Correction ESSEC 2007

Voie économique

La correction comporte 15 pages.

Exercice 1 : suites et calcul matriciel

1. _

(a) En effectuant le produit matriciel (licite car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) nous obtenons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad AX_n = X_{n+1}}$$

(b) Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$:"$X_n = A^n X_0$" est vraie pour tout entier n.

- L'initialisation est bien vérifiée car $A^0 = I$ et donc $X_0 = IX_0$.
- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}$, la proposition soit vérifiée.
- Montrons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Or nous avons :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^n X_0 \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons dire que $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ (la proposition est transmissible) et selon le premier principe de récurrence la proposition est héréditaire, à savoir que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0}$$

2. _

(a) λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ est non inversible soit si et seulement si une réduite de Gauss de $A - \lambda I$ est non inversible. Cherchons alors une réduite de Gauss de $A - \lambda I$ à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

$$\begin{aligned}
A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - (3-\lambda) L_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2+5\lambda-7 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+5\lambda-7 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \left(-\lambda^2+5\lambda-7\right) L_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-2)^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$A - \lambda I$ est non inversible si et seulement si la réduite de Gauss obtenue est non inversible, soit si et seulement si l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \in \{2\}$.

Conclusion :

$$\boxed{sp(A) = \{2\}}$$

(b) Il n'est pas utile de déterminer le sous-espace propre de A pour conclure que celle-ci n'est pas diagonalisable. En effet il suffit de dire que du fait que A n'est pas scalaire (c'est-à-dire que A n'est pas proportionnelle à I), A n'est pas diagonalisable. Cependant répondons à la question.

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \text{ et } y - z = 0 \right\} \\ &= \boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)} \end{aligned}$$

Comme $\dim E_2(A) = 1$ alors que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nous pouvons conclure que :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3. _

(a) _

- Tout d'abord nous prendrons de manière évidente $\boxed{e_1' = (0,1,1)}$ en reprenant la question précédente, car par définition de T, e_1' est un vecteur propre de valeur propre associée 2 (de surcroit nous vérifions la contrainte de l'énoncé imposant que la troisième composante soit égale à 1).
- Cherchons maintenant $e_2' = (x, y, -1)$ tel que $f(e_2') = e_1' + 2e_2'$ ce qui se traduit matriciellement par :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3x - y - 1 \\ x + 2y \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y + 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous ramène à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Nous pourrons prendre :

$$\boxed{e_2' = (1, 0, -1)}$$

- Cherchons enfin $e_3' = (x, y, 2)$ tel que $f(e_3') = e_2' + 2e_3'$ ce qui se traduit matriciellement par :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3x - y + 2 \\ x + 2y \\ y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ 2y \\ 3 \end{pmatrix}$$

ce qui nous ramène à la résolution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=-1 \\ x=0 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Nous pourrons prendre :

$$\boxed{e'_3=(0,1,2)}$$

(b) D'après la décomposition donnée, T s'écrit $T=2I+J$ où nous posons :

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme J est une matrice triangulaire stricte, nous pouvons dire que J est **nilpotente** d'ordre au plus égal à 3. Comme un calcul rapide nous donne :

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_3=0 \tag{1}$$

une petite récurrence, qu'on laisse faire au lecteur montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_3, \quad J^n=0$$

Comme les matrices $2I$ et J commutent, nous pouvons appliquer la *formule du binôme de Newton* pour obtenir T^n, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ T^n &= (2I+J)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I)^{n-k}J^k \\
&= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}(2I)^{n-k}J^k \text{ selon } (1) \\
&= \binom{n}{0}(2I)^n J^0+\binom{n}{1}(2I)^{n-1}J^1+\binom{n}{2}(2I)^{n-2}J^2 \\
&= 2^n I+n2^{n-1}J+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}J^2 \\
&= 2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n=\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

Une petie vérification s'impose et on voit que tour à tour pour $n=0$ et pour $n=1$ nous retrouvons bien respectivement I et T.

4. _

(a) D'après la cours, c'est la *formule du changement de base appliquée à la matrice d'un endomorphisme* :

$$A=PTP^{-1}$$

et par une récurrence ultra-classique démontrons que $\mathcal{R}_n$:"$A^n=PT^nP^{-1}$" est vraie pour tout entier n.

- L'initialisation est bien vérifiée car $A^0 = I$ et $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$.
- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}$, la proposition soit vérifiée.
- Montrons que $\mathcal{R}_{n+1}$ soit vraie. Or nous avons :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA \\ &= PT^nP^{-1}PTP^{-1} \\ &= PT^nTP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons dire que $\mathcal{R}_n \Longrightarrow \mathcal{R}_{n+1}$ (la proposition est transmissible) et selon le *premier principe de récurrence* la proposition est héréditaire, à savoir que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Après quelques calculs à présenter sur la copie comme demandé :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Selon la question **1.b :**

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n\left(\frac{1}{2}n+1\right) & -\frac{1}{2}2^nn & \frac{1}{2}2^nn \\ \frac{1}{8}2^nn(n+3) & 2^n\left(-\frac{1}{8}n^2+\frac{1}{8}n+1\right) & 2^{n-3}n(n-1) \\ 2^{n-3}n(n-1) & -\frac{1}{8}2^nn(n-5) & 2^n\left(\frac{1}{8}n^2-\frac{5}{8}n+1\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & -\frac{1}{2}2^nn & \frac{1}{2}2^nn \\ 2^{n-3}n(n+3) & 2^n\left(-\frac{1}{8}n^2+\frac{1}{8}n+1\right) & 2^{n-3}n(n-1) \\ 2^{n-3}n(n-1) & -\frac{1}{8}2^nn(n-5) & 2^n\left(\frac{1}{8}n^2-\frac{5}{8}n+1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) \\ 2^{n-3}n(n+3) \\ 2^{n-3}n(n-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = 2^n\left(\frac{1}{2}n+1\right) \\ v_n = 2^{n-3}n(n+3) \\ w_n = 2^{n-3}n(n-1) \end{cases}}$$

Problème : probabilités

I Préliminaires

1. _

(a) Rappelons pour commencer que si X est une variable suivant la loi exponentielle de paramètre λ, nous pouvons prendre comme densité associée, la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Il est de notoriété publique que F_X sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

alors la **fonction d'antirépartition** demandée, qui à tout réel x associe le nombre réel $\mathbf{P}([X > x])$ appartenant à $[0,1]$ est définie par :

$$\boxed{\mathbf{P}([X > x]) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

(b) Signalons que pour tout réel x strictement positif, la probabilité $\mathbf{P}([X > x])$ est non nulle, donc la probabilité conditionnelle demandée a bien un sens. Elle vaut :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \mathbf{P}_{[X>x]}([X > x+y]) &= \frac{\mathbf{P}([X > x+y] \cap [X > x])}{\mathbf{P}([X > x])} \text{ par définition} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > x+y])}{\mathbf{P}([X > x])} \text{ car } [X > x+y] \subset [X > x] \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} \\ &= \frac{e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}}{e^{-\lambda x}} \text{ par propriété de } \exp \\ &= e^{-\lambda y} \\ &= \mathbf{P}([X > y]) \end{aligned}$$

Cette propriété exprime qu'un phénomène A "ne vieillit pas" : si A a duré plus que x unité de temps, alors il durera encore y unités de temps supplémentaires avec la même probabilité qu'un phénomène analogue à A qui viendrait d'apparaître. La propriété est donc une propriété d'**absence de mémoire** (le phénomène A ne se souvient pas "d'avoir vieilli").

2. _

(a) La variable S_n admet une espérance et une variance en tant que somme de variables aléatoires admettant chacune une espérance et une variance. Ainsi par *linéarité de l'espérance* :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{E}(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) \\ &= n\mathbf{E}(X_1) \text{ car toutes les variables } X_k \text{ suivent la même loi} \\ &= \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

D'autre part par *indépendance* des variables aléatoires X_k :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{V}(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) \\ &= n\mathbf{V}(X_1) \text{ car toutes les variables suivent la même loi} \\ &= \frac{n}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

(b) Pratiquons le **produit de convolution** bien familiers à vos camarades d'ECS, pour démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_n$:

$$S_n \text{ admet pour densité la fonction } f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

est vraie pour tout entier n non nul.

- L'initialisation est bien vérifiée pour $n = 1$ selon (2) car :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{(1-1)!} e^{-\lambda t} t^{1-1} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases} \\ &= f_X(t) \end{aligned}$$

- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, la proposition soit vérifiée.
- Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Or nous avons :

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

avec selon le **théorème de convolution** donné par l'énoncé, utilisable car les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes :

$$f_{S_{n+1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(x) f_{X_{n+1}}(t-x)\, dx$$

La variable S_{n+1} est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ ainsi $f_{S_{n+1}}$ est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. D'autre part le produit $f_{S_n}(x) f_{X_{n+1}}(t-x)$ est non nul si et seulement si $x \geq 0$ et $t - x \geq 0$ ce qui équivaut à dire que $0 \leq x \leq t$, donc :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0,\ f_{S_{n+1}}(t) &= \int_0^t f_{S_n}(x) f_{X_{n+1}}(t-x)\, dx \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda(t-x)} dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda t} dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^t \\ &= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \frac{t^n}{n} \\ &= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t} t^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons dire que $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ (la proposition est transmissible) et selon le *premier principe de récurrence* la proposition est héréditaire, à savoir que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \text{ admet pour densité la fonction } f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}}$$

II Loi de Pareto

1. _

- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f$ et $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} f$ convergent. Or par définition de f qui coïncide avec la fonction nulle sur l'intervalle $]-\infty, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f$ converge. D'autre part par continuité de $t \longmapsto a\dfrac{b^a}{t^{a+1}}$ sur $[b, +\infty[$ l'intégrale $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} f$ ne présente qu'une seule impropreté, en $+\infty$. Mais nous pouvons dire que l'intégrale $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} a\frac{b^a}{t^{a+1}}dt$ converge en tant qu'intégrale proportionnelle à une *intégrale de Riemann* (de paramètre $\alpha + 1$) si et seulement si $a+1 > 1$ soit si et seulement si $a > 0$, ce qui est l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} a\frac{b^a}{t^{a+1}}dt$ converge.
  Conclusion :
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ converge}}$$
  Calculons sa valeur :
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f &= \int_{-\infty}^{b} f + \int_{b}^{+\infty} f \text{ par } \textit{Chasles}\\
&= 0 + \lim_{A\to+\infty}\int_{b}^{A} a\frac{b^a}{t^{a+1}}dt \text{ par convergence de l'intégrale}\\
&= \lim_{A\to+\infty} ab^a\left[\frac{t^{-a}}{-a}\right]_b^A\\
&= \lim_{A\to+\infty} ab^a\left(\frac{A^{-a}}{-a} + \frac{b^{-a}}{a}\right) \text{ car } \lim_{A\to+\infty} A^{-a} = 0 \text{ puisque } a > 0\\
&= \frac{ab^a}{ab^a}\\
&= 1
\end{aligned}$$
  Conclusion :
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1}$$

- X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} a\frac{b^a}{t^a}dt$ est convergente, par définition de f qui coïncide avec la fonction nulle sur $]-\infty, b[$. Cette intégrale est convergente en tant qu'intégrale proportionnelle à une intégrale de Riemann si et seulement si son paramètre a est strictement supérieur à 1. Moralité X admet une espérance si et seulement si $a > 1$, avec :
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_{b}^{+\infty} a\frac{b^a}{t^a}dt\\
&= \lim_{A\to+\infty}\int_{b}^{A} a\frac{b^a}{t^a}dt \text{ par définition de la convergence}\\
&= \lim_{A\to+\infty} ab^a\left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_b^A\\
&= \lim_{A\to+\infty} ab^a\left(\frac{A^{-a+1}}{-a+1} - \frac{b^{-a+1}}{-a+1}\right)\\
&= \frac{ab^ab^{-a+1}}{a-1} \text{ car } \lim_{A\to+\infty} A^{-a+1} = 0 \text{ puisque } a > 1\\
&= \frac{ab}{a-1}
\end{aligned}$$
  Conclusion :
$$\boxed{X \text{ admet une espérance égale à } \frac{ab}{a-1}}$$

- X admet une variance si et seulement si X admet un ordre deux. Et X admet un moment d'ordre deux si et seulement si $\displaystyle\int_b^{+\infty} a\frac{b^a}{t^{a-1}}dt$ est convergente, par définition de f qui coïncide avec la fonction nulle sur $]-\infty, b[$. Cette intégrale est convergente en tant qu'intégrale proportionnelle à une *intégrale de Riemann* si et seulement si son paramètre $a-1$ est strictement supérieur à 1. Moralité X admet un moment d'ordre deux, donc une variance lorsque $a > 2$, avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \int_b^{+\infty} a\frac{b^a}{t^{a-1}}dt \\
&= \lim_{A\to+\infty}\int_b^A a\frac{b^a}{t^{a-1}}dt \\
&= \lim_{A\to+\infty} ab^a\left[\frac{t^{-a+2}}{-a+2}\right]_b^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} ab^a\left(\frac{A^{-a+2}}{-a+2}-\frac{b^{-a+2}}{-a+2}\right) \\
&= \frac{ab^ab^{-a+2}}{a-2} \text{ car } \lim_{A\to+\infty} A^{-a+2} = 0 \text{ puisque } a > 2 \\
&= \frac{ab^2}{a-2}
\end{aligned}$$

Conclusion : selon le *théorème de Huygens-Koenig* X admet une variance égale à

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}(X))^2 \\
&= \frac{ab^2}{a-2} - \left(\frac{ab}{a-1}\right)^2 \\
&= \boxed{\frac{ab^2}{(a-2)(a-1)^2}}
\end{aligned}$$

2. Soit F_X la fonction de répartition de X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < b \\ \displaystyle\int_{-\infty}^b 0 + \int_b^x a\frac{b^a}{t^{a+1}}dt & \text{si} \quad x \geq b \end{cases} \quad \text{par } \textit{Chasles} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < b \\ ab^a\left[\dfrac{t^{-a}}{-a}\right]_b^x & \text{si} \quad x \geq b \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < b \\ ab^a\left(\dfrac{x^{-a}}{-a}+\dfrac{b^{-a}}{a}\right) & \text{si} \quad x \geq b \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < b \\ 1-\left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si} \quad x \geq b \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < b \\ 1-\left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si} \quad x \geq b \end{cases}}$$

et donc la fonction d'antirépartition, ou fonction de survie est définie par :

$$\boxed{\mathbf{P}([X > x]) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < b \\ \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si} \quad x \geq b \end{cases}}$$

3. Nous constatons pour commencer que, d'après le résultat précédent, pour tout réel x strictement positif, la probabilité $\mathbf{P}([X > x])$ est non nulle, donc la probabilité conditionnelle demandée a bien un sens. Elle vaut :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \mathbf{P}_{[X>x]}([X > x+y]) &= \frac{\mathbf{P}([X > x+y] \cap [X > x])}{\mathbf{P}([X > x])} \text{ par définition} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > x+y])}{\mathbf{P}([X > x])} \text{ car } [X > x+y] \subset [X > x]\end{aligned}$$

et pour x suffisament grand (donc supérieur à b), et tel que $x+y$ soit aussi supérieur à b, nous avons:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>x]}([X > x+y]) &= \frac{\left(\dfrac{b}{x+y}\right)^a}{\left(\dfrac{b}{x}\right)^a} \\ &= \left(\frac{x}{x+y}\right)^a\end{aligned}$$

puis par passage à la limite quand x tend vers l'infini, cela donne :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = 1$$

car $\dfrac{x}{x+y} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{x}$ et l'application $t \longmapsto t^a$ est continue en 1.
De cela nous pouvons en déduire :

> plus le temps de survie d'un phénomène (modélisé par la loi de Pareto) est grand, plus la probabilité est grande que le phénomène n'ait pas la mémoire de son vieillissement

4. Pour obtenir la loi de la variable $Y = \ln\left(\dfrac{X}{b}\right)$ il nous faut chercher d'abord sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

elle nous confirmera, par ses propriétés, si Y reste une variable à densité, car elle obtenue à partir d'un changement de variable, et l'on sait très bien qu'effectuer un changement de variable sur une variable à densité ne présage de rien quand à la nature de la nouvelle variable obtenue. Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ du fait que $X(\Omega) = [b, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[\ln \dfrac{X}{b} \leq x\right]\right) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[\dfrac{X}{b} \leq e^x\right]\right) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbf{P}([X \leq be^x]) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ F_X(be^x) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \left(\dfrac{b}{be^x}\right)^a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

A ce niveau-là toutes les informations tombent en même temps :

> Y reste une variable à densité et suit la loi exponentielle de paramètre a

III Estimation des paramètres d'une loi de Pareto

1. _

   (a) • Nous avons :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in ([\beta, +\infty[)^n\,,\ \mathcal{L}(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} \left(\alpha \frac{\beta^\alpha}{x_k^{\alpha+1}}\right) = \alpha^n \frac{\beta^{n\alpha}}{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\alpha+1}}$$

   • Avant de commencer nous devons signaler que nous pouvons calculer $\ln \mathcal{L}(\alpha)$ car $\mathcal{L}$ est à valeurs strictement positives. De plus les réels α et β sont strictement positifs ainsi que tous les réels x_k pour $k \in [|1, n|]$ (il était nécessaire de préciser cela pour utiliser la propriété disant que $a \ln x = \ln(x^a)$ pour tout réel a et pour tout réel x strictement positif. Cela nous donne :

$$\begin{aligned}\forall \alpha > 0,\ \ln \mathcal{L}(\alpha) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha \frac{\beta^\alpha}{x_k^{\alpha+1}}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\alpha \frac{\beta^\alpha}{x_k^{\alpha+1}}\right) \text{ par propriété de } \ln\\ &= \sum_{k=1}^{n} (\ln\alpha + \alpha\ln\beta - (\alpha+1)\ln x_k) \text{ par propriété de } \ln\\ &= n\ln\alpha + n\alpha\ln\beta - (\alpha+1)\sum_{k=1}^{n}\ln x_k\end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \ln \mathcal{L}(\alpha) = n\ln\alpha + n\alpha\ln\beta - (\alpha+1)\sum_{k=1}^{n}\ln x_k}$$

   (b) _

   i. et

   ii. La fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de telles fonctions avec :

$$\begin{aligned}\forall \alpha > 0,\ \varphi'(\alpha) &= \frac{n}{\alpha} + n\ln\beta - \sum_{k=1}^{n}\ln x_k\\ &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right) \text{ par propriété de } \ln\end{aligned}$$

   Alors :

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) \geq 0 &\iff \frac{n}{\alpha} - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right) \geq 0\\ &\iff \frac{n}{\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)\\ &\iff \alpha \leq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)} \text{ en supposant tout de même que } (x_1, \ldots, x_n) \neq (\beta, \ldots, \beta)\end{aligned}$$

Ainsi φ est croissante sur $\left]0, \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)}, +\infty\right[$.
φ présente donc un unique maximum atteint en :

$$\boxed{w = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)}}$$

iii. Enfin comme $\mathcal{L} = \exp(\ln \mathcal{L})$ avec exp croisssante :

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ présente aussi un unique maximum en } w}$$

(c) _

i. Nous avons vu dans la question dans la question **II.4** que lorsque X suivait une loi de paréto de paramètres a et b, la variable $Y = \ln\left(\dfrac{X}{b}\right)$ suivait une loi exponentielle de paramètre a. En s'adaptant aux nouveaux paramètres de la question, nous pouvons dire que si pour tout $k \in [|1,n|]$, X_k suit une loi de Pareto de paramètres α et β alors, pour tout $k \in [|1,n|]$, Y_k suit une loi exponentielle de paramètre α. Selon la question **I.2.b :**

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{X_k}{b}\right) \text{ est une variable à densité admettant pour densité } f_n \text{ définie} \\ \text{à cette question, mais en posant } \lambda = \alpha.\end{array}}$$

ii. Pour $n \geq 2$, selon le théorème de transfert, W_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{x} f_n(x)\,dx$ est absolument convergente soit si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha x} x^{n-2} dx$ est convergente, par définition de f_n nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Cette intégrale ne présente qu'une seule impropreté, en $+\infty$, par continuité de l'intégrande sur $\mathbb{R}_+$. Or :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x^2 \times e^{-\alpha x} x^{n-2} &= \lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} x^n \\ &= 0 \text{ selon les } \textit{croissances comparées} \end{aligned}$$

ainsi :

$$e^{-\alpha x} x^{n-2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Alors selon le *théorème de négligeabilité appliqué aux fonctions positives*, du fait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge en tant qu'*intégrale de Riemann* de paramètre $2 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha x} x^{n-2} dx$ converge aussi. Enfin $\displaystyle\int_0^1 \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha x} x^{n-2} dx$ ne pose aucun problème de convergence, du fait de la continuité de l'intégrande sur $[0,1]$. Moralité

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha x} x^{n-2} dx$ converge et W_n admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha x} x^{n-2} dx &= \lim_{A\to+\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} \left(\left[\frac{x^{n-1}}{n-1} e^{-\alpha x} \right]_0^A + \alpha \int_0^A e^{-\alpha x} \frac{x^{n-1}}{n-1} dx \right) \\
&\quad \text{(par IPP licite)} \\
&= \lim_{A\to+\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} \left(\frac{A^{n-1}}{n-1} e^{-\alpha A} + \alpha \int_0^A e^{-\alpha x} \frac{x^{n-1}}{n-1} dx \right) \\
&= \lim_{A\to+\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} \frac{A^{n-1}}{n-1} e^{-\alpha A} + \lim_{A\to+\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} \alpha \int_0^A e^{-\alpha x} \frac{x^{n-1}}{n-1} dx \\
&= 0 + \lim_{A\to+\infty} \frac{\alpha n}{n-1} \int_0^A e^{-\alpha x} \frac{\alpha^n x^{n-1}}{(n-1)!} dx \text{ par croissance comparées} \\
&= \frac{\alpha n}{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\alpha^n x^{n-1}}{(n-1)!} dx \text{ par définition de la cvce de l'intégrale} \\
&= \left(\frac{\alpha n}{n-1} \right) \int_{\mathbb{R}} f_n \\
&= \frac{\alpha n}{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{W_n \text{ admet une espérance égale à } \frac{\alpha n}{n-1}}$$

Un estimateur sans biais de α construit sur W_n sera :

$$\boxed{\frac{n-1}{n} W_n}$$

car cette variable admet une espérance, du fait qu'elle soit obtenue à partir de W_n par une transformation affine, qui vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n} \mathbf{E}(W_n) &= \frac{n-1}{n} \times \frac{\alpha n}{n-1} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

(d) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $W'_n = \dfrac{n-1}{n} W_n$.

i. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. En admettant que W'_n possède un moment d'ordre deux égal à $\dfrac{(n-1)\alpha^2}{(n-2)}$, nous pouvons dire qu'elle admet aussi une variance égale selon le *théorème de Huygens-Koenig* à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(W'_n) &= \frac{(n-1)\alpha^2}{(n-2)} - \alpha^2 \\
&= \boxed{\frac{\alpha^2}{n-2}}
\end{aligned}$$

Comme W'_n possède une espérance et une variance, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, disant que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}([|W'_n - \mathbf{E}(W'_n)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(W'_n)}{\varepsilon^2}$$

ce qui équivaut à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 1 - \mathbf{P}([|W'_n - \mathbf{E}(W'_n)| < \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(W'_n)}{\varepsilon^2}$$

soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}([|W'_n - \mathbf{E}(W'_n)| < \varepsilon]) \geq 1 - \frac{\mathbf{V}(W'_n)}{\varepsilon^2}$$

ou encore :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left([W'_n - \varepsilon < \alpha < W'_n + \varepsilon]\right) \geq 1 - \frac{\alpha^2}{(n-2)\,\varepsilon^2}}$$

ii. Cherchons un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N :

$$\mathbf{P}\left(\alpha \in \left[W'_n - \frac{1}{10}, W'_n + \frac{1}{10}\right]\right) \geq 0.95$$

Pour cela il suffit de chercher la valeur seuil de n tel que : $1 - \dfrac{\alpha^2}{(n-2)\,\varepsilon^2} \geq 0.95$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ et $\alpha \in \left]1, 2\right[$.
Nous obtenons les équivalences :

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{\alpha^2}{(n-2)\left(\frac{1}{10}\right)^2} \geq 0.95 \\
\iff & \frac{\alpha^2}{(n-2)\left(\frac{1}{10}\right)^2} \leq 0.05 \\
\iff & n - 2 \geq \frac{100\alpha^2}{0.05} \\
\iff & n - 2 \geq 2000\alpha^2 \\
\iff & n \geq 2000\alpha^2 + 2
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $N = 2002$ car α étant inconnu a été minoré par 1 (je n'ai rien d'autre à vous proposer de mieux pour l'instant !).

2. _

(a) _

i. Si nous trouvons le réel c_n tel que $\mathbf{E}(Y_n) = \beta$ alors la suite d'estimateurs $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, appelée abusivement estimateur, sera sans biais du paramètre β. La variable Y_n admet effectivement une espérance en tant que combinaison linéaire de variables dont l'espérance existe, avec par *linéarité de l'espérance* :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= c_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) \\
&= c_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_1) \text{ car toutes les variables suivent la même loi} \\
&= \frac{c_n n\alpha\beta}{\alpha - 1} \text{ selon } \mathbf{II.1}
\end{aligned}$$

alors la contrainte $\mathbf{E}(Y_n) = \beta$ impose que :

$$\boxed{c_n = \frac{\alpha - 1}{n\alpha}}$$

ii. La variable Y_n admet effectivement une variance en tant que combinaison linéaire de variables dont la variance existe, avec par *indépendance des variables* :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y_n) &= c_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) \\
&= c_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_1) \text{ car toutes les variables suivent la même loi} \\
&= \frac{c_n^2 \alpha \beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \text{ selon } \mathbf{II.1} \\
&= \frac{(\alpha-1)^2 \alpha\beta^2}{n^2\alpha^2(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \\
&= \frac{\beta^2}{n^2\alpha(\alpha-2)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y_n) = \frac{\beta^2}{n^2\alpha(\alpha-2)}}$$

et nous avons clairement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Y_n) = 0}$$

(b) _

i. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et F_{Z_n} sa fonction de répartition définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}([Z_n \leq x])$$

Tout d'abord $Z_n(\Omega) = [\beta, +\infty[$ puisque pour tout entier k de $[|1,n|]$: $X_k(\Omega) = [\beta, +\infty[$, ainsi :

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 - \mathbf{P}([Z_n > x]) & \text{si } x \geq \beta \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) & \text{si } x \geq \beta \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k > x]) & \text{si } x \geq \beta \end{cases} \text{ par indépendance des variabbles } X_k \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{P}([X_k \leq x])) & \text{si } x \geq \beta \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(x)) & \text{si } x \geq \beta \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 - \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\right)^n & \text{si } x \geq \beta \end{cases} \text{ car toutes les variables suivent la même loi} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha n} & \text{si } x \geq \beta \end{cases}
\end{aligned}$$

A la vue de la fonction de répartition obtenue, nous pouvons conclure que :

$$\boxed{Z_n \text{ suit une loi de Pareto de } n\alpha \text{ et } \beta}$$

D'après **II.1 :**

$$\mathbf{E}(Z_n) = \frac{n\alpha\beta}{n\alpha - 1}$$

et comme :

$$\frac{n\alpha\beta}{n\alpha - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\alpha\beta}{n\alpha}$$
$$\text{soit } \frac{n\alpha\beta}{n\alpha - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta$$

alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Z_n) = \beta}$$

Nota bene : on dit dans ce cas précis que la suite d'estimateurs $(Z_n)_{n\geq 1}$ est **asymptotiquement sans biais.**

ii. Pour tout entier naturel n strictement positif nous posons $Z'_n = d_n Z_n$ avec d_n tel que $\mathbf{E}(Z'_n) = \beta$. Cela impose à d_n de vérifier :

$$d_n \mathbf{E}(Z_n) = \beta$$

soit :

$$\frac{d_n n\alpha\beta}{n\alpha - 1} = \beta$$

ou encore :

$$d_n = \frac{n\alpha - 1}{n\alpha}$$

Z'_n admet une variance car elle est obtenue par transformation affine à partir de Z_n qui en admet une, avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Z'_n) &= d_n^2 \mathbf{V}(Z_n) \\
&= \left(\frac{n\alpha - 1}{n\alpha}\right)^2 \frac{n\alpha\beta^2}{(n\alpha - 2)(n\alpha - 1)^2} \text{ selon } \mathbf{II.1} \\
&= \frac{1}{n\alpha}\left(\frac{\beta^2}{n\alpha - 2}\right)
\end{aligned}$$

Comme :

$$\frac{1}{n\alpha}\left(\frac{\beta^2}{n\alpha - 2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\beta}{n\alpha}\right)^2$$

nous pouvons dire que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Z'_n) = 0}$$

iii. Comparons les variance de Z'_n et de Y_n :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{V}(Z'_n) \leq \mathbf{V}(Y_n) \\
\iff & \frac{1}{n\alpha}\left(\frac{\beta^2}{n\alpha - 2}\right) \leq \frac{\beta^2}{n^2\alpha(\alpha - 2)} \\
\iff & \left(\frac{1}{n\alpha - 2}\right) \leq \frac{1}{n(\alpha - 2)} \text{ car } \beta \neq 0 \\
\iff & n\alpha - 2 \geq n(\alpha - 2) \\
\iff & -2 \geq -2n \\
\iff & n \geq 1
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Quelle que soit la taille de l'échantilon, l'estimateur } (Z'_n)_{n\geq 1} \text{ est plus efficace que l'estimateur } (Y_n)_{n\geq 1}}$$

(sauf erreur de ma part !)