Correction des exercices de la fiche 3

1 Le problème des anagrammes

a Pour réaliser une telle répartition, on considère les N tirages; on choisit d'abord les a_1 tirages (parmi les N) où le numéro 1 sera tiré, puis les a_2 tirages (parmi les $N - a_1$ qui restent) où le numéro 2 sera tiré, etc... On obtiendra ainsi

$$\begin{aligned}\binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_p}{a_1}\binom{a_2 + \cdots + a_p}{a_2}\binom{a_3 + \cdots + a_p}{a_3}\cdots\binom{a_p}{a_p} &= \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)!}{a_1!a_2!\cdots a_p!} \\ &= \boxed{\frac{N!}{a_1!a_2!\cdots a_p!}}\end{aligned}$$

façons de répartir les p numéros. En fait en assimilant chaque numéro de boule constituant un tirage à une lettre d'un mot de N lettres tiré, répétitions comprises, nous sommes ramenés au *programme des anagrammes.*

b Le nombre d'anagrammes du mot "ABRACADABRANTESQUE" est, d'après le cours, égal à

$$\boxed{\frac{18!}{5!2!2!2!1!1!1!1!1!1!1!} = 6.669\,1 \times 10^{12}}$$

2 On passe tout au crible !

C'est un exercice type d'utilisation de la *formule du crible* ! Notons A l'ensemble des anglicistes, G celui des germanistes, et E celui des ispanisants. Nous avons donc, selon l'énoncé, $|A| = 22$, $|G| = 16$, $|E| = 10$, $|A \cap E| = 8$, $|E \cap G| = 4$ et $|A \cap G| = 12$. Comme tous les élèves de la classe pratiquent au moins une langue nous avons $|A \cup E \cup G| = 26$, on nous demande $|A \cap E \cap G|$. Poincaré nous donne $|A \cup E \cup G| = |A| + |E| + |G| - |A \cap E| - |A \cap G| - |E \cap G| + |A \cap E \cap G|$ ce qui équivaut à dire que

$$\begin{aligned}|A \cap E \cap G| &= |A \cup E \cup G| - |A| - |E| - |G| + |A \cap E| + |A \cap G| + |E \cap G| \\ &= 26 - 22 - 10 - 16 + 8 + 12 + 4 \\ &= \boxed{2}\end{aligned}$$

3 Des équipes de foot

Une équipe de football sera construite en choisissant 10 joueurs dans l'ensemble des joueurs de champ constitué de 27 personnes, (ce qui donne $\binom{27}{10}$ possibilités) puis d'un gardien pris dans l'ensemble des 4 gardiens (4 possibilités). Le lemme des bergers prenant le relais pour conclure, cela nous donne en tout

$$\boxed{4 \times \tbinom{27}{10} = 3.374\,5 \times 10^7}$$

manières de constituer une équipe.

4 Jeu de cartes

a Une main étant tout simplement un *lot* de 8 cartes, nous avons

$$\boxed{\binom{32}{8} = 1.051\,83 \times 10^7}$$

façons de tirer une main de 8 cartes d'un jeu de 32 cartes.

b Il faut savoir que dans un jeu de 32 cartes il y a 8 coeurs parmi lesquels il faudra en choisir 4, soit $\binom{8}{4}$ possibilités, et pour compléter notre main il nous faudra piocher 4 cartes dans l'ensemble de celles qui ne sont pas des coeurs de cardinal 24, soit donc $\binom{24}{4}$ possibilités. Les choix s'associant le nombre total de mains contenant 4 coeurs est égal à

$$\boxed{\binom{8}{4} \times \binom{24}{4} = 7.438\,2 \times 10^5 \text{ mains}}$$

(par le célèbre lemme...).

c

- Commençons par les mains sans valet de coeur regroupées dans un ensemble E_1. Elles sont au nombre de
$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{3} \times \binom{32-11}{1} = 735$$
car il faut choisir 4 coeurs parmi les 7 "non-valet" ($\binom{7}{4}$ choix) et compléter la main en prenant les trois valets "non-coeur" ($\binom{3}{3}$ choix) puis enfin prendre une carte parmi celles qui ne sont ni des valets ni des coeurs ($\binom{32-11}{1}$ choix).
- Le nombre de mains avec valet de coeur regroupées dans un ensemble E_2, vaut
$$1 \times \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{32-11}{2} = 22050$$
car il faut prendre l'unique valet de coeur, compléter avec 2 valets parmi les trois restants n'étant pas de coeur ($\binom{3}{2}$ choix), 3 coeurs parmi les 7 qui ne soient pas un valet ($\binom{7}{3}$ choix) et enfin prendre deux cartes dans l'ensemble des cartes qui ne soient ni coeur ni valet ($\binom{32-11}{2}$ choix).
En notant E l'ensemble des mains contenant 4 coeurs et 3 valets, nous pouvons clairement dire que $E = E_1 \cup E_2$ où l'union est disjointe, et d'après le cours
$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + |E_2| \\ &= 735 + 22050 \\ &= \boxed{22785} \end{aligned}$$

5 Construction de $p-$ listes sous contraintes

a Soit $p \geq 2$. Notons $E = [|1, n|]$. Tout d'abord choisissons une partie de p éléments de E (soit $\binom{n}{p}$ choix). Le choix et l'emplacement du plus grand et du plus petit des numéros obtenus se fait sans aucune hésitation (un seul choix). Il ne reste plus qu'à permuter les $(p-2)$ numéros restants[1] ce qui génère $(p-2)!$ placements. Il y a donc au final

$$\boxed{\binom{n}{p} \times 1^2 \times (p-2)!}$$

$p-$ *listes d'éléments distincts* (i.e. sans répétition) de $[|1, n|]$ telles que le plus petit soit en premier et le plus grand en dernier.

b Soit $p \geq 3$. Tout d'abord choisissons une partie de p éléments de E ($\binom{n}{p}$ choix). Le choix et le placement des trois plus grands d'entre eux génère $3!$ permutations. Il ne reste plus qu'à permuter les $(p-3)$ autres numéros (soit $(p-3)!$ placements). Il y a donc au final

$$\boxed{\binom{n}{p} \times 1^3 \times 3! \times (p-3)!}$$

[1] A contrario de numéros extrêmes

$p-$ *listes d'éléments distincts* de $[|1,n|]$ telles que les trois plus grands soient aux trois premières places (dans l'ordre ou non).

c Soit $p \geq 3$.

- Commençons avec $p \geq 6$. Tout d'abord choisissons une partie de p éléments de E ($\binom{n}{p}$ choix). Le placement des trois plus grands d'entre eux génère 3! permutations de même que celui des plus petits. Il ne reste plus qu'à permuter les $(p-6)$ autres numéros ($(p-6)!$ placements). Il y a donc au final

$$\boxed{\binom{n}{p} \times (3!)^2 \times 1^6 \times (p-6)!}$$

$p-$ *listes* telles que les trois plus grands soient aux trois dernières places (dans l'ordre ou non), et les trois plus petits aux trois premières places (dans l'ordre ou non).

- Pour $p=3$ il y a

$$A_n^3$$

$3-$ *listes* car les trois éléments tirés jouent à la fois le rôle des trois plus petits et des trois plus grands éléments.

- Pour $p=4$ il y a

$$\binom{n}{4} \times 2!$$

$3-$ *listes* car la différentiation des résultats ne se fait qu'à partir des "éléments moyens" puisque le plus petit et le plus grand des éléments n'ont d'autres possibilités que de se placer respectivement en première et quatrième position.

- Pour $p=5$ il y a

$$\binom{n}{5} \times (2!)^2$$

$3-$ *listes* car la différentiation des résultats ne se fait qu'à partir du positionnement des deux plus petits et des deux plus grands des éléments obtenus, "l'élément moyen" n'ayant d'autres possibilités que de se placer respectivement en troisième position.

6 Construction de $p-$ listes sous contraintes

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

a Répondre à la question revient à déterminer le nombre de solutions de l'équation diophantienne[2] $\sum_{k=1}^{p} x_k = n$. Pour obtenir le nombre de solutions il suffit de les coder en considérant le rangement de n objets indiscernables représentés chacun par un "0" dans p tiroirs discernables (pour distinguer les inconnues x_k) représentés par $p-1$ bâtons " | " ("cloisons moyennes mobiles" voir explications faites en classe). Nous considèrerons donc des $(n+p-1)-$ *listes* d'éléments avec répétition de $\{0, |\}$ possédant n "0" et $p-1$ " | ", dénombrées en utilisant la *formule des anagrammes.* Nous obtenons donc $\dfrac{(n+p-1)!}{n!\,(p-1)!} = \binom{n+p-1}{n}$ solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de p entiers naturels tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.

Conclusion

$$\boxed{\left|\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i = n\right\}\right| = \binom{n+p-1}{n} = \Gamma_n^p}$$

b Pour commencer, il faut dire que cette question a bien un sens car $p \leq n$. En codant les solutions comme dans la question précédente avec des "0" et des " | " (sachant qu'il y a toujours n "0" et $p-1$ " | "), on pourra commencer par mettre un "0" dans chaque tiroir de manière à s'assurer qu'aucun ne sera vide pour traduire que $\forall k \in [[1,p]]$, $x_k \neq 0$ (une seule distribution observable). Il restera donc en

[2] Equation algébrique mettant en jeu une fonction polynomiale à plusieurs variables dont les coefficients sont des entiers et pour laquelle seules des solutions entières sont désirées.

supplément $n-p$ "0" à répartir dans les p tiroirs (qui génèrent encore $p-1$ " | "). A ce niveau là nous sommes ramenés à la question précédente qui nous donne

$$\binom{(n-p)+(p-1)}{n-p} = \binom{n-1}{n-p}$$

distributions.
Conclusion

$$\boxed{\left|\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i = n\right\}\right| = \binom{n-1}{n-p}}$$

c Tout d'abord nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x_1 \geq r_1 \\ x_2 \geq r_2 \\ x_3 \geq r_3 \\ \vdots \\ x_p \geq r_p \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - r_1 \geq 0 \\ x_2 - r_2 \geq 0 \\ x_3 - r_3 \geq 0 \\ \vdots \\ x_p - r_p \geq 0 \end{cases}$$

Introduisons la suite finie $(y_k)_{k\in[|1,p|]}$ définie par

$$\forall k \in [|1, n|], \quad y_k = x_k - r_k$$

et

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_p = n) &\iff \sum_{k=1}^{p} (y_k + r_k) = n \\ &\iff \sum_{k=1}^{p} y_k = n - \sum_{k=1}^{p} r_k \end{aligned}$$

Comme $\forall k \in [|1, n|]$, $x_k \geq r_k$ alors $\forall k \in [|1, n|]$, $y_k \geq 0$ ce qui nous ramène à la première question. Autrement dit dénombrer l'ensemble

$$E = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid \forall i \in [|1, p|],\ x_i \geq r_i \text{ et } \sum_{i=1}^{p} x_i = n\right\}$$

revient à dénombrer

$$F = \left\{(y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^{p} y_i = n - \sum_{i=1}^{p} r_i\right\}$$

car ceux-ci sont équipotents vu la définition de la suite y.
Conclusion

$$\boxed{|E| = |F| = \binom{n - \sum\limits_{i\in[|1,p|]} r_i + p - 1}{n - \sum\limits_{i\in[|1,p|]} r_i} = \binom{n - \sum\limits_{i\in[|1,p|]} r_i + p - 1}{p-1}}$$

7 Partitions par paires et tournoi de tennis

a Tout d'abord notons qu'à l'intérieur l'ordre d'une paire des éléments ne compte pas (à ne pas confondre avec un couple). Le raisonnement se fera en deux étapes successives que je vous conseille vivement de suivre[3], à savoir tout d'abord constituer les paires, puis se préoccuper de leur éventuel placement.
Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de construire la première paire p_1, $\binom{2n-2}{2}$ façons pour la deuxième p_2, $\binom{2n-4}{2}$

[3] C'est ce que j'appelle le raisonnement par "couches successives".

la troisième p_3,... ainsi de suite jusqu'à $\binom{2}{2}$ façons pour la dernière p_n. Enfin comme une partition est avant tout un <u>ensemble</u> dont l'ordre des éléments n'à absolument aucune importance, (et il y a $n!$ permutations possibles des paires p_k pour $k \in [|1, n|]$), le nombre de partitions par paires est égal à

$$\frac{\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \binom{2n-4}{2} \times \cdots \times \binom{2}{2}}{n!}$$

soit à

$$\frac{\frac{2n\times(2n-1)}{2} \times \frac{(2n-2)\times(2n-3)}{2} \frac{(2n-4)\times(2n-5)}{2} \times \cdots \times 1}{n!} = \boxed{\frac{(2n)!}{n!2^n}}$$

b C'est une simple application de la question précédente, sans oublier de dire que le texte ne mentionne pas le statut de tête de série que pourrait avoir certain joueur, ce qui fait qu'avec cette question vous pourriez avoir un Federer-Nadal au premier tour au grand désespoir de l'organisateur, du public, des sponsors, des télés, etc... Bref la réponse à la question est

$$\boxed{\frac{64!}{32! \times 2^{32}} = 1.\,122\,8 \times 10^{44}}$$

façons de faire !
Enfin sachant qu'un tournoi réunissant 64 joueurs[4] donnera son vainqueur au bout de six tours et qu'à chaque tour la moitié des joueurs sont éliminés,

$$\boxed{\text{le nombre total de rencontres vaut 63}}$$

c Même questions pour un tournoi en double réunissant 64 joueurs (les équipes sont tirés au sort). 64 joueurs permettent de constituer 32 équipes. En appliquant encore une fois le résultat de la première question sans oublier de constituer les paires de double (où nous prendrons le résultat précédent). Nous avons affaire à une partition de paires de paires qui donne au juge-arbitre

$$\boxed{\frac{64!}{32! \times 2^{32}} \times \frac{32!}{16! \times 2^{16}} = 2.\,154\,6 \times 10^{61}}$$

façons de construire son tableau !

8 Partitions

a Calculons $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ et $\overline{\omega}_3$.

- Pour $n = 1$ il n'y a qu'une seule partition de $E_1 = \{a\}$ à savoir E_1 lui-même. Donc $\boxed{\overline{\omega}_1 = 1}$

[4] C'est ce qui s'est passé à Athens 2004 entre le 15 et 22 août pour voir Massu gagner en 5 sets contre Mardy Fish sur le score de 63 36 26 63 64. Mardy (que les joueurs français surnomme Mardi Poisson) est un américain vraiment surdoué révélé durant l'été 2003 en atteignant la finale du Masters Series de Cincinnati jouée et perdu contre Roddick, après avoir eu une balle de match. Pour votre culture sachez que Massu a ramené à lui seul les deux premières médailles d'or de toute l'histoire olympique de son pays débutée en 1934, le Chili. Son autre médaille a été gagnée en double (un tableau de 32 équipes) aux côtés de Fernando Gonzales à l'issue d'un match exceptionnel de 3H43 terminé à 2H40 du matin gagné en 5 sets contre la paire allemande constituée de Nicolas Kiefer et de Rainer Schuettler sur le score de 62 46 36 76 64 après avoir sauvé 4 balles de match consécutives dans le tie-break du quatrième set (6 points à 2). Gonzales, qui possède l'une des plus grosses frappe du circuit, a été médaillé de bronze à Athènes juste avant la finale du double, à l'issue d'un match homérique de 3H25 gagné 46 62 16/14 contre Taylor Dent (fils de Taylor, célèbre joueur australien des 70's) après avoir sauvé deux match-points au troisième set ! La remise des médaille du double fut très émouvante et la plus tardive de tous les temps puisqu'elle eu lieu à 3H00 du matin devant des gradins bien remplis, j'étais au premier rang pour voir cela ! Pour l'anecdote Massu se coucha vers 6h00 du matin après avoir répondu aux journalistes et laissé retombé l'excitation du match pour enchaîner 13H après, avec sa victoire en simple, alors que moi j'étais tout fringuant au stade olympique pour voir les sessions d'athlétisme dès 9H00 du matin ! Pour être complet, ce même soir de folie, notre Amélie nationale gagnait une médaille d'argent, la première pour une française depuis 1924, en perdant sa finale contre Justine Henin sur le score de 63 63 sans appel et sans aucun regret, mais ce très bon résultat la rapprocha encore plus, à la veille de l'US open, de la première marche mondiale, atteinte depuis, il y a une semaine, grâce à la défaite de Davenport en demi à New-York contre la future lauréate Svetlana Kuznetsova, vous me suivez ? Ce classement mythique dans le plus grand sport individuel au monde est un exploit monstrueux et une première française qui va être dure à égaler au moins de notre vivant !

- Pour $n=2$ notons $E_2=\{a,b\}$. Il admet deux partitions

$$\{\{a\},\{b\}\}\, et E_2$$

Donc $\boxed{\varpi_2=2}$

- Pour $n=3$ notons $E_3=\{a,b,c\}$. Il admet cinq partitions

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\};\{\{a,b\},\{c\}\};\{\{a,c\},\{b\}\};\{\{b,c\},\{a\}\}\ \text{ et } E_3$$

Donc $\boxed{\varpi_3=5}$

b On fixe un élément a de E_n. Supposons que $|A|=p$ où $p\in[|1,n|]$. Pour construire A il suffit d'associer à l'élément a un sous-ensemble de $p-1$ éléments pris dans $E_n-\{a\}$ ce qui donne $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités. Après détermination de ce premier ensemble, la partition de E_n sera achevée par la création d'une partition du complémentaire de A de cardinal $n-p$ et ceci de ϖ_{n-p} façons selon la définition de ce nombre. Notons pour terminer P_p l'ensemble des partitions de E constituées à partir d'un ensemble A de cardinal p contenant l'élément a. Il est clair que la famille $(P_p)_{p\in[[1,n]]}$ constitue une partition de l'ensemble P de toutes les partitions de E. Donc nous avons $P=\biguplus_{p\in[|1,n|]} P_p$ ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}|P| &= \sum_{p\in[|1,n|]}|P_p|\\ &= \boxed{\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}\varpi_{n-p}}\end{aligned}$$

Enfin en posant dans la somme $k=n-p$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-k-1}\varpi_k=\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\varpi_k}$$

Notons que les formules sont valables pour $n\in\mathbb{N}_2$.

c En faisant "tourner la manivelle à la main" nous trouvons que

$$\boxed{\varpi_4=15\quad \varpi_5=52\quad \varpi_6=1203\quad \varpi_7=877}$$

9 Points fixes

a Il est clair que

$$\boxed{D_n=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}}$$

Alors

$$\begin{aligned}\overline{D_n} &= \overline{\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}}\\ &= \biguplus_{i=1}^{n}A_i\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\overline{D_n}\right| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}1\times(n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(n-k)!\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}1 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(n-k)!\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(n-k)!n!}{(n-k)!k!} \\
&= \boxed{n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}} \text{ c'est ce que l'on appelle la } \textbf{formule des dérangements}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d(n) &= |\mathfrak{S}_n|-\left|\overline{D_n}\right| \\
&= n!-n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!} \\
&= n!\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right) \\
&= n!\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\right) \\
&= \boxed{n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\right)}
\end{aligned}$$

b Si $d(n)$ désigne le nombre de permutations de E sans point fixe, alors $d(n-p)$ désigne le nombre de permutations de E possédant **exactement** p points fixes[5]. Soit

$$\boxed{\varphi_p^n=\binom{n}{p}\times d(n-p)}$$

puisqu'on commence par choisir les p points fixes, et une fois ceux-ci choisis on termine la construction par une permutation de $[|1,n|]$ laissant uniquement les p points fixes pré-choisis. Ainsi

$$\begin{aligned}
\varphi_p^n &= \binom{n}{p}(n-p)!\left(\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= \boxed{\frac{n!}{p!}\left(\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}\right)}
\end{aligned}$$

10 Réunion d'ensembles

a Soit E un ensemble de cardinal n.

[5] N'oubliez pas de choisir les p points fixes, d'où la présence du $\binom{n}{p}$.

- Calculons le nombre de paires (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$.
  On peut s'étonner des notations du texte qui nous parle de paires en utilisant la notation de couples ! Bien qu'une paire, qui répétons-le, soit un ensemble dont l'ordre des éléments ne compte donc pas, ici A et B n'ont pas un rôle interchangeable du fait que l'on demande à A d'être inclus dans B, ce qui fait qu'à chaque couple (A, B) correspond une seule paire et réciproquement. Il y a donc
  $$\boxed{3^n \text{ paires satisfaisant à la question}}$$
  car en introduisant pour tout k de $[|0, n|]$ les ensembles
  $$P_k = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid |B| = k \text{ et } A \subset B\right\}$$
  $$P = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \subset B\right\}$$
  il est clair que la famille $(P_k)_{k\in[|0,n|]}$ constitue une partition de P avec
  $$\forall k \in [|0, n|], \quad |P_k| = \binom{n}{k} \times 2^k$$
  du fait que $B \in \mathcal{P}_k(E)$ et $A \in \mathcal{P}(B)$. Enfin
  $$\begin{aligned} |P| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^k \\ &= \boxed{3^n} \end{aligned}$$
  par la formule du *binôme de Newton.*
- Combien de telles paires satisfont-elles en plus à la condition $A \neq B$? Nous avons maintenant pour tout k de $[|1, n|]$,
  $$P_k = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid |B| = k \text{ et } A \subsetneq B\right\}$$
  avec
  $$\forall k \in [|1, n|], \quad |P_k| = \binom{n}{k} \times \left(2^k - 1\right)$$
  (en enlevant le cas extrême parmi les 2^k où $A = B$)
  Notons que la formule reste valable pour $k = 0$ car dans ce cas $B = \varnothing$ et $|P_k| = 0$. D'où
  $$\begin{aligned} |P| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \left(2^k - 1\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= \boxed{3^n - 2^n} \end{aligned}$$
  par la formule du *binôme de Newton* appliquée deux fois.

b

- Le texte nous demande
  $$\left|\left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \cup B = E\right\}\right|$$
  Pour cela introduisons
  $$U = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \cup B = E\right\}$$
  et
  $$\forall k \in [|0, n|], \quad U_k = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid |A| = k \text{ et } A \cup B = E\right\}$$
  Il est clair que la famille $(U_k)_{k\in[|0,n|]}$ constitue une partition de U avec
  $$\forall k \in [|0, n|], \quad |U_k| = \binom{n}{k} \times 2^k \times 1$$

(voir explications faites en classe) en choisissant d'abord A ($\binom{n}{k}$ possibilités) puis en notant que $B = (A \cap B) \uplus \overline{A}$ avec $A \cap B \in \mathcal{P}(A)$ (2^k possibilités), comme $\overline{A}$ est unique, nous avons

$$\begin{aligned} |U| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^k \\ &= \boxed{3^n} \end{aligned}$$

par la formule du *binôme de Newton*.

- Un recouvrement de E avec deux parties est une paire de sous-ensemble dont l'union donne tout E c'est-à-dire le complémentaire d'un des deux ensembles est inclus dans l'autre sauf pour le cas particulier où $A = B = E$. Pour répondre à la question il suffit de reprendre le résultat précédent (2), d'enlever le cas de figure où $A = B = E$ (une seule situation) tout en sachant dans ce résultat (2) que A et B jouent un rôle symétrique, que l'on à plus à distinguer lorsqu'on parle de paire, d'où la division par deux de (2) qui donne

$$\boxed{\frac{3^n - 1}{2}}$$

recouvrements de E à l'aide de deux parties.

C

- Combien existe-t-il de triplets de parties dont la réunion soit égale à E ?
Introduisons
$$T = \left\{ (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3 \mid A \cup B \cup C = E \right\}$$
et
$$\forall k \in [|0, n|], \quad T_k = \left\{ (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3 \mid |A \cup B| = k \text{ et } A \cup B \cup C = E \right\}$$
Nous avons
$$\forall k \in [|0, n|], \quad |T_k| = \binom{n}{k} \times 2^k \times 3^k$$
En effet le nombre de façons de choisir $A \cup B$ de cardinal k est égal à $\binom{n}{k}$ et une fois choisi il suffit de se reporter à la question précédente pour se dire qu'il y a 3^k manières de construire A et B tels que $A \cup B$ soit un ensemble de cardinal k (à l'image de E de cardinal n). Une fois A et B déterminés il suffit de compléter notre triplet en choisissant $C = \left(\overline{A \cup B}\right) \uplus D$ où $D \in \mathcal{P}(A \cup B)$ avec $|A \cup B| = k$, ce qui donne $\underbrace{1}_{\overline{A \cup B} \text{ est unique !}} \times 2^k$ possibilités pour construire C. D'où
$$\begin{aligned} |T| &= \sum_{k=0}^{n} |T_k| \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 6^k \\ &= \boxed{7^n} \end{aligned}$$

- Généralisons à k parties.
La conjecture assez délicate à faire nous donne : $\left(2^k - 1\right)^n$ .Prouvons cela par récurrence en supposant que pour k fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition est vraie. L'est-elle pour $k + 1$?
Soit
$$V = \left\{ (A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}) \in (\mathcal{P}(E))^3 \mid A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1} = E \right\}$$
et
$$\forall i \in [|0, n|], \quad V_i = \left\{ (A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}) \in (\mathcal{P}(E))^{k+1} \mid |A_1 \cup \ldots \cup A_k| = i \text{ et } A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1} = E \right\}$$

Nous avons

$$\forall i \in [|0,n|]\,,\quad |V_i| = \binom{n}{i} \times \left(2^k-1\right)^i \times 2^i$$

En effet le nombre de façons de choisir $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ de cardinal i est égal à $\binom{n}{i}$ et une fois choisi il suffit de se reporter à l'hypothèse de récurrence pour se dire qu'il y a $\left(2^k-1\right)^i$ manières de construire $A_1, \ldots, A_k$ tels que $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ soit un ensemble de cardinal i (à l'image de E de cardinal n). Une fois $A_1, \ldots, A_k$ déterminés il suffit de compléter notre $k-$ uplet en choisissant $A_{k+1} = \left(\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_k}\right) \uplus F$ avec $F \in \mathcal{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_k\right)$ où $|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = i$, ce qui donne $\underbrace{1}_{\overline{A_1\cup\ldots\cup A_k}\text{ est unique !}} \times 2^i$ possibilités pour construire A_{k+1}. D'où

$$\begin{aligned}
|V| &= \sum_{i=0}^{n} |V_i| \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times \left(2^k-1\right)^i \times 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times \left(2^{k+1}-2\right)^i \\
&= \left(2^{k+1}-2+1\right)^n \\
&= \left(2^{k+1}-1\right)^n
\end{aligned}$$

La proposition est transmissible et donc héréditaire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.