École Supérieure de Commerce de Lyon (option scientifique)

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations :

E désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles.
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
E_n désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier naturel non nul k, X^k désigne la fonction polynôme $t \longmapsto t^k$.
Une fonction polynôme P non nulle est dite unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1 (c'est-à-dire que, si d est le degré de P, alors $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, où $a_0,\ a_1, \cdots,\ a_{d-1}$ sont des réels).

PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

1.a. Montrer que, pour toute fonction polynôme P de E, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

b. Pour tout entier naturel k, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$.
Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} . En déduire que $I_k = k!$.

On considère l'application notée $<.,.>$ de $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$<P,Q> = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt\ .$$

2.a. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E_n.

b. Pour tout couple $(i\,,\,j)$ d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n, calculer $<X^i,X^j>$.

Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.

3.a. Construire une famille orthogonale $(Q_0,\ Q_1,\ Q_2)$ de trois fonctions polynômes telle que pour tout k de $\{0,\ 1,\ 2\}$, Q_k soit unitaire et de degré k (on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt).
On vérifiera que $Q_2 = X^2 - 4X + 2$.

b. Montrer pour tout couple (u, v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t} dt = <Q_2,Q_2> + (u+4)^2 <Q_1,Q_1> + (u+v+2)^2 <Q_0,Q_0>\ .$$

c. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui à tout couple (u, v) de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t} dt\ .$$

Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Soit Φ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$$

c'est-à-dire que $\Phi(P)$ est la fonction polynôme définie pour tout réel t par :

$$\Phi(P)(t) = t\,P''(t) + (1-t)P'(t) .$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à Φ relativement à la base canonique $(1,\ X, \cdots, X^n)$ de E_n .

2.a. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Montrer que la famille $\left(\Phi(X^j) + kX^j\right)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ est liée.
En déduire que $-k$ est valeur propre de Φ.

b. Montrer que Φ est diagonalisable.

c. Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.
En déduire que, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi(P_k) = -k\,P_k$.

d. Déterminer, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, le degré de P_k .

e. Vérifier que $P_0 = Q_0,\ \ P_1 = Q_1,\ \ P_2 = Q_2$.

3.a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P, Q) \in (E_n)^2, \quad <\Phi(P), Q> = -\int_0^{+\infty} t\,P'(t)\,Q'(t)\,e^{-t} dt .$$

Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $\left(t \mapsto tP'(t)e^{-t}\right)$ avec la fonction $\left(t \mapsto \Phi(P)(t)\ e^{-t}\right)$.

b. En déduire que Φ est un endomorphisme symétrique de E_n .

c. En déduire que la famille $(P_0,\ P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n .

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

On note $a = 2 + \sqrt{2}$ et $b = 2 - \sqrt{2}$ les deux racines de P_2 .

1.a. Déterminer deux réels α et β tels que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, on ait : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt = \alpha\,P(a) + \beta\,P(b)$.

b. Vérifier : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_2(t)\,e^{-t}\,dt = \alpha\,P_2(a) + \beta\,P_2(b)$.

c. Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 .
Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes Q et R, chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = Q\,P_2 + R$.
Montrer : $<P_2, Q> = 0$.
En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt = \alpha\,P(a) + \beta\,P(b)$.

Dans la suite du problème, on considère une fonction f réelle quatre fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et dont la dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.
Soit M un réel tel que : $\forall t \in [0, +\infty[, \ \ |f^{(4)}(t)| \leqslant M$.

2.a. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme T de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant T(t) .$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t}\, dt$ converge.

b. Soit D l'application de E_3 dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall P \in E_3, \quad D(P) = \Big(P(a),\ P'(a),\ P(b),\ P'(b)\Big) .$$

Montrer que D est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que :

$$S(a) = f(a), \quad S'(a) = f'(a), \quad S(b) = f(b), \quad S'(b) = f'(b) .$$

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b.
On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{\big(P_2(x_0)\big)^2}\big(P_2(t)\big)^2 .$$

a. Vérifier que g s'annule en a, b et x_0 .

b. En déduire que g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b), puis qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$
(On étudiera avec soin le cas $a < x_0 < b$ et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires).

c. En déduire : $$f(x_0) - S(x_0) = \frac{\big(P_2(x_0)\big)^2}{4!} f^{(4)}(c) ,$$

puis : $$\Big|f(x_0) - S(x_0)\Big| \leqslant \frac{\big(P_2(x_0)\big)^2}{4!} M.$$

4.a. Etablir : $$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \Big|f(x) - S(x)\Big| \leqslant \frac{\big(P_2(x)\big)^2}{4!} M .$$

b. En déduire : $$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx - \alpha f(a) - \beta f(b)\right| \leqslant \frac{M}{6} .$$

5. ***Application :***

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par : $f(t) = \dfrac{1}{10 + t}$.

En admettant que $\quad 0.0915 \leqslant \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} f(2 + \sqrt{2}) + \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4} f(2 - \sqrt{2}) \leqslant 0.0916$,

donner une valeur décimale approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10 + t}\, dt$. On en indiquera la précision.