Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie
Ministère de l'Agriculture et de la Pêche

BANQUE D'EPREUVES G2E

EPREUVE DE MATHEMATIQUES – SESSION 2000

SUJET PRINCIPAL

Durée : 4 heures – Coefficient : 5

Conseils aux candidats:
Le problème n°1 sera noté sur 30 points, le problème n°2 sur 20. Il est fortement conseillé de traiter en priorité le premier problème, en apportant tout le soin nécessaire à la rédaction.

Le second problème est plus difficile; notamment les questions 4) b), c) et 5) c) sont particulièrement délicates.

Problème n°1

Etant donné un nombre entier positif n, on procède à n jets successifs d'une pièce de monnaie, en notant à chaque jet le côté apparent: on obtient de cette façon un résultat d'épreuve ω, formé d'une suite de n symboles F ou P. On désigne par Ω_n l'ensemble des épreuves possibles.

Par exemple, $\omega = (FPFF) \in \Omega_4$.

1) Etant donnée une partie A de Ω_n, on pose

$$\mathbf{P}_n(A) = \frac{1}{2^n}.\text{cardinal}(A).$$

Montrer que

a) $\mathbf{P}_n(\Omega_n) = 1$

b) $\mathbf{P}_n(A \cup B) = \mathbf{P}_n(A) + \mathbf{P}_n(B)$ si A et B sont des parties disjointes.

Expliquer alors pourquoi $\mathbf{P}_n$ est une probabilité sur Ω_n.

On désigne maintenant par A_n l'ensemble des épreuves ω qui ne contiennent pas trois symboles F successifs, et on pose $u_n = \mathbf{P}_n(A_n)$. On a donc $u_1 = u_2 = 1$, et on convient que $u_0 = 1$.

2) a) Pour $n \geq 3$, montrer que A_n est partitionné par les ensembles,

$$B_n = \{\omega \in A_n \mid \omega \text{ commence par } P\},$$

$$C_n = \{\omega \in A_n \mid \omega \text{ commence par } FP\},$$

$$D_n = \{\omega \in A_n \mid \omega \text{ commence par } FFP\}.$$

b) En déduire la relation de récurrence

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2} + \frac{1}{8}u_{n-3}$$

valable pour $n \geq 3$.

3) a) Montrer que, pour z tel que $|z| < 1$, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ converge; on note $f(z)$ sa somme.

b) Montrer, à l'aide du 2)b), que

$$f(z) = -\frac{2z^2 + 4z + 8}{z^3 + 2z^2 + 4z - 8}.$$

4) a) Montrer que l'équation $x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ ne possède qu'une racine réelle α, et que cette racine est comprise entre 1 et $1,1$.

b) Décrire une méthode qui permettrait de calculer la valeur de α; on ne demande pas les calculs.

c) Montrer que les autres racines de l'équation $z^3 + 2z^2 + 4z - 8$ ont un module $> \alpha$.

5) a) Montrer que les polynômes

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) \qquad (z - \alpha)(z - \bar{z}_0) \qquad (z - \alpha)(z - z_0)$$

où α, z_0, $\bar{z}_0$ sont les racines de l'équation étudiée en 4), constituent une base de l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré ≤ 2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbf{R}$, $B \in \mathbf{C}$ tels que

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - z_0} + \frac{\bar{B}}{z - \bar{z}_0}.$$

b) Quel est le rayon de convergence de la série entière du 3)a).

c) Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

6) Montrer que si l'on pose

$$\vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

pour $n \geq 2$, la relation de récurrence 2)b) prend la forme

$$\vec{u}_{n+1} = M.\vec{u}_n$$

où M est une matrice à préciser.

7) A quelle équation doit satisfaire une valeur propre de M?

Problème n°2

Ω désigne un ensemble muni d'une probabilité $\mathbf{P}$.

Question préliminaire.

On considère une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ converge: montrer que l'événement

$$B = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

est de probabilité nulle.

Dans tout le problème, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{-1,1\}$ et de même loi uniforme, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = +1) = \frac{1}{2} .$$

On lui associe la suite

$$\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\geq 1} .$$

1) a) Calculer l'espérance $\phi(t) = \mathbf{E}(e^{tX_n})$ de la variable aléatoire e^{tX_n}, pour t réel donné.

b) Montrer que $\phi(t) \leq e^{t^2/2}$ pour tout t réel; on pourra étudier les variations de la fonction $t^2/2 - \ln\phi(t)$.

2) a) Exprimer $\mathbf{E}(e^{tS_n})$ en fonction de $\phi(t)$ pour tout t réel.

b) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(e^{tS_n/\sqrt{n}})$$

pour tout t réel.

3) Soit a un nombre positif.

a) Etablir l'inégalité

$$\mathbf{P}(S_n \geq a) \leq e^{-ta}.\mathbf{E}(e^{tS_n})$$

valable pour tout t réel.

b) En déduire que

$$\mathbf{P}(S_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n} ;$$

on optimisera la majoration obtenue, à l'aide a) et 1)b) et par un choix convenable du paramètre t.

c) Majorer $\mathbf{P}(|S_n| \geq a)$; on montrera d'abord que $\mathbf{P}(S_n \leq -a) = \mathbf{P}(S_n \geq a)$.

4) a) Soit $\epsilon > 0$ donné; en prenant $a = n\epsilon$ dans 3)c), montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon\right)$$

est convergente.

b) On se donne $\epsilon > 0$. Montrer qu'on peut trouver une partie Ω_ϵ de Ω, de probabilité nulle et vérifiant la propriété suivante: pour tout ω dans Ω_ϵ, il existe un nombre entier n_ϵ positif tel que

$$\frac{|S_n(\omega)|}{n} < \epsilon$$

pour $n \geq n_\epsilon$.

c) Que peut-on dire de la partie $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_{1/\nu}$ de Ω? Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 presque sûrement.

5) a) Pour $\alpha > 0$ et n entier ≥ 2, établir la majoration

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}\ .$$

b) En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

c) Montrer que, pour $\alpha > 1$ fixé, parmi les événements

$$\{|S_n| > \alpha\sqrt{2n\ln n}\}\ ,$$

presque sûrement, seul un nombre fini d'entre eux peuvent se produire.