lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}$ .  
a. Calculer, pour tout couple  $(a, b)$  de réels, le produit  $M(a)M(b)$  et montrer que ce produit appartient à  $E$ .  
b. En déduire que, pour tout réel  $a$ ,  $M(a)$  est inversible et préciser son inverse.
3. Soit  $a$  un réel non nul.  
a. Montrer que tout vecteur propre de  $A$  est vecteur propre de  $M(a)$ .  
b. Calculer  $(M(a) - I)^3$ .  
En déduire que  $M(a)$  admet 1 pour seule valeur propre.  
Préciser une base du sous-espace propre de  $M(a)$  associé à la valeur propre 1.  
c. La matrice  $M(a)$  est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est  $p$ ,  $0 < p < 1$ ; la proportion de boules blanches est  $1 - p$ .

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note  $N_V$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et  $N_B$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.
  - a. Quelles sont les lois des variables aléatoires  $N_V$  et  $N_B$  ?
  - b. Les variables aléatoires  $N_V$  et  $N_B$  sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  à valeurs dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  de la façon suivante :

pour tout  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $(X = i \text{ et } Y = j)$  est l'évènement

" les  $i$  premières boules tirées sont blanches, les  $j$  suivantes sont vertes et la  $(i + j + 1)^{\text{ième}}$  est blanche  
ou  
les  $i$  premières boules tirées sont vertes, les  $j$  suivantes sont blanches et la  $(i + j + 1)^{\text{ième}}$  est verte ".

Par exemple, pour la suite de tirages  $BBBVVBVBB \dots$  (où  $V$  est mis pour vert et  $B$  pour blanc), on a  $X = 3$  et  $Y = 2$ .

2.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$ .

b. Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance, et que  $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$ .

c. Montrer que  $E(X)$  est minimale lorsque  $p = \frac{1}{2}$ , et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout  $(i, j)$  de  $(\mathbb{N}^*)^2$  :

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j.$$

4.a. En déduire la loi de la variable aléatoire  $Y$ .

b. Montrer que la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance que l'on calculera.

5.a. Etablir que, si  $p \neq \frac{1}{2}$ , les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (on pourra envisager  $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$ ).

b. Démontrer que, si  $p = \frac{1}{2}$ , les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.