# Correction EML 2007

## Voie économique

La correction comporte 13 pages.

## Exercice 1

1. Comme la matrice $A$ est *symétrique réelle*, elle est donc $\boxed{\text{diagonalisable}}$ d'après le cours.

2. $A$ étant diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale. Il existe donc une matrice $P$ inversible et une matrice diagonale $D$, toutes deux carrées d'ordre trois telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Commençons par chercher le spectre de $A$.
Nous pourrions chercher classiquement une réduite de Gauss de la matrice $A - \lambda I_3$ où $\lambda$ est une valeur propre de $A$ et $I_3$ la matrice identité, mais nous pouvons aller bien plus vite en constatant deux points :

- la somme des éléments de chaque colonne vaut systématiquement 1, donc :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A \text{ de vecteur colonne propre } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- D'autre part en examinant de près la matrice $A$ on voit clairement que $A + \frac{1}{2}I_3$ est non inversible. Ainsi :

$$\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est valeur propre de } A}$$

Cherchons l'espace propre associé à $-\frac{1}{2}$. Notons-le $E_{-\frac{1}{2}}(A)$. Il est défini par :

$$\begin{aligned} E_{-\frac{1}{2}}(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -\frac{1}{2}X \right\} \\ &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x+y+z = 0 \right\} \\ &= Vect\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

**Nota bene :** ces deux vecteurs ont été choisis de manière à respecter la consigne demandant de construire une matrice de passage qui soit symétrique et telle que sa première ligne soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et sa deuxième $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Avons-nous pour autant terminé le travail ? Réponse oui, car d'après le cours nous savons que la somme des dimensions des sous-espaces propres doit être égale à trois puisque $A$ est une matrice carrée d'ordre trois et diagonalisable. D'après le cours chacune des dimensions des sous-espaces propres est supérieure ou égale à 1. Or comme les colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non nulles et non proportionnelles, elles forment une *famille libre* de $E_{-\frac{1}{2}}(A)$ qui est donc

de dimension deux. Mécaniquement cela impose que $\dim E_1(A) = 1$.
**Conclusion :**

$$\boxed{SpecA = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} \quad \text{et} \quad A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Un calcul sans commentaire particulier, utilisant la *méthode du pivot de Gauss*, donne :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

3. Une démonstration classique faite par *récurrence* nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

car l'initialisation est immédiate :

$$\begin{aligned} A^0 &= PD^0P^{-1} \\ &= PI_3P^{-1} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

Supposons que pour $n$ fixé dans $\mathbb{N}$, nous ayons $A^n = PD^nP^{-1}$. Or :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

La proposition est transmissible et donc héréditaire pour tout entier naturel $n$.
Le lecteur prendra aussi le soin de démontrer par *récurrence* que $D^n$ reste une matrice diagonale dont les coefficient diagonaux sont constitués de ceux de $D$ à la puissance $n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 1 & 0 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

4. _

(a) Montrons que la proposition $\mathcal{P}_n$ : "$X_n = A^nX_0$" est vraie pour tout entier $n$.
- L'initialisation est vérifiée pour $n = 0$ car $A^0 = I_3$ et $X_0 = A^0X_0$.

- Supposons que pour $n$ fixé dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
- Nous avons :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^nX_0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1}X_0 \end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \text{ et la proposition } \mathcal{P}_n \text{ est héréditaire pour tout entier naturel } n}$$

(b) Le résultat de la question précédente nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right) - w_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right) - v_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right) \\ v_0\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right) - w_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right) - u_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right) \\ w_0\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right) - v_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right) - u_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0+v_0+w_0+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2u_0-v_0-w_0) \\ u_0+v_0+w_0-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_0-2v_0+w_0) \\ u_0+v_0+w_0-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_0+v_0-2w_0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0+v_0+w_0+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(3u_0-u_0-v_0-w_0) \\ u_0+v_0+w_0-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_0+v_0+w_0-3v_0) \\ u_0+v_0+w_0-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_0+v_0+w_0-3w_0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(3u_0-1) \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(1-3v_0) \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(1-3w_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(v_0-\frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(w_0-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** nous avons bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\frac{1}{3}\right) \\ v_n &= \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(v_0-\frac{1}{3}\right) \\ w_n &= \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(w_0-\frac{1}{3}\right) \end{aligned} \right.}$$

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ du fait que $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ nous pouvons dire sans difficulté que :

$$\boxed{u=v=w=\frac{1}{3}}$$

(d) On note pour tout entier $n$, $d_n=\sqrt{(u_n-u)^2+(v_n-v)^2+(w_n-w)^2}$ soit :

$$\begin{aligned}
d_n &= \sqrt{\left(u_n-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v_n-\frac{1}{3}\right)^2+\left(w_n-\frac{1}{3}\right)^2}\\
&= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(u_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(w_0-\frac{1}{3}\right)^2}\\
&= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\left[\left(u_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(w_0-\frac{1}{3}\right)^2\right]}\\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left[\left(u_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(w_0-\frac{1}{3}\right)^2\right]}\\
&\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\right]}
\end{aligned}$$

car par hypothèse $u_0+v_0+w_0=1$ avec $(u_0,v_0,w_0)\in(\mathbb{R}_+)^3$ donc $(u_0,v_0,w_0)\in([0,1])^3$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N},\ d_n &\leq \sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \text{ et à fortiori}\\
d_n &\leq \sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}\\
&\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}\\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad d_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}}$$

(e) Pour déterminer un entier naturel $n$ tel que $d_n\leq 10^{-2}$, il suffit de trouver $n$ tel que :

$$\frac{1}{2^{n-1}}\leq 10^{-2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& -(n-1)\ln 2\leq -2\ln 10 \text{ car } \ln \text{ est strictement sur } \mathbb{R}_+^*\\
\Longrightarrow\ & n-1\geq\frac{2\ln 10}{\ln 2}\\
\Longrightarrow\ & n\geq\frac{2\ln 10}{\ln 2}+1
\end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{\text{dès que } n \text{ est supérieur ou égal à } n_0=\left\lfloor\frac{2\ln 10}{\ln 2}+1\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2\ln 10}{\ln 2}\right\rfloor+1 \text{ nous avons } d_n\leq 10^{-2}}$$

# Exercice 2

## Préliminaire

1. La fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = x^2 + \ln x$ est continue et dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de telles fonctions, avec :

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2+1}{x} \\ &> 0 \text{ (signe immédiat)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

- Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ nous pouvons dire que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty}$$

- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ nous pouvons dire que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$$

2. Les résultats de la question précédente nous permettent d'affirmer que $g$ étant continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, $g$ réalise une bijection sur cet ensemble vers $g\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}$. Enfin comme $0 \in g\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ nous pouvons dire :

$$\boxed{\text{il existe un unique réel } x \text{ noté } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } g(\alpha) = 0}$$

3. Comme $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \ln 2 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$ nous avons $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \times g(1) < 0$ et nous pouvons situer $\alpha$ strictement entre $\dfrac{1}{2}$ et 1. Autrement dit :

$$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$$

## Partie A

On note $I = \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ et nous considérons l'application $f : I \longmapsto \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}\ln x$.

1. _

   (a) Tout d'abord $f$ est continue et dérivable sur le segment $I$ en tant somme de telles fonctions avec :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = -\frac{1}{4x}\left(2x^2 - 4x + 1\right)$$

   Le discriminant réduit, du trinôme du second degré définissant le numérateur de la dérivée, étant strictement positif, nous pouvons affirmer qu'il admet deux racines distinctes qui sont après calcul :

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$$

   Alors en utilisant les *règles du signe d'un trinôme du second degré*, nous povons affirmer que $f' > 0$ sur $I$, autrement dit :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left[\frac{1}{2}; 1\right]}$$

(b) _

- Tout d'abord signalons que :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln 2+\frac{7}{16} \\ \text{et } f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2} &= \frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{16} \\ &= \frac{4\ln 2-1}{16} \\ &> 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{1}{2}<f\left(\frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

- L'inégalité :

$$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1) \tag{2}$$

est une des conséquences de la croissance stricte de $f$ sur $I$.

- Enfin :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1-\frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \\ &< 1 \end{aligned} \tag{3}$$

**Conséquence :** selon (1), (2), (3) nous avons :

$$\boxed{\frac{1}{2}<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)<1} \tag{4}$$

(c) Le résultat (4) de la question précédente, associé à la stricte croissance de $f$ sur $I$, nous montre l'implication :

$$\forall x\in I \implies f(x)\in\left]\frac{1}{2};1\right[\subset I$$

et donc :

$$\boxed{\forall x\in I \implies f(x)\in I}$$

**Nota bene :** on dit que $I$ *est un intervalle stable pour* $f$ et comme il contient le premier terme de la suite définie ci-dessous, nous pouvons que celle-ci est bien *définie*.

2. Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ (*suite récurrente d'ordre un*).

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ &= f(1) \text{ par définition} \\ &= \boxed{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

(b) Nous pouvons dire que $I$ étant stable par $f$ et comme $I$ contient le premier terme de la suite :

$$\boxed{\text{la suite est à valeurs dans } I}$$

Maintenant vous pouvez aussi démontrer ce résultat par *récurrence*.

- L'initialisation ne pose aucun problème puisque $u_0 = 1 \in I$.
- Supposons que pour $n$ fixé dans $\mathbb{N}$, $u_n \in I$.
- Nous savons que $u_{n+1} = f(u_n)$ où selon l'hypothèse de récurrence $u_n \in I$ avec $I$ intervalle stable par $f$, donc $u_{n+1} \in I$.
  **Conclusion** :
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I}$$

(c) Nous savons que la fonction $f$ définissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, ainsi la suite est *monotone*. Son sens de variation étant donné par le signe de $u_1 - u_0 = \dfrac{3}{4} - 1 < 0$. Ainsi :
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

(d) Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par $\dfrac{1}{2}$), le *théorème de convergence monotone* nous assure que la suite converge vers une limite $l$ verifiant $l \in I$ et $l = f(l)$ puisque $f$ est continue sur $I$. La résolution dans $I$ de l'équation $l = f(l)$ nous donnant d'après le préliminaire une solution unique $l = \alpha$, la conclusion est donc :
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente vers } \alpha}$$

## Partie B

Considérons $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto F(x,y) = xe^y + y\ln x$.

1. _

(a) Détaillons ...

- $\varphi_1 : (x,y) \longmapsto y\ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant produit d'une fonction polynôme de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et d'une fonction composée d'une fonction polynôme de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de ln qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
- $\varphi_2 : (x,y) \longmapsto xe^y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant produit d'une fonction polynôme de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et d'une fonction composée d'une fonction polynôme de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de exp qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  **Conclusion :** $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}}$ en tant que somme de telles fonctions $(F = \varphi_1 + \varphi_2)$.

(b) Cherchons les points critiques $(a_0, b_0)$ de $F$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Ces points vérifient par définition :
$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_0,b_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a_0,b_0) = 0$$
Des calculs rapides donnent :
$$\begin{aligned}
\begin{cases} \dfrac{y_0 + x_0 e^{y_0}}{x_0} = 0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \end{cases}
&\iff \begin{cases} y_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{\ln x_0} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ \ln x_0 + x_0^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = \ln \alpha \\ x_0 = \alpha \end{cases} \quad \text{selon le préliminaire}
\end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{F \text{ n'admet sur l'ouvert } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ qu'un seul point critique : } (\alpha, \ln \alpha)}$$

2. Comme nous étudions $F$ sur un ouvert, si $F$ admet un extremum c'est forcément au point critique trouvé à la question précédente. $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (la démonstration étant exactement identique à la question **1.a**). Nous avons après quelques calculs rapides :

- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2}$
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = xe^y$
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{xe^y + 1}{x}$ le *théorème de Schwarz* s'applique ici.

  Examinons maintenant la nature du point critique $(\alpha, \ln \alpha)$. Pour cela calculons $rt - s^2$ en notant :

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\alpha, \ln \alpha) \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\alpha, \ln \alpha) \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\alpha, \ln \alpha)$$

  Cela nous donne facilement :

$$\begin{aligned}
rt - s^2 &= \left(\frac{-\ln \alpha}{\alpha^2}\right)\left(\alpha e^{\ln \alpha}\right) - \left(\frac{\alpha e^{\ln \alpha} + 1}{\alpha}\right)^2 \\
&= -\ln \alpha - \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)^2 \\
&= -\ln \alpha - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\
&= -\left(\frac{2\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^2 \ln \alpha + 1}{\alpha^2}\right) \\
&= -\left(\frac{2\alpha^2 + \alpha^2 g(\alpha) + 1}{\alpha^2}\right) \\
&= -\left(\frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2}\right) \\
&< 0
\end{aligned}$$

  La stricte négativité du résultat nous permet de dire que :

$$\boxed{F \text{ ne présente pas d'extremmu local au point } (\alpha, \ln \alpha)}$$

# Exercice 3

1. Cette question ne pose aucun problème en introduisant une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, alors une de ses densité pourrait être $f$ sans aucun problème.

2. _

   (a) Remarquez que le constat précédent nous fait écrire que $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$.
   Par définition, nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y = 0]) &= \mathbf{P}([X < 1]) \\
&= F_X(1) \text{ où } F_X \text{ est la fonction de répartition de } X \\
&= 1 - e^{-1} \qquad (5) \\
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Y = n]) &= \mathbf{P}([n \leq X < n + 1]) \\
&= F_X(n + 1) - F_X(n) \\
&= \left(1 - e^{-(n+1)}\right) - \left(1 - e^{-n}\right) \\
&= e^{-n} - e^{-(n+1)} \\
&= e^{-n}\left(1 - e^{-1}\right) \qquad (6)
\end{aligned}$$

Selon (5) et (6) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([Y = n]) = e^{-n}\left(1 - e^{-1}\right)}$$

(b) La variable $Y+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{P}([Y+1 = n]) &= \mathbf{P}([Y = n-1]) \\ &= e^{-(n-1)}\left(1 - e^{-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

Comme d'après le cours, $Y+1$ admet admet une espérance et une variance (en tant que variable géométrique), $Y$ admet donc une espérance et une variance , respectivement égales[1] à :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}(Y+1) - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} - 1 \\ &= \boxed{\frac{1}{e-1}} \\ \mathbf{V}(Y) &= \mathbf{V}(Y+1) \ \text{ par propriété de } \mathbf{V} \\ &= \frac{\frac{1}{e}}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} \\ &= \boxed{\frac{e}{(e-1)^2}}\end{aligned}$$

**Nota bene :** nous pouvions constater que $Y = \lfloor X \rfloor$ mais l'énoncé ne l'a pas précisé pour ne pas faire peur peut-être !

(c) Il s'agit de simuler une expérience de loi géométrique pour $Y+1$. On fait un tirage au sort, répété jusqu'au premier succès (la probabilité du succès est $p = 1 - \frac{1}{e}$).
Comme `random` fournit une valeur équiprobable sur $[0,1[$, on considère que ses valeurs sur $\left[0, 1 - \frac{1}{e}\right]$ correspondent à la réussite de l'expérience, et sur $\left]1 - \frac{1}{e}, 1\right[$ à son échec. $Y+1$ correspondra au rang du premier succès (à partir de 1) donc $Y$ sera ce rang moins un.

```
program em12007;
begin
    randomize;
    u:=random; y:=1;
    while (u>1-1/e) do
    begin
    u:=random;
    y:=y+1;
    end;
    y:=y-1;
    writeln('y vaut ', y);
end.
```

[1] On rappelle les équivalences suivantes :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid \quad aX + b \text{ admet une espérance} \iff X \text{ admet une espérance}$$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid \quad aX + b \text{ admet une variance} \iff X \text{ admet une variance}$$

3. _

(a) $\boxed{\heartsuit\heartsuit\heartsuit}$ La variable $T$ admet une espérance en tant que produit de deux variables, $2U-1$ et $Y$, admettant chacune un *moment d'ordre deux.* Avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(T) &= \mathbf{E}((2U-1)Y) \\ &= \mathbf{E}(2U-1)\,\mathbf{E}(Y) \text{ par linéarité de l'espérance et car } U \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= (2\mathbf{E}(U)-1)\,\mathbf{E}(Y) \\ &= \left(2\times\frac{1}{2}-1\right)\mathbf{E}(Y) \text{ car } U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

(b) Vérifions ...

$$\begin{aligned}T^2 &= \left((2U-1)^2 Y^2\right) \\ &= 4U^2Y^2 - 4UY^2 + Y^2 \\ &= 4UY^2 - 4UY^2 + Y^2 \\ &= \boxed{Y^2}\end{aligned}$$

$\boxed{\heartsuit\heartsuit\heartsuit}$ Car du fait que $U$ suit une *loi de Bernoulli*, nous avons l'égalité $U^2 = U$. En effet :

$$\begin{aligned}&\forall\omega\in\Omega,\quad U(\omega)=1 \iff U^2(\omega)=1 \quad \text{puisque } U(\Omega)=\{0,1\} \\ \text{et}\quad &\forall\omega\in\Omega,\quad U(\omega)=0 \iff U^2(\omega)=0 \quad \text{puisque } U(\Omega)=\{0,1\}\end{aligned}$$

Comme $Y^2$ admet une espérance, $T^2$ en admet une aussi. Autrement dit $T$ admet une variance égale selon le *théorème de Huygens-Koenig* à :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(T) &= \mathbf{E}\left(T^2\right) - (\mathbf{E}(T))^2 \\ &= \mathbf{E}\left(Y^2\right) \\ &= \mathbf{V}(Y) + (\mathbf{E}(Y))^2 \text{ selon le } \textit{théorème de Huygens-Koenig} \\ &= \frac{e}{(e-1)^2} + \left(\frac{1}{e-1}\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{e+1}{(e-1)^2}}\end{aligned}$$

(c) Nous avons $T(\Omega) = \mathbb{Z}$ avec :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad \mathbf{P}([T=n]) = \mathbf{P}([T=n]\cap[U=0]) + \mathbf{P}([T=n]\cap[U=1])$$

car les événement $[U=0]$ et $[U=1]$ constituent un *système complet d'événements.* Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{Z},\ \mathbf{P}([T=n]) &= \mathbf{P}([(2U-1)Y=n]\cap[U=0]) + \mathbf{P}([(2U-1)Y=n]\cap[U=1]) \\ &= \mathbf{P}([-Y=n]\cap[U=0]) + \mathbf{P}([Y=n]\cap[U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=-n]\cap[U=0]) + \mathbf{P}([Y=n]\cap[U=1])\end{aligned}$$

Discutons maintenant :

- si $n=0$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([T=0]) &= \mathbf{P}([Y=0]\cap[U=0]) + \mathbf{P}([Y=0]\cap[U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=0])\,\mathbf{P}([U=0]) + \mathbf{P}([Y=0])\,\mathbf{P}([U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=0]) \\ &= 1-e^{-1} \qquad (7)\end{aligned}$$

- si $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([T=n]) &= \mathbf{P}([Y=-n]\cap[U=0]) + \mathbf{P}([Y=n]\cap[U=1]) \\
&= \mathbf{P}(\varnothing\cap[U=0]) + \mathbf{P}([Y=n]\cap[U=1]) \text{ car } Y \text{ est une variable positive} \\
&= \mathbf{P}([Y=n]\cap[U=1]) \\
&= \mathbf{P}([Y=n])\,\mathbf{P}([U=1]) \text{ par indépendance de } U \text{ et } Y \\
&= \frac{1}{2}e^{-n}\left(1-e^{-1}\right) \qquad (8)
\end{aligned}$$

- si $n \in \mathbb{Z}_-^*$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([T=n]) &= \mathbf{P}([Y=-n]\cap[U=0]) + \mathbf{P}([Y=n]\cap[U=1]) \\
&= \mathbf{P}([Y=-n]\cap[U=0]) + \mathbf{P}(\varnothing\cap[U=1]) \text{ car } Y \text{ est une variable positive} \\
&= \mathbf{P}([Y=-n]\cap[U=0]) \text{ avec } -n \in \mathbb{N}^* \\
&= \mathbf{P}([Y=-n])\,\mathbf{P}([U=0]) \qquad (9) \\
&= \frac{1}{2}e^{n}\left(1-e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

**Conclusion :** selon (7) , (8) et (9)

$$\boxed{\mathbf{P}([T=0]) = 1-e^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathbf{P}([T=n]) = \frac{e^{-|n|}}{2}\left(1-e^{-1}\right)}$$

4. • _

(a) Signalons pour commencer que la variable $D$ est associée à la *partie décimale de la varible* $X$ puisque l'on rappelle que $Y = \lfloor X \rfloor$ , donc $D = X - \lfloor X \rfloor$ . Alors la variable $D$ est à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$ car rappelons encore que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1$, puisque, par définition $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$. Par conséquent en notant $F_D$ la fonction de répartition de la variable $D$ nous pouvons immédiatement dire que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} F_D(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ F_D(t) = 1 & \text{si} \quad t \ge 1 \end{array}}$$

(b) Comme la famille des événements $([Y=n])_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un *système complet d'événements* nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,1[\,,\ \ [D \leq t] &= [D \leq t] \biguplus \Omega \text{ où } \biguplus \text{ désigne une union disjointe} \\
&= ([D \leq t]) \bigcap \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}} [Y = n] \right) \\
&= \biguplus_{n \in \mathbb{N}} \left( [D \leq t] \bigcap [Y = n] \right) \text{ par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\
&= ([D \leq t] \cap [Y = 0]) \biguplus \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}^*} ([D \leq t] \cap [Y = n]) \right) \\
&= ([X - Y \leq t] \cap [Y = 0]) \biguplus \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}^*} ([X - Y \leq t] \cap [Y = n]) \right) \\
&= \left( \underbrace{[X \leq t] \cap [Y = 0]}_{=[X \leq t]} \right) \biguplus \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}^*} ([X - n \leq t] \cap [n \leq X < n+1]) \right) \\
&= ([X \leq t]) \biguplus \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq n + t] \cap [n \leq X < n+1]) \right) \\
&= ([X \leq t]) \biguplus \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}^*} ([n \leq X < \min(n+t, n+1)]) \right) \\
&= ([X \leq t]) \biguplus \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}^*} ([n \leq X < n+t]) \right) \\
&= ([0 \leq X \leq 0+t]) \biguplus \left( \biguplus_{n \in \mathbb{N}^*} ([n \leq X < n+t]) \right) \\
&= \biguplus_{n \in \mathbb{N}} ([n \leq X < n+t])
\end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{\forall t \in [0,1[\,, \quad [D \leq t] = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} ([n \leq X < n+t])}$$

(c) Pour tout $t \in [0,1[$ et pour tout nombre entier naturel $n$, comme $0 \leq n \leq n+t$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([n \leq X < n+t]) &= \int_n^{n+t} e^{-x} dx \\
&= \left[-e^{-x}\right]_n^{n+t} \\
&= e^{-n}\left(1 - e^{-t}\right)
\end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{\forall t \in [0,1[\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad | \quad 0 \leq n \leq n+t, \quad \mathbf{P}([n \leq X < n+t]) = e^{-n}(1 - e^{-t})}$$

(d) Pour tout nombre réel $t \in [0,1[$ et pour tout nombre entier naturel $n$ :

$$\begin{aligned}
F_D(t) &= \mathbf{P}\left(\left[\biguplus_{n\in\mathbb{N}} ([n \le X < n+t])\right]\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left([([n \le X < n+t])]\right) \text{ par } \sigma - \textit{additivité} \text{ de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(F_X(n+t) - F_X(n)\right) \text{ car } X \text{ est une variable à densité} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(1-e^{-(t+n)}\right) - \left(1-e^{-n}\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\left(1-e^{-t}\right) \\
&= \left(1-e^{-t}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n \quad \textit{somme de série géométrique} \\
& \quad \text{de raison } \frac{1}{e} \text{ tel que } \left|\frac{1}{e}\right| < 1 \\
&= \frac{1-e^{-t}}{1-\dfrac{1}{e}} \\
&= \boxed{\frac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}}
\end{aligned}$$

(e) Faisons le bilan :

$$\boxed{F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}} & \text{si} \quad t \in [0,1[ \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 1 \end{cases}}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim\limits_{-\infty} F_D = 0$,
- $\lim\limits_{+\infty} F_D = 1$,
- $F_D$ est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle),
- $F_D$ est continue sur $[1, +\infty[$ (fonction constante égale à 1),
- $F_D$ est continue sur $[0,1[$ (composition de $t \longmapsto -t : \mathcal{C}^0$ sur $[0,1[$ et $\exp : \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$),
- $\lim\limits_{0^-} F_D = 0 = \lim\limits_{0^+} F_D = F_D(0)$,
- $\lim\limits_{1^-} F_D = 0 = \lim\limits_{1^+} F_D = F_D(1)$ donc $F_D$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  D'autre part $F_D$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et 1 ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que $D$ est une variable à densité dont une densité $f_D$ est obtenue par dérivation de $F_D$ sur $\mathbb{R}^*$ nous obtenons $f_D$ une densité de $D$ et nous poserons que $f_D(0) = f_D(1) = 0$. Cela donne :

$$\boxed{f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[ \\ \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-1}} & \text{si} \quad t \in ]0,1[ \end{cases}}$$

✠✠✠✠✠