

---

**ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS**

**CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES**

**MATHEMATIQUES III**

OPTION ECONOMIQUE

**Mercredi 15 mai 1996, de 14 h à 18 h**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

**Seules sont autorisées :**

*Règles graduées.*

*Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.*

---

**EXERCICE I**

On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ . Dans tout l'exercice on associe à tout nombre réel  $a$  les vecteurs  $U_a, V_a$  et  $W_a$  définis par :

$$U_a = e_1 + 2e_2 + e_3$$

$$V_a = -e_1 + (a - 3)e_2 + (a - 1)e_3$$

$$W_a = -2e_1 - 4e_2 + ae_3$$

et l'endomorphisme  $\Phi_a$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par les conditions :

$$\Phi_a(e_1) = U_a, \quad \Phi_a(e_2) = V_a, \quad \Phi_a(e_3) = W_a.$$

1. Montrer que  $\Phi_0$  est un automorphisme et déterminer la matrice de son automorphisme réciproque, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
2.
  - a) Déterminer les valeurs du paramètre  $a$  pour lesquelles  $\Phi_a$  est un automorphisme.
  - b) Déterminer, pour chaque valeur du paramètre  $a$ , le noyau de  $\Phi_a$ .
  - c) Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles le vecteur  $e_1 - e_2 - e_3$  appartient à l'image de  $\Phi_a$ .
3. On considère maintenant les trois vecteurs :

$$f_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$$

$$f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3$$

$$f_3 = e_3.$$

- a) Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la matrice de  $\Phi_1$  dans cette base.
- b) L'endomorphisme  $\Phi_1$  est-il diagonalisable ?

4. a) Déterminer les valeurs propres de  $\Phi_{-2}$ .  
 b) Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

## EXERCICE II

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(1) = 1$  et

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{\ln x}{2} \quad \text{si } x \neq 1.$$

1. Montrer que  $f$  est une fonction continue sur  $]0, +\infty[$ .
2. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  sur les intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ . Etudier son signe et en déduire que  $f$  est monotone sur chacun de ces deux intervalles.
3. Montrer que pour tout  $x$  strictement positif et différent de 1, la dérivée  $f'$  de  $f$  vérifie  $f'(x) = \frac{(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$ . En déduire que  $f$  est dérivable au point 1 et déterminer  $f'(1)$ . Montrer que  $f'$  est continue sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
4. Montrer que, pour tout  $x > 1$ , on a  $\ln x < (x-1)$ . En déduire que, pour tout  $x > 1$ , on a  $f(x) < x$ .
5. Donner la représentation graphique de la fonction  $f$ .
6. Soit  $a$  un réel supérieur à 1.
  - a) Montrer qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  de réels vérifiant  $x_0 = a$  et, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ .
  - b) Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle admet une limite  $\ell$  que l'on précisera.
7. On se propose d'étudier la vitesse avec laquelle la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $\ell$ .
  - a) Montrer qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $|f(x_n) - \ell| \leq \frac{1}{3}|x_n - \ell|$  pour tout  $n \geq n_0$ .
  - b) En déduire que la suite  $(x_n - \ell)_{n \geq 0}$  est négligeable devant la suite  $(1/2^n)_{n \geq 0}$ .

### EXERCICE III

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers strictement positifs.

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont  $p$  pour les blanches,  $q$  pour les noires et  $r$  pour les rouges ( $p+q+r=1$ ).

On fait dans cette urne des tirages successifs indépendants numérotés 1, 2, ... etc. Ces tirages sont faits avec remise de la boule tirée. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

Toutes les variables aléatoires sont définies dans un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

1. On note  $X_1$  la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de  $X_1$  ; calculer son espérance et sa variance.
2. On note  $X_2$  la variable aléatoire représentant le numéro du deuxième tirage d'une boule blanche.
  - a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs  $(k, l)$ , la probabilité de l'événement  $\{X_1 = k, X_2 = k + l\}$ . En déduire la loi de probabilité de  $X_2$ .
  - b) Montrer que la variable  $U_2 = X_2 - X_1$  est indépendante de  $X_1$  et qu'elle a la même loi de probabilité. En déduire l'espérance et la variance de  $X_2$ .
3. On note  $W$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Pour tout couple  $(k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ , déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement  $\{W = l\}$  sachant que  $X_1 = k$ . Quelle est la loi conditionnelle de  $W$  sachant  $X_1$  ?
4. On note  $Y_1$  la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.
  - a) Trouver la loi de probabilité du couple  $(X_1, Y_1)$ . Les variables aléatoires  $X_1$  et  $Y_1$  sont elles indépendantes ?
  - b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où  $r = 0$  (c'est à dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de  $X_1$  et  $Y_1$ .
5. Soit, pour  $n$  entier strictement positif,  $Z_n$  la variable aléatoire qui prend la valeur  $+1$  si au  $n^{\text{ième}}$  tirage une boule blanche est tirée,  $-1$  si au  $n^{\text{ième}}$  tirage une boule noire est tirée,  $0$  si au  $n^{\text{ième}}$  tirage une boule rouge est tirée. On note  $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ .
  - a) Trouver la loi de probabilité de  $S_1$ . Calculer son espérance et sa variance ; en déduire l'espérance et la variance de  $S_n$  pour tout  $n \geq 1$ .
  - b) Soit  $t$  un réel strictement positif. On pose  $V_n = t^{S_n}$ . Trouver la loi de probabilité de la variable  $V_1$  et calculer son espérance.
  - c) En déduire l'espérance de  $V_n$ .