OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

mardi 29 avril 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

EXERCICE I

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, $\mathbf{u}$ l'application identique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui même et I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$, représentant $\mathbf{u}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathbf{f}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{f}$. L'endomorphisme $\mathbf{f}$ est-il diagonalisable ?

2. Etant donné un couple (a, b) de réels, déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $a\mathbf{f} + b\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de (a, b) cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. Quelles relations le couple (a, b) doit-il vérifier pour que l'endomorphisme $a\mathbf{f} + b\mathbf{u}$ soit inversible ? Montrer que l'inverse de $a\mathbf{f} + b\mathbf{u}$, quand il existe, est de la forme $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{u}$ où λ et μ sont des réels dont on donnera l'expression en fonction de a et b.

On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices T de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est à dire qui vérifient $AT = TA$.

4. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

5. Pour une matrice T de la forme $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, calculer $AT - TA$. En déduire une base de $\mathcal{E}$ et sa dimension.

6. Soit $\mathbf{\Phi}$ l'application de $M_3(\mathbb{R})$ dans lui même qui fait correspondre à la matrice T la matrice $AT - TA$. Montrer que $\mathbf{\Phi}$ est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$. Donner une base du noyau et une base de l'image de $\mathbf{\Phi}$.

EXERCICE II

Dans tout l'exercice λ désignera un réel strictement positif et f_λ sera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$, pour tout réel x.
Le but de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **a)** Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$, d'inconnue x, admet une seule racine dans $\mathbb{R}$ et que cette racine appartient à $]0,1[$. On note ℓ_λ cette racine.

b) Montrer que, si $\lambda > \dfrac{e}{2}$, alors $\ell_\lambda > \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

2. On suppose dans cette question que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $\max\limits_{x\in[0,1]} |f'_\lambda(x)| < 1$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ_λ.

On revient au cas général, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On pose $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.

a) Montrer que g_λ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

4. **a)** Montrer que les racines éventuelles de l'équation $g_\lambda(x) = x$ appartiennent à $]0,1[$.
Vérifier que ℓ_λ est une racine de cette dernière équation.

b) Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $g_\lambda(x) = x$ si et seulement si $\ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln\lambda = 0$.

c) Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $h_\lambda(x) = \ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln\lambda$.
Montrer que la fonction h_λ est dérivable sur $]0,1[$ et que $h'_\lambda(x)$ a le signe opposé de celui de $1 + 4\lambda x^2 \ln x$.

d) Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $k_\lambda(x) = 1 + 4\lambda x^2 \ln x$. Dresser le tableau de variation de la fonction k_λ.

e) On se place désormais dans le cas où $\lambda > \dfrac{e}{2}$.

- Montrer que, dans ce cas, $k_\lambda(\ell_\lambda) < 0$.
- Dresser le tableau de variation de la fonction h_λ et en déduire que l'équation $g_\lambda(x) = x$ admet trois racines μ_λ, ℓ_λ, ν_λ vérifiant $0 < \mu_\lambda < \ell_\lambda < \nu_\lambda < 1$.
- Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers μ_λ et ν_λ respectivement.

EXERCICE III

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne pile est a, et que la probabilité que la pièce B donne pile est b.

1. a) Pour tout entier naturel n, calculer la probabilité μ_n que la pièce A donne n fois pile et, à la $(n+1)$-ième expérience, face pour la première fois. Calculer de même la probabilité ν_n que la pièce B donne n piles et, à la $(n+1)$-ième expérience, face pour la première fois.

   b) Montrer que les suites $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissent des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$. Ces lois seront notées dorénavant respectivement μ et ν.

2. On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et dont les lois de probabilité sont respectivement μ et ν. (La variable aléatoire X représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne face pour la première fois et la variable aléatoire Y représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne face pour la première fois).

   a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

   b) Trouver, pour tout entier naturel k, la valeur de $P(X \geq k)$.

   c) On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $P(M \geq k)$. En déduire la loi de probabilité de M.

   d) Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas face avant la pièce A, c'est-à-dire $P(Y \geq X)$.

3. On note $U = X + Y$.

   a) Déterminer la loi de probabilité de U. (On distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$).

   b) Calculer, pour tout couple (j, k) d'entiers naturels, les probabilités conditionnelles $P(Y = k \,/\, U = j)$.

4. On suppose désormais que $a = b$. On note $V = Y - X$.

   a) Calculer, pour tout entier naturel k et tout entier relatif r, la probabilité de l'événement $(M = k \text{ et } V = r)$. (On distinguera le cas $r \geq 0$ et le cas $r < 0$).

   b) Trouver la loi de probabilité de V. Les variables aléatoires M et V sont-elles indépendantes?