ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

OPTION SCIENTIFIQUE

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

L'objet de ce problème est l'étude d'un algorithme d'approximation d'une racine carrée de certains éléments de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la construction d'une suite convergeant vers un élément dont le carré est donné.

Partie I. Algorithme de Newton dans $\mathbb{R}$.

Soit a un réel strictement positif.

1) a) Donner le tableau de variation de la fonction définie, pour x élément de $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

b) Justifier rapidement l'existence de la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 = a$ et de la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.

c) Pour tout entier naturel n, établir les égalités :

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 \qquad et \qquad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2x_{n+1}}(a - x_{n+1}^2)$$

d) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

2) a) Pour tout entier naturel n non nul, prouver les inégalités :

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2$$

b) Soit b un réel strictement positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs vérifiant l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant bu_n^2$ pour tout entier naturel n non nul.

Pour tout entier naturel n non nul, donner une majoration de u_n en fonction de n, b, u_1.

c) En déduire, pour tout entier n non nul, une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, x_1 et a.

3) a) En décrivant pas à pas les premières étapes de l'algorithme, que dire du résultat rendu par le programme suivant quand on l'exécute?

```
program racine_carree ;
function rc(a,x,eps :real) :real ;
begin
if abs(x*x-a)<eps then rc :=x else begin x :=1/2*(x+a/x) ;
                                          rc :=rc(a,x,eps) ;
                                   end ;
end ;
begin
writeln(rc(2,2,1e-16)) ;
end.
```

b) On rappelle les inégalités : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

Montrer que, lors de l'exécution du programme précédent, le nombre de comparaisons effectuées est inférieur ou égal à six. *On supposera le type real suffisamment étendu pour pouvoir manipuler des nombres à une précision d'au moins vingt décimales.*

Partie II. Algorithme de Newton dans $\mathbb{C}$

On se propose dans cette partie d'adapter la méthode de Newton à la recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe a, c'est-à-dire d'approcher un nombre complexe dont le carré vaut a. Dans toute cette partie a désigne un nombre complexe qui n'est pas un réel négatif ou nul.

On note $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z.

1) a) Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b de partie réelle strictement positive tel que $b^2 = a$.

On note $\mathcal{P}_+ = \left\{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e\left(\frac{z}{b}\right) > 0\right\}$.

b) Dans cette sous-question (et uniquement ici) on suppose que $a = 2i$. Déterminer le nombre b dans ce cas particulier et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est élément de $\mathcal{P}_+$.

2) On revient au cas général (où le complexe a n'est pas un réel négatif ou nul) et on considère l'application f définie pour tout nombre complexe z non nul par : $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a}{z}\right)$.

Établir l'inclusion : $f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+$.

3) On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $z_0 = a$ et par la relation de récurrence : $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout entier naturel n.

On pose également : $w_n = \dfrac{z_n - b}{z_n + b}$ pour tout entier naturel n.

a) Justifier l'existence des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, w_n en fonction de w_{n-1}, puis, pour tout entier naturel n, w_n en fonction de w_0 et n.

4) Prouver la majoration : $|w_0| < 1$. En déduire la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III. Racine carrée d'une matrice.

Dans cette partie n désigne un entier naturel au moins égal à 2.

- On note $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels ayant n lignes et n colonnes.
- On note $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à coefficients réels ayant n lignes et une colonne.
- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle dont on note $\|.\|$ la norme.
- On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux éléments de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de telle sorte que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ on écrira Mx pour $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Soit A une matrice carrée à coefficients réels. On appelle racine carrée de A toute matrice B vérifiant $B^2 = A$.

A. Quelques exemples

1) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

2) On se propose, dans cette question, de généraliser le résultat de la question précédente.

On considère l'élément de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j est nul sauf si $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $j = i+1$ auquel cas il vaut 1.

On suppose qu'il existe une matrice B racine carrée de A et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant, dans la base canonique, B pour matrice.

a) L'endomorphisme g est-il bijectif?

b) Prouver que $\operatorname{Im} g$ est stable par g (c'est-à-dire que $g(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g$), puis que la restriction de g à $\operatorname{Im} g$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} g$.

c) Que vaut g^{2n} ? En déduire que la matrice A n'a pas de racine carrée.

3) Donner un exemple d'élément de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ possédant une infinité de racines carrées.

B. Racine carrée d'une matrice symétrique strictement positive

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de $\mathcal{S}_n$ dont les valeurs propres sont strictement positives. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques réelles strictement positives. On suppose désormais que A est un élément de $\mathcal{S}_n^+$.

1) Montrer que A admet une racine carrée symétrique réelle strictement positive. *On pourra commencer par le cas où A est diagonale.*

2) Soit B et C deux racines carrées symétriques réelles strictement positives de A.

a) Justifier l'existence de deux matrices P et Q inversibles et de deux matrices diagonales D et Δ telles que : $A = P D^2\, {}^tP = Q \Delta^2\, {}^tQ$.

b) En déduire l'existence d'une matrice inversible R telle que $RD^2 = \Delta^2 R$.

Établir l'égalité : $RD = \Delta R$. *On comparera les coefficients de ligne i et de colonne j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de ces deux matrices.*

c) Conclure qu'il existe une unique racine carrée de A symétrique réelle strictement positive, qu'on notera $A^{1/2}$.

Jusqu'à la fin de cette partie B, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant p$, E_j le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_j.

3) Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant p$ et pour tout réel x, on pose :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

a) Montrer que la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré strictement inférieur à p.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme P à coefficients réels de degré strictement inférieur à p tel que, pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, p\}$, $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

c) i) Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant p$, et pour tout vecteur x_j de E_j, calculer $P(A)(x_j)$ et en déduire l'égalité : $P(A)^2 = A$.

ii) Montrer que les valeurs propres de $P(A)$ sont toutes strictement positives.

iii) Conclure à l'égalité :

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i}\ L_i(A)$$

4) **Un exemple**

On considère les éléments de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ suivants :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad A = \begin{pmatrix} n & -1 & \ldots & \ldots & -1 \\ -1 & n & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \ldots & \ldots & -1 & n \end{pmatrix}$$

U est donc la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et A celle dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut n si $i = j$ et -1 sinon.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de U et A.

b) Exprimer $A^{1/2}$ en fonction de A et I_n (matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$).

Partie IV. Algorithme de Newton dans $\mathcal{S}_n^+$.

Dans toute cette partie on considère un élément A de $\mathcal{S}_n^+$ et une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, le vecteur propre e_i étant, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, associé à la valeur propre λ_i (les réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement distincts).

1) Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+$ dont $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres. On note $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres correspondantes (i.e. $Me_i = \mu_i e_i$, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$).

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est encore une base de vecteurs propres de la matrice $M' = \frac{1}{2}(M + M^{-1}A)$.
Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, quelle relation existe-t-il entre la valeur propre μ_i' de M' associée à e_i et μ_i ?

2) a) Déduire de la question précédente qu'il est possible de définir une suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^+$ telle que : $A_0 = A$ et, pour tout entier naturel k, $A_{k+1} = \frac{1}{2}\left(A_k + A_k^{-1}A\right)$.

b) Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $\lambda_{i,k}$ la valeur propre de A_k associée à e_i.
Étudier, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la convergence de la suite $(\lambda_{i,k})_{k \in \mathbf{N}}$.

3) On dit qu'une suite $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ converge vers la matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ s'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \|M_k \varepsilon_i - M\varepsilon_i\| = 0$.

Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers $A^{1/2}$.