OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

mardi 29 avril 1997, de 8 h à 12 h

Le problème traite de quelques propriétés des polynômes de HERMITE qui constituent une famille orthogonale pour un certain produit scalaire qui sera étudié dans ce problème .
On notera $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. l'espace vectoriel des polynomes de degré inférieur ou égal à n) y compris le polynôme nul.
Pour tout entier naturel k le polynôme X^k se confond avec la fonction polynomiale réelle $x \mapsto x^k$, en particulier X^0 est la fonction constante égale à 1.
On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.
Enfin on rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Partie I

Trois résultats utiles par la suite.

1) a) Pour tout entier naturel n, justifier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

b) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité : $I_n = (n-1)\,I_{n-2}$.

c) Soit n un entier naturel. Donner la valeur de I_{2n+1} et montrer que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

d) Pour toute fonction polynomiale P, justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

2) On rappelle que si une suite de terme général v_n est telle que les deux sous-suites de termes généraux v_{2n} et v_{2n+1} convergent vers le même réel l alors la suite (v_n) est elle-même convergente de limite l.

Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \dfrac{C^n}{[\frac{n}{2}]!}$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{C^{2n}}{n!}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

b) Montrer que la série de terme général $u_{2k} + u_{2k+1}$ (où $k \in \mathbf{N}$) converge et donner sa somme.

c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n et la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3) Soit a un réel strictement positif et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ pour laquelle existe un réel positif K tel que, pour tout entier n :

$$\underset{t \in [-a,a]}{Max} |g^{(n)}(t)| \leqslant \frac{K^n n!}{[\frac{n}{2}]!}$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in [-a, a]$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt = 0$$

b) En déduire l'égalité suivante, valable pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

Quelle simplification obtient-on si g coïncide sur $[-a, a]$ avec une fonction polynomiale de degré d ?

PARTIE II

Les polynômes de Hermite.

1) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x)\,dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|.\|$ la norme associée.

   Ainsi si n est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X], \langle .,.\rangle)$ un espace euclidien.

2) A l'aide de la base $(1, X, X^2, X^3)$ construire une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X], \langle .,.\rangle)$ formée de polynômes dont le coefficient de plus haut degré est 1.

   Pour tout entier naturel n on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} (e^{\frac{-x^2}{2}})^{(n)}$$

   où selon l'usage $f^{(n)}(x)$ désigne la valeur en x de la dérivée $n^{ième}$ de f (en particulier $f^{(0)}(x) = f(x)$).

3) a) Pour tout réel x calculer $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir les relations

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \tag{1}$$

et

$$H'_n = nH_{n-1} \tag{2}$$

   Pour établir (1)*on pourra remarquer que* $(e^{\frac{-x^2}{2}})^{(n+1)} = (-xe^{\frac{-x^2}{2}})^{(n)}$.

   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.

4) On dispose du
   Type
   Poly = **array**[0..20] **of integer**;
   On nommera de la même façon un polynôme de degré au plus 20 et la variable de type Poly obtenue en stockant dans la case numéro k, $0 \leqslant k \leqslant 20$, le coefficient de X^k dudit polynôme.

   a) Ecrire la partie instruction (i.e. sans les déclarations) d'une procédure PASCAL dont l'en-tête est
   Procedure MULTIX (P, **Var** Q :Poly);
   qui stocke dans Q les coefficients du polynôme XP, P étant un polynôme de degré au plus 19.

   b) A l'aide de (1) écrire la partie instruction d'une procédure PASCAL dont l'en-tête est
   Procedure HERMITE (n :**integer**;**Var** H :Poly);
   qui, étant donné un entier $n, 2 \leqslant n \leqslant 20$, stocke les coefficients de H_n dans une variable de **Type** Poly.

PARTIE III

$(H_n)_{n\geqslant 0}$ comme famille de polynômes orthogonaux.

1) a) Montrer que si P est un polynôme et n un entier naturel non nul alors $\lim_{x \to +\infty} P(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n-1)} = 0$. De même on montrerait et **on admet** que $\lim_{x \to -\infty} P(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n-1)} = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ calculer

$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Pour n non nul on utilisera la définition de H_n.

c) Soit $(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. En remarquant que $\langle H_n, H_m\rangle = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n)} dx$

et à l'aide d'une intégration par parties qu'on effectuera avec soin montrer que

$$\langle H_n, H_m\rangle = m\langle H_{n-1}, H_{m-1}\rangle$$

En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbf{R}[X]$. Pour $n \in \mathbf{N}$, que vaut $\langle H_n, H_n\rangle$?

2) a) Soit $k \in \mathbf{N}$ et R une fonction polynomiale de degré au plus k ; Que vaut $\langle H_{k+1}, R\rangle$?

b) Soit n un entier naturel, k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$ et P un polynôme de degré au plus k. Etablir l'égalité

$$\left\|X^{k+1} - P\right\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$$

où $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$. *On pourra calculer $\langle H_{k+1}, Q - P\rangle$.*

Quelle est, dans l'espace euclidien $(\mathbf{R}_{n+1}[X], \langle .,.\rangle)$, la projection orthogonale de X^{k+1} sur le sous-espace vectoriel $\mathbf{R}_k[X]$?

c) On note $(G_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ la famille orthonormale de $(\mathbf{R}_{n+1}[X], \langle .,.\rangle)$ obtenue par le procédé de SCHMIDT à partir de la base $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$. Pour tout $k, 0 \leqslant k \leqslant n+1$, déterminer G_k en fonction de $H_0, H_1, \ldots, H_{n+1}$.

PARTIE IV

Soit n un entier naturel non nul.

1) Soit P un polynôme de degré au plus n. Justifier l'égalité suivante : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle P, H_k\rangle \frac{H_k}{k!}$

2) Pour tout couple (b,c) de réels vérifiant $b \leqslant c$ on **admet** qu'il existe un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout entier n et tout $x \in [b,c]$: $\left|\dfrac{H_n(x)}{n!}\right| \leqslant \dfrac{K^n}{[\frac{n}{2}]!}$

a) Soit x un réel donné. A l'aide du 2) de la partie I établir, pour tout réel λ, la convergence de la série de terme général $\dfrac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$.

b) Soit g_x (x est toujours un réel fixé) la fonction définie pour tout réel λ par $g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}$.

Pour tout réel λ et tout entier naturel n calculer $g_x^{(n)}(\lambda)$(c'est-à-dire $\dfrac{d^n g_x}{d\lambda^n}(\lambda)$) en fonction de H_n.

Montrer que g_x vérifie les hypothèses du 3) de la partie I et en déduire que pour tout $(x,\lambda) \in \mathbf{R}^2$

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$$

c) On note exp la fonction $x \mapsto e^x$. Pour tout entier naturel n justifier rapidement la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

dont, par analogie, on note $\langle \exp, H_n\rangle$ la valeur. Calculer $\langle \exp, H_n\rangle$ puis,pour tout réel x, conclure à l'égalité

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n\rangle \frac{H_n(x)}{n!}$$

Pour calculer $\langle \exp, H_n\rangle$ on pourra utiliser la définition de H_n et intégrer par parties (avec soin) afin d'obtenir $\langle \exp, H_n\rangle = \langle \exp, H_{n-1}\rangle$.