

Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie
 Institut National Polytechnique de Lorraine
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE - NANCY

Documents et calculatrices interdits

Le problème n°1 et la partie A du problème n°2 sont indépendants. La partie B du problème n°2 utilise certains résultats de la partie A. Le symbole ¶ signale les questions les plus difficiles.

Les réponses devront être entièrement justifiées, et il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Problème n°1

1-1. **Montrer** que si X est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$, il en est de même de la variable $(1 - X)$.

1-2. Si X est une variable aléatoire de densité f , déterminer la densité de la variable aléatoire $(1 - X)$.

1-3. Si X est une variable aléatoire positive de densité f , déterminer la densité de la variable aléatoire $\ln(X)$.

On rappelle que si A et B sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives ϕ et ψ , alors la variable aléatoire $(A + B)$ admet comme densité la fonction $\phi * \psi$ définie par

$$(\phi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - y)\psi(y) dy$$

pour x réel.

2. On se donne deux variables aléatoires indépendantes X et Y uniformément réparties sur $[0, 1]$: déterminer la loi de la variable aléatoire $X(1 - Y)$; tracer le graphe de sa fonction de répartition, et celui de sa densité.

3. ¶ Plus généralement, étant données deux variables aléatoires indépendantes X et Y de densités respectives f et g nulles en dehors du segment $[0, 1]$, montrer que la variable aléatoire $X(1 - Y)$ admet comme densité la fonction définie par

$$\int_{\lambda}^1 f\left(\frac{\lambda}{t}\right)g(1 - t) \frac{dt}{t}$$

pour λ compris entre 0 et 1.

On considère désormais une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans le segment $[0, 1]$, et on lui associe la suite de segments

$$\left(\left[\prod_1^{n+1} X_j, \prod_1^n X_j \right] \right)_{n \geq 1} \quad \text{de longueurs } (L_n)_{n \geq 1}.$$

4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $L_n = X_1 Y$, où Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et ayant même loi que L_{n-1} .
5. ¶ On suppose, dans cette question, les variables aléatoires X_n uniformément réparties sur $[0, 1]$: déterminer la loi de la variable aléatoire L_n , et calculer son espérance.
6. Appliquer la loi faible des grands nombres à la suite de variables aléatoires $(\ln L_n)_{n \geq 1}$: quelle conclusion en tirez-vous?

Problème n°2**Partie A**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Préciser le noyau et l'image de l'application linéaire définie par la matrice A lorsque l'espace \mathbf{R}^4 est muni de sa base canonique.
2. Etudier les valeurs propres de A , et réduire A sous forme diagonale.
3. Etant donnée une matrice B à 2 lignes et 4 colonnes, on forme la matrice carrée d'ordre 6

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

où les deux dernières colonnes sont donc constituées de coefficients nuls. Montrer que la puissance n -ième de cette matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} A^n & 0 \\ B_n & 0 \end{pmatrix}$$

et où B_n est une matrice à calculer.

Partie B.

On considère des nombres $p, q, r \geq 0$, avec $p + q + r = 1$. Etant donnée une pile de trois livres L_1, L_2 et L_3 , une expérience consiste à tirer le livre L_1 avec la probabilité p , ou le livre L_2 avec la probabilité q , ou encore le livre L_3 avec la probabilité r pour replacer ensuite le livre choisi sur le haut de la pile.

Par exemple, tirant L_2 de la pile

on transforme cette dernière en

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

avec la probabilité q .

Épreuve de Mathématiques 3/3

Il existe 6 piles possibles, qu'on numérote ainsi:

$$P_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \\ L_1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire la matrice T , carrée d'ordre 6, dont le coefficient t_{ij} de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est égal à la probabilité de passage de la pile P_i à la pile P_j (en une seule expérience).

On suppose dorénavant que

$$p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3}$$

et $r = 0$.

On part de la pile P_5 à l'instant 0, et on réalise l'expérience à des instants successifs, mesurés par des nombres entiers positifs: on désigne par X_n l'état de la pile de livres à l'instant $n \geq 0$. Ainsi X_n est-elle une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

On admet que la probabilité conditionnelle

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = P_j | X_n = P_i)$$

de l'évènement $\{X_{n+1} = P_j\}$ sachant l'évènement $\{X_n = P_i\}$ vaut t_{ij} , pour tout n entier ≥ 0 , et tous i, j entiers compris entre 1 et 6.

2. On note

$$t_i(n) = \mathbf{P}(X_n = P_i)$$

la probabilité de l'évènement $\{X_n = P_i\}$. Montrer que

$$t_i(n+1) = \sum_{j=1}^6 t_{ji} t_j(n)$$

pour $n \geq 0$, et i entre 1 et 6.

3. Calculer enfin la probabilité

$$\mathbf{P}(X_n = P_1)$$

de l'évènement $\{X_n = P_1\}$, pour $n \geq 1$.