

Groupe C

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

SESSION DE 1991

Les variables aléatoires X que nous considérerons dans ce problème sont de deux types :

- 1° X est à valeurs dans $\alpha\mathbb{Z} + \beta$ pour un couple (α, β) de nombres réels ;
- 2° la loi de X admet une densité f , strictement positive et continue sur un intervalle fermé I ; de plus f est nulle en dehors de I .

I

Soit X une variable aléatoire. On note F sa fonction de répartition (c'est-à-dire que, pour tout nombre réel x , on a $F(x) = P(X \leq x)$). On note $M(X)$ l'ensemble :

$$\{m \in \mathbb{R} : P(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m)\}.$$

Un élément de $M(X)$ est appelé *médiane* de X .

1. Prouver que $M(X)$ est un segment. Montrer que ce segment est réduit à un point lorsque X est du type 2° (on pourra étudier F).
2. Déterminer $M(X)$ dans les cas suivants :
 - a. X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$;
 - b. X suit la loi binomiale $B(n, 1/2)$;
 - c. X suit la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$;
 - d. X suit la loi exponentielle de paramètre λ .
3.
 - a. Soit a un nombre réel.
Prouver que $M(aX) = \{am : m \in M(X)\}$ et que $M(X + a) = \{a + m : m \in M(X)\}$.
 - b. L'assertion suivante est-elle exacte : pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{Z} on a $M(X + Y) = \{m + m' : m \in M(X), m' \in M(Y)\}$?
4. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre un.
 - a. Est-il exact que $E(X) \in M(X)$?
 - b. Démontrer que si X admet un moment d'ordre deux, on a pour toute médiane m de X :
$$|m - E(X)| \leq \sqrt{2 \sigma^2(X)}$$
où $\sigma^2(X)$ désigne la variance de X .

A SUIVRE

II

Pour tout entier non nul n , on note P_n la fonction qui à un nombre réel λ associe :

$$P_n(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$$

et on définit :

$$I_n = \int_0^1 ((1-x)e^x)^n dx.$$

A

1.

a. Établir l'identité :

$$1 - P_n(\lambda) = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-x} x^n dx.$$

b. En déduire une relation entre $P_n(n)$ et I_n .

Soit ψ la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}$$

et pour tout x de $]0, 1[$:

$$\psi(x) = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2}.$$

2. Prouver que ψ est une bijection croissante de $]0, 1[$ sur $[1/2, +\infty[$.

3. Soit $\sigma \in]0, 1[$, on pose :

$$\delta = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

où ψ^{-1} désigne l'application réciproque de ψ . Établir l'encadrement :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} \exp(-x^2/2) dx \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. En déduire un équivalent pour I_n puis établir que, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$1 - P_n(n) \sim \frac{n^n}{n!} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

B

Soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1.

1. Prouver que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre n .

2. En déduire que $P_n(n)$ tend vers $1/2$ lorsque n tend vers l'infini.

3. Trouver alors un équivalent pour $n!$ lorsque n tend vers l'infini.

Tournez la page S.V.P.

C

1. Soit n un entier non nul, vérifier que pour tout réel λ , on a :

$$P_n(\lambda) + P'_n(\lambda) = P_{n-1}(\lambda).$$

2. a. En appliquant une formule de Taylor à l'ordre 2, démontrer que la suite $(P_n(n))$ est strictement décroissante.
b. Procéder de manière analogue pour prouver que la suite $(P_{n-1}(n))$ est strictement croissante.
c. Prouver que les suites $(P_{n-1}(n))$ et $(P_n(n))$ sont adjacentes.
3. En déduire que si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre entier n , on a $M(X) = \{n\}$.

III

Soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose tout au long de cette troisième partie que l'une des trois hypothèses suivantes est satisfaite :

- a. X_1 suit une loi normale centrée et réduite ;
b. X_1 suit une loi de Poisson de paramètre 1 ;
c. $X_1/2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

Pour tout entier $k \in [1, n]$ on pose alors $Y_k = X_k - E(X_k)$, puis $T_k = \sum_{j \leq k} Y_j$.

1. a. Vérifier que Y_1 est une variable aléatoire centrée et réduite.
b. Montrer que, pour tout entier $k \in [1, n]$, la variable aléatoire $T_n - T_k$ est bien du type 1^o ou du type 2^o et que, de plus, 0 est une médiane de $T_n - T_k$.
2. Soit x, ε deux nombres réels positifs. Pour tout entier $k \in [1, n]$, on note Ω_k l'événement $(\max_{j < k} T_j \leq x, T_k > x)$ pour $k \geq 2$ ou $(T_1 > x)$ pour $k = 1$.
a. Pour tout entier $k \in [1, n]$, démontrer les inclusions suivantes :
(i) $(T_n - T_k \geq 0) \cap \Omega_k \subset (T_n > x) \cap \Omega_k$
(ii) $(T_n - T_k > 0) \cap \Omega_k \supset (T_n > x + \varepsilon) \cap \Omega_k \cap (Y_k < \varepsilon)$.

- b. En déduire l'encadrement :

$$P(T_n > x + \varepsilon) - \sum_{j=1}^n P(Y_j \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2} P(\max_{j \leq n} T_j > x) \leq P(T_n > x).$$

3. Soit θ un nombre réel strictement positif. Montrer que $\sum_{j=1}^n P(Y_j \geq \theta \sqrt{n})$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel positif λ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{j \leq n} T_j > \lambda \sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{+\infty} \exp(-x^2/2) dx.$$

Que se passe-t-il lorsque λ est négatif ?

FIN