Le 09/05/2012 à 07H55

DENOMBREMENT $\boxed{\text{T}}$ **:** Soit A et B deux ensembles tels que A est fini et $B \subset A$, alors $|B| \leq |A|$, $|A - B| = |A| - |B|$, $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$. $|A \uplus B| = |A| + |B|$, $\left|\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$. **Poincarré :** $\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$. $\left|\prod_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$. $\boxed{\text{D}}$ $(A_i)_{i\in I}$ **partition** de E : $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$, $(\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j) \Rightarrow$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$) et $\biguplus_{i\in I} A_i = E$. $\boxed{\text{Rq}}$ C'est la même déf. pour un SCE avec $E = \Omega$. $\boxed{\text{T}}$ **Lemme des bergers :** Soit E et F *deux ens. finis* et f une application *surjective* de E vers F. On suppose $\exists p \in \mathbb{N}^* \mid \forall y \in F$, $\left|f^{-1}(\{y\})\right| = p$. Alors $|E| = p\,|F|$. $\boxed{\text{T}}$ **Nb d'applications** de E vers F : $|\mathcal{A}(E,F)| = |F|^{|E|}$. $\boxed{\text{T}}$ **Nb d'injections** de E_p vers F_n : A_n^p. $\boxed{\text{T}}$ **Nb de permutations** de E_n : $A_n^n = n!$ $\boxed{\text{T}}$ **Nb de $p-$listes** de E_n : n^p. $\boxed{\text{T}}$ **Nb de combinaisons** de p élts de E_n, avec $1 \leq p \leq n$: $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$. $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$. $\boxed{\text{T}}$ **Pb des anagrammes** : $\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \cdots \times \binom{n-n_1-\cdots-n_{p-1}}{n_p} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_p!}$. $\boxed{\text{T}}$ **Suites :** $\left|\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n\right\}\right| = \binom{n}{p}$. $\left|\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p \leq n\right\}\right| = \binom{p+n-1}{p}$. $\boxed{\text{T}}$ $\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n} 1 = \binom{n}{p}$ $\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_p\leq n} 1 = \binom{p+n-1}{p}$. $\boxed{\text{T}}$ **Formule multinomiale** (HP mais ...)

$$\sum_{\left\{\substack{(n_1,\ldots,n_p)\in[\![0,n]\!]^p \\ n_1+\cdots+n_p=n}\right.} \underbrace{\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_p!}}_{\text{coeft multinomial}} a_1^{n_1} \times \cdots \times a_p^{n_p} = (a_1 + \cdots + a_p)^n \text{ où } n \in \mathbb{N},\ (a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{R}^p.$$

ESPACES PROBABILISES $\boxed{\text{D}}$ **d'une tribu :** Tout ensemble de parties d'un ensemble Ω, *contenant* Ω, *stable par réunion au plus dénombrable et par passage au complémentaire*, s'appelle une **tribu** ou $\sigma-$ algèbre sur Ω, souvent notée $\mathcal{A}$. Autrement dit : $\Omega \in A$, $\forall A \in A$, $\overline{A} \in A$, Pour toute suite $(A_n)_n$ d'événements de A, $\bigcup_n A_n \in A$. $\boxed{\text{P}}$: $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est stable pour $\cap$, $-$, Δ. $\boxed{\text{P}}$: $\sigma(A) = \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$, Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* alors $\sigma\left((A_k)_{k\in K}\right) = \left\{\biguplus_{l\in L} A_l \mid L \in \mathcal{P}(K)\right\}$. Si Ω au plus dénombrable $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Si Ω est infini et indénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$. $\boxed{\text{D}}$ **axiomatique d'une probabilité :** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P : $A \to [0,1]$ vérifiant : $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\forall (A_k)_{k\in K}$, deux à deux disjoints $\sum_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ et $\mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in K} A_k\right) = \sum_{k\in K} \mathbf{P}(A_k)$ ($\sigma-$ additivité *de* $\mathbf{P}$). $\boxed{\text{D}}$ On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. $\boxed{\text{T}}$ Soit A et B deux évts de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$: $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbf{P}(A \uplus B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$, $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B))$, $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A))$ on dit croissance de $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$, $\mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$. $\boxed{\text{T}}$ **limite monotone :** $\left((A_n)_{n\geq 0} \nearrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$, $\left((A_n)_{n\geq 0} \searrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$. $\boxed{\text{C}}$ $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$. $\boxed{\text{T}}$ **Inégalité de Boole ou sous-additivité (HP mais ...) :** $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$. $\boxed{\text{T}}$ **Relation de Laplace** (cas d'équiprobabilité) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. $\boxed{\text{D}}$ **Ind. des évts : 2 évts**: $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, ***n* évts** 2 à 2 : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j) \Rightarrow (\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j))$, ***n* évts mutuel$^{\mathbf{t}}$** : $\forall I \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$, $I \neq \emptyset$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)$, **suites d'évts :** on se ramène au cas fini pour toutes sous-suites finies. $\boxed{\text{P}}$ Les assertions suivantes sont équivalentes : $A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. Soit $(A_n)_n$ une suite d'*évts indpts* alors $(B_n)_n$ où $\forall n$, $B_n = A_n$ ou $\overline{A_n}$ reste une suite d'évts indpts. $\boxed{\text{D}}$: $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0$, $\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$. $\boxed{\text{P}}$ Toutes les propriétés vues sur les probas inconditionnelles sont encore valable. Soit $\mathbf{P}(A)\neq 0$, $(A\perp B)\Leftrightarrow(\mathbf{P}_A(B)=\mathbf{P}(B))$. Soit $\mathbf{P}(B)\neq 0$, $(A\perp\!\!\!\perp B)\Leftrightarrow(\mathbf{P}_B(A)=\mathbf{P}(A))$. $\boxed{\mathbf{T}}$ **FPC :** Soit $A_1,\dots,A_n$, n évts tq $\forall n\in\mathbb{N}_2$, $\mathbf{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\neq 0$, alors $\mathbf{P}(A_1\cap\dots\cap A_n)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbf{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$. $\boxed{\mathbf{T}}$ **FPT :** Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* tq $\forall k\in K$, $\mathbf{P}(A_k)\neq 0$, alors $\forall B\in\mathcal{A}$, $\sum_k \mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)<\infty$ et $\mathbf{P}(B)=\sum_{k\in K}\mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)$. $\boxed{\mathbf{T}}$ **BAYES :** Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* tq $\forall k\in K$, $\mathbf{P}(A_k)\neq 0$, alors $\forall B\in\mathcal{A}$ $\mid \mathbf{P}(B)\neq 0:\forall i\in K,\mathbf{P}_B(A_i)=\frac{\mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{k\in K}\mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)}$.

VAR $\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\mid\forall I\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(I)=\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in I\}\in\mathcal{A}$. $\boxed{\mathbf{D}}$ Ⓢ **:** X vard si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. $\boxed{\mathbf{D}}$ Ⓒ **:** X varad si $X(\Omega)$ est ∞ et indénombrable. $\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** $(X=Y)\Leftrightarrow(\forall\omega\in\Omega,X(\omega)=Y(\omega))$. ⓈⒸ **:** $(X=Y\text{ p.s.})\Leftrightarrow(\mathbf{P}([X=Y])=1)$. $\boxed{\mathbf{D}}$ Ⓢ $\mathcal{A}_X=\sigma\left(([X=x])_{x\in X(\Omega)}\right)=\left\{\biguplus_{x\in A}[X=x]\mid A\subset X(\Omega)\right\}$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ **Loi de proba** Ⓢ **:** $P_X:X(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, déf. par $\forall x\in X(\Omega)$, $P_X(x)=\mathbf{P}([X=x])$. Ⓒ **:** On donne une densité de X. $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $(X=Y)\Rightarrow(P_X=P_Y)$. ⓈⒸ **:** $(P_{\boldsymbol{X}}=P_{\boldsymbol{Y}})\Rightarrow\left(\forall k\geq 0,\mathbf{E}\left(X^k\right)=\mathbf{E}\left(Y^k\right)\right)$. $\boxed{\mathbf{T}}$ Ⓒ **:** (caractérisation) (f densité) $\Leftrightarrow$ ($f\geq 0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ presque partout, $\int_{-\infty}^{+\infty}f$ converge et vaut 1). $\boxed{\mathbf{D}}$ **FR** Ⓢ **:** $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\sum_{\left\{\substack{x_i\in X(\Omega)\\ x_i\leq x}\right.}\mathbf{P}([X=x_i])$. Ⓒ **:** $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\,du$. $\boxed{\mathbf{T}}$ Ⓒ **:** $F'=f$ là ou F est dérivable i.e. là où f est continue. $\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** Dans le cas général $\lim_{-\infty}F=0$, $\lim_{+\infty}F=1$, F $\mathcal{C}^0$ à droite en tout point de $\mathbb{R}$, F non décroissante. Ⓒ **:** On rajoute $F:\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}-I$ (I ens. fini éventuellement vide). $\boxed{\mathbf{T}}$ Ⓢ **:** $\forall a\in\mathbb{R}$, $\mathbf{P}([X=a])=F_X(a)-F_X(a^-)$, $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a\leq b$, $\mathbf{P}([a\leq X\leq b])=F_X(b)-F_X(a^-)$, $\mathbf{P}([a<X\leq b])=F_X(b)-F_X(a)$, $\mathbf{P}([a\leq X<b])=F_X(b^-)-F_X(a^-)$, $\mathbf{P}([a<X<b])=F_X(b^-)-F_X(a)$. Ⓒ **:** $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,a\leq b$, $\mathbf{P}([a\leq X\leq b])=\mathbf{P}([a<X\leq b])=\mathbf{P}([a\leq X<b])=\mathbf{P}([a<X<b])=\int_a^b f_X(u)\,du$. $\boxed{\mathbf{T}}$ $(\forall B\subset X(\Omega))\Rightarrow$ ($\mathbf{P}(B)=\left\{\begin{array}{l}Ⓢ\sum_{x_i\in B}\mathbf{P}([X=x_i])\\ Ⓒ\int_{x\in B}f(x)\,dx\end{array}\right.$). $\boxed{\mathbf{D}}$ $\mathbf{E}(X)=\left\{\begin{array}{l}Ⓢ\sum_{x_i\in X(\Omega)}x_i\mathbf{P}([X=x_i])\text{ sr }|\text{cv}|\\ Ⓒ\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx\text{ src}\end{array}\right.$. $\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\forall X\in\mathcal{L}^1$, $(X\geq 0)\Rightarrow(\mathbf{E}(X)\geq 0)$. ⓈⒸ **:** $\forall(X,Y)\in\left(\mathcal{L}^1\right)^2$, $(X\leq Y)\Rightarrow(\mathbf{E}(X)\leq\mathbf{E}(Y))$. ⓈⒸ **:** $\forall(X,Y)\in\left(\mathcal{L}^1\right)^2$, $(X=Y)\Rightarrow(\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(Y))$. ⓈⒸ **:** $\left(\forall Y\in\mathcal{L}^1\text{ et }X\text{ tq }|X|\leq Y\right)\Rightarrow\left(X\in\mathcal{L}^1\text{ et }\mathbf{E}(|X|)\leq\mathbf{E}(Y)\right)$. ⓈⒸ **:** $\forall X\in\mathcal{L}^1$, $|\mathbf{E}(X)|\leq\mathbf{E}(|X|)$. $\boxed{\mathbf{D}}$ **Espérance conditionnelle** Ⓢ **:** $\forall A\in\mathcal{A}\mid\mathbf{P}(A)\neq 0:\mathbf{E}(X\mid A)=\sum_{x_i\in X(\Omega)}x_i\mathbf{P}_A([X=x_i])$ sr|cv|. $\boxed{\mathbf{T}}$ **Formule de l'espérance totale** Ⓢ Soit $(A_i)_{i\in I}$ un *SCE* tq $\forall i\in I$, $\mathbf{P}(A_i)\neq 0,\mathbf{E}(X)=\sum_{i\in I}\mathbf{E}(X\mid A_i)\mathbf{P}(A_i)$ src. $\boxed{\mathbf{T}}$ **de transfert** $\mathbf{E}(\varphi(X))=\left\{\begin{array}{l}Ⓢ\sum_{x_i\in X(\Omega)}\varphi(x_i)\mathbf{P}([X=x_i])\text{ sr }|\text{cv}|\text{ où }\varphi\text{ déf sur }X(\Omega)\\ Ⓒ\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)\,dx\text{ sr }|\text{cv}|\text{ où }\varphi\text{ est }\mathcal{C}^0\text{ presque partout}\end{array}\right.$. $\boxed{\mathbf{D}}$ $\mathbf{V}(X)=\left\{\begin{array}{l}Ⓢ\sum_{x_i\in X(\Omega)}(x_i-\mathbf{E}(X))^2\mathbf{P}([X=x_i])\text{ sr }|\text{cv}|\\ Ⓒ\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-\mathbf{E}(X))^2f(x)\,dx\text{ src}\end{array}\right.$. ⓈⒸ **:** $\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **THK** ⓈⒸ **:** $\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\left(X^2\right)-(\mathbf{E}(X))^2$. $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbf{E}(aX+b)=a\mathbf{E}(X)+b$ et $\mathbf{V}(aX+b)=a^2\mathbf{V}(X)$. $\boxed{\mathbf{D}}$ **Moment d'ordre $r\geq 0$:** $\forall k\in\mathbb{N}$, $m_r(X)=\mathbf{E}(X^r)=\left\{\begin{array}{l}Ⓢ\sum_{x_i\in X(\Omega)}x_i^r\mathbf{P}([X=x_i])\text{ sr }|\text{cv}|\\ Ⓒ\int_{-\infty}^{+\infty}x^rf(x)\,dx\text{ src}\end{array}\right.$, **Moment centré d'ordre $r\geq 0$:** $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mu_r(X)=\mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))^r)=\left\{\begin{array}{l}Ⓢ\sum_{x_i\in X(\Omega)}(x_i-\mathbf{E}(X))^r\mathbf{P}([X=x_i])\text{ sr }|\text{cv}|\\ Ⓒ\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-\mathbf{E}(X))^rf(x)\,dx\text{ sr }|\text{cv}|\end{array}\right.$. Ⓢ $\forall r\in\mathbb{N}^*$, **Moment factoriel d'ordre $r\geq 1$:** $\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1))=\sum_{x_i\in X(\Omega)}x_i(x_1-1)\dots(x_i-r+1)\mathbf{P}([X=x_i])$ sr|cv|. $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:**Soit $r\in\mathbb{N}$ alors $(m_{r+1}(X)<\infty)\Rightarrow$ $(\forall k\in[\![0,r]\!],m_k(X))<\infty)$. ⓈⒸ **:** $\left(\mu_{r+1}(X)<\infty\right)\Rightarrow(\forall k\in[\![0,r]\!],\ \mu_k(X)<\infty)$. ⓈⒸ **:** $\forall r\in\mathbb{N}$, $(m_r(X)<\infty)\Leftrightarrow(\mu_r(X)<\infty)$.

VECTEURS ALEATOIRES **Séries doubles** $\boxed{\mathbf{T}}$ **de Fubini** $\oplus$ Soit $u=(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille à deux indices de réels positifs indexée par $I\times J\subset\mathbb{N}^2$. **Si** $\forall i\in I$, $\sum_j u_{i,j}<$

$+\infty$ *puis* $\sum_i \sum_{j\in J} u_{i,j} < +\infty$ **alors** $\sum_{(i,j)} u_{i,j} < +\infty$. On a alors les résultats suivants : $\forall j \in J$, $\sum_i u_{i,j} < +\infty$ *puis* $\sum_j \sum_{i\in I} u_{i,j} < +\infty$ et $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$. $\boxed{\mathbf{T}}$ **de comparaison** Soit $I' \subset I$ et $J' \subset J$ et deux séries $\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} u_{i,j}$ et $\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} v_{i,j}$ telles que $\forall (i,j) \in I' \times J'$, $0 \leq v_{i,j} \leq u_{i,j}$. Alors ($\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} u_{i,j}$ cv) $\Rightarrow$ ($\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} v_{i,j}$ cv). Par *contraposée* ($\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} v_{i,j}$ div) $\Rightarrow$ ($\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} u_{i,j}$ div). $\boxed{\mathbf{T}}$ **de sommation par paquets (admis)** Soit $\sum_{i,j} |u_{i,j}| < +\infty$ où $(i,j) \in I \times J$, et $(A_k)_{k\in K}$ une partition de $I \times J$, alors on a : $\forall k \in K$, $\sum_{(i,j)} |u_{i,j}| < +\infty$ où $(i,j) \in A_k$ de somme $\sum_{(i,j)\in A_k} u_{i,j}$, et $\sum_k \left(\sum_{(i,j)\in A_k} |u_{i,j}|\right) < +\infty$. Enfin on a $\sum_{k\in K}\left(\sum_{(i,j)\in A_k} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$. **Couples discrets** $\boxed{\mathbf{D}}$ **Loi de proba. d'un couple** Soit $C = (X,Y)$. $P_C : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, déf. par $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P_C(x_i, y_j) = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{i,j}$. $\boxed{\mathbf{T}}$ $\boxed{\mathbf{D}}$ **Lois marginales** $P_X : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, déf. par $\forall x_i \in X(\Omega)$, $P_X(x_i) = \mathbf{P}([X = x_i])$ et $P_Y : Y(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, déf par $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $P_Y(y_j) = \mathbf{P}([Y = y_j])$. $\boxed{\mathbf{T}}$ $\forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = x_i]) = p_{i\bullet} = \sum_{y_j\in Y(\Omega)} p_{i,j}$ et $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}([Y = y_j]) = p_{\bullet j} = \sum_{x_i\in X(\Omega)} p_{i,j}$. $\boxed{\mathbf{D}}$ **Lois conditionnelles** $\mathbf{P}_{[X=x_i]} : Y(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, déf. par $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j]) = \dfrac{p_{i,j}}{p_{i\bullet}}$ et $\mathbf{P}_{[Y=y_j]} : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, déf. par $\forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i]) = \dfrac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}}$. $\boxed{\mathbf{T}}$ **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un couple** Notons $Z = g(X,Y)$. **Caractériser** la loi de la variable Z, c'est donner $Z(\Omega) = g(X,Y)(\Omega)$ et pour tout z de $Z(\Omega)$: $\mathbf{P}([Z = z]) = \sum_{\left\{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}\right.} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$. $\boxed{\mathbf{T}}$ $\forall I \in \mathcal{P}(Z(\Omega))$: $\mathbf{P}([Z \in I]) = \sum_{\left\{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)\in I}\right.} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$. $\boxed{\mathbf{T}}$ Ⓢ **Théorème de transfert** Soit φ *définie sur* $\mathcal{D} \supset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{E}(\varphi(X,Y)) = \sum_{(x_i,y_j)\in(X,Y)(\Omega)} h(x_i, y_j)\,\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ sr|cv| de la SDATP. $\boxed{\mathbf{T}}$ La **droite de régression de $\boldsymbol{Y}$ en $\boldsymbol{X}$** notée Δ a pour équation $\widehat{Y} = \left(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(X)}\right)(X - \mathbf{E}(X)) + \mathbf{E}(Y)$ et en inversant les rôles symétriques de X et Y nous obtenons $\widehat{X} = \left(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(Y)}\right)(Y - \mathbf{E}(Y)) + \mathbf{E}(X)$ qui est l'équation de la **droite de régression de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$** notée Δ'. **Vecteurs discrets** $\boxed{\mathbf{D}}$ **Loi d'un vecteur de dim $\boldsymbol{n \geq 2}$** Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ $P_V : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_k(\Omega)$, $P_V(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right)$. $\boxed{\mathbf{D}}$ **Lois marginales** $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P_{X_k} : X_k(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, déf. par $\forall x_k \in X_k(\Omega)$, $P_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}([X_k = x_k])$. $\boxed{\mathbf{T}}$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x_k \in X_k(\Omega)$, $\mathbf{P}([X_k = x_k]) = \sum_{(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\in \prod_{m\in[\![1,n]\!]-\{k\}} X_m(\Omega)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = x_j]\right)$. $\boxed{\mathbf{T}}$ **Théorème de transfert** Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ alors $\mathbf{E}(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,\mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n])$ sr|cv|. $\boxed{\mathbf{T}}$ **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un vecteur** Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ et φ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $\prod_{k=1}^n X_k(\Omega)$, alors la **loi** de $Z = \varphi(V)$ est **caractérisée** par la donnée de $Z(\Omega) \subset \mathrm{Im}\,\varphi$ et par celles de $\forall z \in Z(\Omega)$, $\mathbf{P}([Z = z]) = \sum_{\left\{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)\\ \varphi(x_1,\ldots,x_n)=z}\right.} \mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n])$. **Covariance** $\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$. $\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$**,** $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X)$**,** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$**,** $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$**,** $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$**,** $\forall k$, $\forall l$, X_k et $Y_l \in \mathcal{L}^2_d$, λ_k et $\mu_l \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^m \mu_j Y_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \lambda_i \mu_j\,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$. $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $\forall k$, $X_k \in \mathcal{L}^2$, $\forall i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2\,\mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

D Ⓢⓒ **:** Soit $X,Y \in \mathcal{L}^2 \mid \not\hookrightarrow \delta^1$: $\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}$. **P** Ⓢⓒ **:** Soit $X,Y \in \mathcal{L}^2 \mid \not\hookrightarrow \delta$: $|\rho(X,Y)| \leq 1$. Ⓢⓒ **:** $(|\rho(X,Y)| = 1) \Leftrightarrow (Y = aX + b \text{ ps})$. **D** **Matrice de cov-var** Ⓢⓒ **:** Les $X_k \in \mathcal{L}_d^2$, $S = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. **T** Ⓢⓒ **:** $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = {}^t\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. **Indépendance** **D** Ⓢ **:** $X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n \in \mathcal{L}^1$ lorsque $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = x_i])$. Ⓢⓒ **:** $X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n$ lorsque $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i \leq x_i])$. **T** Ⓢⓒ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow \forall (\varphi, \psi)$, $\varphi(X) \perp\!\!\!\perp \psi(Y)$. Ⓢⓒ **:** $(X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)\right)$. Ⓢⓒ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\mathrm{Cov}(X,Y) = 0)$. Ⓢⓒ **:** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{0} \Rightarrow$ **?** Ⓢⓒ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\rho(X,Y) = 0)$. Ⓢⓒ **:** $\rho(X,Y) = \mathbf{0} \Rightarrow$ **?** Ⓢ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Longrightarrow \left(\begin{cases} \mathbf{E}(X \mid [Y = y_j]) = \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(Y \mid [X = x_i]) = \mathbf{E}(Y) \end{cases}\right)$. Ⓢⓒ **:** $(X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{V}(X_i)\right)$. Ⓢⓒ **: Lemme des coalitions** $(X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_{n+m}) \Rightarrow (\forall (\varphi, \psi),\ \varphi(X_1, \ldots, X_n) \perp\!\!\!\perp \psi(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}))$ (on peut "bordéliser" comme on veut). **T** **de convolution** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow \left(f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt\right)$, f_{X+Y} est $\mathcal{C}^0$ presque partout.

INEGALITES PROBABILISTES

T **Markov** Ⓢⓒ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^1$ à *valeurs positives*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}$. Ce qui se généralise pour $X \in \mathcal{L}^r$ en $\forall r > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|X| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r}$. **T** **I.B.T.** Ⓢⓒ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^2$ *admettant variance non nulle*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

CONVERGENCES

Convergence en probabilité **D** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| \geq \varepsilon]) = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| < \varepsilon]) = 1$. **P** Ⓢⓒ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \Leftrightarrow \left((X_n - X)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$. Ⓢⓒ **:** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n - X) = 0$. **T** $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = a \in \mathbb{R} \text{ **et** } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n) = 0\right) \Rightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$. **P** (pas vraiment au pgme mais ...) Ⓢⓒ **:** $\left((|X_n|)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right) \Leftrightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$. Ⓢⓒ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ **et** } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y\right) \Rightarrow (X = Y \text{ ps})$. Ⓢⓒ **:** Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$. Ⓢⓒ **:** Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(aX_n + bY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} aX + bY$ **;** $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$ **;** $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{X}{Y}$ avec $\mathbf{P}([Y = 0]) = 0$. **T** **Loi faible des grands nbs** Ⓢⓒ **:** $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *2 à 2 indtes et de même* loi d'esp. commune m et de variance commune σ^2. Soit $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ alors $\left(\overline{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$. Ⓢ **:** Si $\forall k$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|F_n - p| \geq \varepsilon]) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ en notant $F_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. **Convergence en loi** **D** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point où F_X est $\mathcal{C}^0$. **T** Ⓢⓒ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([a < X_n \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b])$. **T** Ⓢ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right) \Leftrightarrow$ **(** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n = x_k]) = \mathbf{P}([X = x_k])$**)**. **T** **TCL** Ⓢⓒ **:** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **iid** alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow N(0,1)$ où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et $S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n \leq x]) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$. Le TCL existe aussi en version moyenne. **T** Ⓢⓒ **:** $\forall a \in \mathbb{R}$, $\left((X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} a\right) \Rightarrow \left((X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$. **Approximations** **T** **(hyper par bin)** $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{H}(N_k, n, p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$ fixés. Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, pN_k et $N_k(1-p) \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} N_k = +\infty$ alors $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (condition : $N \geq 10n$). **T** **(bin. par Pois.)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (conditions : $n \geq 30, p \leq 0,1$). **T** **(bin. par norm.)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ainsi $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (conditions : $n \geq 30, np \geq 5$ et $nq \geq 5$).

[1] Cela veut dire de variances non nulles.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **(Pois. par norm.)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (condition : $\lambda \geq 15$) **.**

ESTIMATIONS **Estimation ponctuelle** $\boxed{\mathbf{D}}$ Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n-$éch d'une var X **iid**, on appelle **statistique** ou **estimateur** toute suite de variables $(T_n)_n$ où $\forall n$, $T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. C'est une var**.** **Moyenne empirique** $\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où le $n-$ éch est tq $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{E}(X_k) = \mu$ inconnue**.** $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mu$ et $\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$**.** $\boxed{\mathbf{T}}$ Ⓒ **:** $(\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$**.** ⓈⒸ **:** $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \not\hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ voire de loi commune **??** $\Rightarrow \overline{X_n} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ par le TCL pour n grand**.** **Fréquence empirique** $\boxed{\mathbf{D}}$ Ⓢ **:** $F_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où le $n-$ éch est tq $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où p est inconnu**.** $\boxed{\mathbf{T}}$ $\mathbf{E}(F_n) = p$ et $\mathbf{V}(F_n) = \frac{pq}{n}$**.** $\boxed{\mathbf{T}}$ Ⓢ **:** $\overline{X_n} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ par le **TCL** pour n *grand*, $np > 5$ et $nq > 5$**.** **Variance empirique** $\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2$ où le $n-$ éch est tq $\forall k$, $\mathbf{E}(X_k) = m$ *connue* et $\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2$ *inconnue***.** $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 - \left(\overline{X_n}\right)^2$**.** $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $\mathbf{E}\left(S_n^2\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$**.** $\boxed{\mathbf{D}}$ $(T_n)_n$ est **convergent** ou **consistant** pour θ lorsque $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$**.** $\boxed{\mathbf{D}}$ **Biais d'un estimateur par rapport à $g(\theta)$** : $b_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta(T_n - g(\theta))$. Si $b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est sans biais**. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est asymptotiquement sans biais.** $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** Si $b_{T_n}(\theta) = 0$ soit si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}_\theta(T_n) = 0$ alors (T_n) est convergent. $\boxed{\mathbf{T}}$ **Estimateurs de paramètres usuelles sans biais et cv :** $\left(\overline{X_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$, $(F_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} p$, $\left(\frac{n}{n-1}S_n^2\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$. $\boxed{\mathbf{D}}$ On appelle **risque quadratique** de T_n : $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta\left((T_n - g(\theta))^2\right)$**.** $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{V}_\theta(T_n) + b_{T_n}^2(\theta)^2$**.** $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0\right) \Rightarrow \left((T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)\right)$**.** **Estimation par IC** $\boxed{\mathbf{D}}$ L'intervalle aléatoire $[U_n, V_n]$ est un **intervalle de confiance** de $g(\theta)$ au niveau $1-\alpha$ si $\mathbf{P}([U_n \leq g(\theta) \leq V_n]) \geq 1-\alpha$ (α est appelé le **risque**). $\boxed{\mathbf{T}}$ $IC_\alpha(p) = \left[\ F_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\ ;\ F_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\ \right]$ et $IC_\alpha(p) \subset \left[\ F_n - \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\ ;\ F_n + \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\ \right]$ (condition $\min(nu_n, nv_n, n(1-u_n), n(1-v_n)) \geq 5$). $\boxed{\mathbf{T}}$ ⓈⒸ **:** $IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right]$ (condition $n \geq 30$). Si σ est *inconnu*, l'estimer par la réalisation de $\sqrt{\frac{n}{n-1}}S_n$ noté s ce qui donne : $IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ \right]$**.**

$\boxed{\mathbf{D}}$ Définition
$\boxed{\mathbf{T}}$ Théorème
$\boxed{\mathbf{P}}$ Propriété (s)
src : sous réserve de convergence.
sr|cv| : sous réserve de convergence absolue.
$A \perp\!\!\!\perp B$: A et B indépendants.
$X \perp\!\!\!\perp Y$: X et Y indépendantes.
$X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n$: $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes.
$\forall k \geq 1$, $\mathcal{L}^k$ (respectivement $\mathcal{L}_d^k$) espace vectoriel des variables (discrètes) admettant un moments d'ordre k.
P_X loi de X.