Table des matières

Le poly comporte 44 pages.

1. Préface

Voici en quelques 162 *opus, choisis avec beaucoup de soin et d'amour, l'intégralités des exercices constituant les travaux dirigés que nous ferons ensemble tout au long de l'année et qui formeront le socle de votre formation de futurs probabilistes de haut niveau prêts à être confrontés aux concours parisiens.*

L'ensemble est divisé en neuf sections correspondant aux chapitres qui constituent l'ensemble de votre programme des deux années option scientifique. Il contient la quasi-totalité des thèmes qu'ils soient intellectuels ou calculatoires véritablement incontournables, même si l'exhaustivité est difficilement accessible en prépa[1]*. Je vous préciserez en cours à chaque fois les points essentiels à retenir pour chaque exercice de manière à ce que vous en tiriez un profit maximal. Je rappelle qu'il est bon de ficher un exercice si celui-ci peut vous apporter des réflexes mécaniques à appliquer dans des situations similaires, même si je ne manquerai pas de vous donner mes propres "posters".*

Je rappellerai aussi le conseil trivial précisant que vous devrez absolument passer de longues minutes ***en amont*** *de la correction à préparer ces exercices, voire souffrir dessus, cela est indispensable pour que les notions abordées en cours vous marquent l'esprit. Je rappellerai aussi que contrairement à d'anciennes éventuelles mauvaises habitudes, il faut remettre les choses dans le bon sens à savoir maîtriser le cours avant d'aborder les exercices*

[1] Cela vous changera beaucoup du secondaire!!!

2. Alphabet grec

Majuscule	Minuscule	Nom	Transcription
A	α	alpha	a
B	β	bêta	b
Γ	γ	gamma	g
Δ	δ	delta	d
E	ε	epsilon	e,é
Z	ζ	dzéta	z
H	η	êta	ê,é
Θ	θ	thêta	th
I	ι	iota	i
K	κ	kappa	k ou c
Λ	λ	lambda	l
M	μ	mu	m
N	ν	nu	n
Ξ	ξ	ksi	x
O	o	omicron	o
Π	π	pi	p
P	ρ	rhô	r ou rh
Σ	σ	sigma	s
T	τ	tau	t
Υ	υ	upsilon	u ou y
Φ	φ	phi	ph
X	χ	khi	kh ou ch
Ψ	ψ	psi	ps
Ω	ω	oméga	o

3. Quelques notations

$\wedge$	connecteur logique "et"
$\vee$	connecteur logique "ou"
$\mathbb{N}_{n_0}$	ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0
$[\![1,n]\!]$	intervalle d'entiers compris entre 1 et n
$\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	tribu de Borel
$\biguplus$	union disjointe d'ensembles
Ω	univers
$\mathcal{A}$	tribu $(\sigma-$ algèbre$)$ des événements sur Ω
$\mathbf{P}$	probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$
$\mathbf{P}_A(B)$	probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé
$(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$	espace probabilisé
$X(\Omega)$	ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X
$[X\in\mathcal{I}]$	événement constitué des $\omega\in\Omega$ tels que $X(\omega)\in\mathcal{I}$
$X\boxplus Y$	somme de deux variables indépendantes
f_X	densité de probabilité d'une variable X
F_X	fonction de répartition d'une variable X
$\mathbf{E}(X)$	espérance d'une variable X
$m_r(X)$	moment d'ordre $r\in\mathbb{N}$ d'une variable X
$\mu_r(X)$	moment centré d'ordre $r\in\mathbb{N}$ de la varaible X
$\rho_r(X)$	moment factoriel d'ordre $r\in\mathbb{N}^*$ de la variable X
$\mathcal{L}_d^p$	ensemble des variables discrètes possédant un moment d'ordre $p\in\mathbb{N}$
$\mathcal{L}_c^p$	ensemble des variables à densité possédant un moment d'ordre $p\in\mathbb{N}$
$\mathbf{V}(X)$	variance de la variable X
$\sigma(X)$	écart-type de la variable X
$\operatorname{Cov}(X,Y)$	covariance du couple aléatoire (X,Y)
$\rho_{X,Y}$ ou $\rho(X,Y)$	coefficient de corrélation du couple aléatoire (X,Y)
$X\hookrightarrow\mathcal{L}(\ldots)$	la variable X suit la loi...
δ_C	loi de Dirac de paramètre C
$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$
$\mathcal{U}([a,b])$	loi uniforme sur $[a,b]$
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0,1[$
$\mathcal{B}(n,p)$	loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\,]0,1[$
$\mathcal{H}(N,n,p)$	loi hypergéométrique de paramètres $N\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\,]0,1[$ tel que $Np\in\mathbb{N}^*$ et $N(1-p)\in\mathbb{N}^*$.
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$
$\mathcal{G}(p)$	loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$
$\mathcal{E}(\lambda)$	loi exponentielle de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$
$\mathcal{N}(0,1)$	loi normale centrée réduite
$\mathcal{N}(m,\sigma)$	loi normale de paramètres $m\in\mathbb{R}$ et $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$
$(X_n)_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$	la suite de variables $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable X
$(X_n)_n\xrightarrow{\mathbf{P}}X$	la suite de variables $(X_n)_n$ converge en probabilité vers la variable X
$\sum_n u_n<\infty$	la série de terme général u_n est convergente

CHAPITRE 1

Outils mathématiques

(1) **Calcul de sommes simples finies** Refermer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{\begin{cases} i\in[\![1,n]\!] \\ i\neq j\end{cases}} 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et j un entier non nul fixé.

(b) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k$ où $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.

(2) **La somme des cubes** `(BCPST1_1.05)` Déterminer une fonction polynômiale

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

de degré 4 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $P(x) - P(x-1) = x^3$. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

(3) **Fractions rationnelles et télescopage** `(BCPST1_1.06)`

(a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x réel strictement positif, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S(n) = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

En utilisant (a) exprimer $S(n)$ en fonction de n. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(n)$?

(4) **Fractions rationnelles et télescopage** `(WARUS27.126)` Démontrer que, pour tout entier non nul n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

(5) **La formule du triangle de Pascal généralisée** `(BCPST1_1.03)` Soient n et p deux entiers naturels. On suppose $p \geq 1$ et $n \geq p$.

(a) En utilisant la relation de Pascal, montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq p$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{k}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

(b) En utilisant (a) vérifier que si $n \geq 2$, alors :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1) \times n = \frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{3}$$

(c) Si $n \geq 3$, donner une formule analogue pour la somme suivante :

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n$$

(6) **Le calcul différentiel au secours d'une sommation** `(BCPST1_1.13)`
Pour $x \in \left]-1, 1\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

(a) Donner une expression "simple" de $f(x)$. En déduire que la dérivée f' de f est :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx - (n+1)}{(1-x)^2} x^n$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Remarquer que $S(n) = xf'(x)$ pour une valeur de x bien choisie. Donner la valeur de la somme $S(n)$. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$?

(7) **Le calcul différentiel au secours d'une sommation** `(BCPST1_1.14)` Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, développer par la formule du binôme de l'expression $f(x) = (1+x)^n$. Intégrer entre 0 et 1 les deux expressions de f. En déduire une expression simple de :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Retrouver le résultat précédent en utilisant une propriété des coefficients binomiaux.

(8) **Le calcul différentiel au secours d'une sommation** `(BCPST1_1.15)`

(a) Développer par la formule du binôme de Newton $f(x) = (1+x)^n$.

(b) En calculant de deux manières différentes $\displaystyle\int_0^{-1} f(x)\,dx$, calculer la somme :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k}$$

(c) En calculant $f'(x)$ pour des valeurs bien choisies de x, calculer :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \binom{n}{k}$$

(9) **Des "sommes orphelines"** `(BCPST1_1.16_Type HEC 86)`

(a) Soient $p = 2k$ un entier pair et $i = 2k+1$ un entier impair. Vérifier que $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = k$ et $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = k$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, développer par la formule du binôme $X = (1+1)^n$ et $Y = (1-1)^n$. En étudiant $X+Y$ et $X-Y$, donner la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et de} \quad \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1}$$

(10) **Sommes de produits de coefficients binomiaux**

(a) Calculer pour $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

(b) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$.

(11) **Calcul de sommes doubles finies**

(a) `(BCPST1_1.10)` Soit $n \in \mathbb{N}_2$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$. En déduire les sommes

$$U_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} i \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} j$$

en fonction de n.

(b) `(BCPST1_1.11)` Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer en fonction de n la somme $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$.

(c) `(BCPST1_1.12)` Soient n et m deux entiers naturels non nuls calculer en fonction de m et n les sommes :

$$S_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} 2^{i+j} \quad \text{et} \quad T_{n,m} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=j}^{n} 2^{i-j}$$

(d) `(WARUS 2.123)` Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{k}{j}$.

(12) **Calcul de sommes doubles finies** `(PHAREPSCI_2.22)`
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $A_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$ et $B_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$.

(13) **Calcul de produits**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}_2$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

(b) `(PHAREPSCI 2.17)` Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer pour $n \geq 1$:

(i) $V_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha^k$.

(ii) $W_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha^2}{k}$.

(iii) $Z_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{k^2}$.

(14) **Les nombres complexes au secours de la sommation**

(a) `(Bloc 9)` On considère n un entier naturel non nul. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$$

.

(b) `(Bloc 11_Oral HEC)` Soit n un entier naturel non nul et différent de 1. Calculer :

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$$

(c) `(Bloc 22)` Soit n un entier naturel non nul et (a, b) un couple de réels. Calculer :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb)$$

(15) **Calcul d'un produit à deux indices** `(WARUS 27.127)`
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

CHAPITRE 2

Ensembles

(1) **Ensemble des parties d'un ensemble** `(W3.80)` Soient E et F deux ensembles.

(a) Prouver que $E \subset F \Longleftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$

(b) Montrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. A-t-on l'égalité ?

(2) **Une condition nécessaire et suffisante** `(W4.80)` Soit E un ensemble, et A et B des sous-ensembles de E. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $A = B$ est que :

$$A \cup B = A \cap B$$

(3) **Egalités d'ensembles** `(W5.80)` Soit E un ensemble. Montrer que, quels que soient les sous-ensembles A, B et C de E, si $A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$, alors $A = B = C$.

(4) **Egalités d'ensembles** `(W6.80)` Soit E un ensemble. Prouver que, quels que soient les sous-ensembles A et B de E, s'il existe un sous-ensemble X de E tel que $A \cup X = B \cup X$ et $A \cap X = B \cap X$, alors $A = B$.

(5) **Egalités d'ensembles** `(W8.80)` Soit E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E.

(a) Prouver que $A \backslash B = A$ équivaut à $B \backslash A = B$.

(b) Prouver que $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

(c) Prouver que $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

(d) Prouver que $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$.

(6) **Simplification d'expressions ensemblistes** `(W9.80)` Soient E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E.

(a) Calculer $(X \cap Y) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right)$.

(b) Calculer $(X \cup Y) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right)$.

(c) Calculer $A = (X \cap Y) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) \cup \left(\overline{X} \cap Y\right) \cup \left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right)$.

(d) Calculer $B = (X \cup Y) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right) \cap \left(\overline{X} \cup Y\right) \cap \left(\overline{X} \cup \overline{Y}\right)$.

(7) **L'opération** $\mid$ `(W11.81)` Soient E un ensemble. Pour tous les sous-ensembles A et B de E, on pose $A \mid B = \overline{A \cup B}$.

(a) Exprimer $\overline{A}$ à l'aide de A et de l'opération `"|"`.

(b) Calculer $(A \mid A) \mid (B \mid B)$.

(c) Exprimer $A \cup B$, $A \backslash B$ et $A \Delta B$ à l'aide seulement de A, de B et de l'opération `"|"`.

(8) **Fonction indicatrice** `(W25.83)` Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

(a) Déterminer la fonction indicatrice (ou fonction caractéristique) de l'ensemble $A \backslash B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et de B.

(b) Déterminer la fonction indicatrice de l'ensemble $A \Delta B$ (différence symétrique de A et B) à l'aide des fonctions indicatrices de A et de B.

(c) Utiliser les résultats des questions précédentes pour montrer que, quels que soient les parties A, B et C de E :

(i) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

(ii) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;

(iii) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

(d) Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \varnothing$.

(e) Prouver que, pour que $A = \varnothing$, il faut et il suffit qu'il existe une partie B telle que $A \Delta B = B$.

CHAPITRE 3

Dénombrement

(1) **Le problème des anagrammes** (`W21.219`)

  (a) Une urne contient a_1 boules numérotées 1, a_2 boules numérotées 2, a_3 boules numérotées 3,..., a_p boules numérotées p. L'urne contient donc $N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$ boules. On tire les N boules successivement et sans remise en notant le numéro à chaque tirage. De combien de façons les entiers présents dans l'urne peuvent-ils être répartis au cours des N tirages ?

  (b) On considère le mot "ABRACADABRANTESQUE". Trouver le nombre d'anagrammes de ce mot.

  (c) Quel rapport existe-t-il entre la question (a) et la question (b) ?

(2) **On passe tout au crible !** (`W12.217`) Dans une classe de 26 élèves étudiant tous au moins une langue, 10 élèves étudient l'espagnol, 16 l'allemand, 22 l'anglais, 8 l'espagnol et l'anglais, 4 l'espagnol et l'allemand, 12 l'anglais et l'allemand. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

(3) **Des équipes de foot** (`W13.218`) Un club de football est composé de 31 joueurs, dont 4 gardiens de but. Combien d'équipes différentes de 11 joueurs dont un gardien peut-on former ? (on ne tient pas compte de la place des joueurs, sauf pour les gardiens qui ne peuvent pas jouer à une autre place).

(4) **Jeu de cartes** (`W14.218`)

  (a) De combien de façons peut-on tirer une main de 8 cartes d'un jeu de 32 cartes ?

  (b) Combien de ces mains contiendront 4 coeurs ?

  (c) Combien de ces mains contiendront 4 coeurs et 3 valets (attention au cas du valet de coeur) ?

(5) **Construction de $\boldsymbol{p - listes}$ sous contraintes** (`W20.219`) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

  (a) On suppose que $p \geq 2$. Trouver le nombre de $p - listes$ d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ telles que le plus petit soit en premier et le plus grand en dernier.

  (b) On suppose que $p \geq 3$. Trouver le nombre de $p - listes$ d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ telles que les trois plus grands soient aux trois premières places (dans l'ordre ou non).

  (c) On suppose que $p \geq 3$. Trouver le nombre de $p - listes$ d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ telles que les trois plus grands soient aux trois dernières places (dans l'ordre ou non), et les trois plus petits aux trois premières places (dans l'ordre ou non).

(6) **Construction de $\boldsymbol{p - listes}$ sous contraintes** (`W24.220`) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

(a) Déterminer combien existe-t-il de listes $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de p entiers naturels tels que :
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$$
(b) Déterminer combien existe-t-il de listes $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de p entiers naturels non nuls tels que :
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$$
(c) Soient $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_p$ des entiers naturels tels que $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_p \leq n$. Déterminer combien il existe de listes $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)$ de p entiers naturels non nuls tels que $x_1 \geq r_1$, $x_2 \geq r_2$, $x_3 \geq r_3, \ldots, x_p \geq r_p$ et $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_p = n$.

(7) **Partitions par paires et tournoi de tennis** `(W26.221)` Soit E un ensemble de cardinal $2n$. On appelle partition par paires tout ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ où les p_i sont des paires d'éléments de E deux à deux disjointes.

(a) Déterminer le nombre de partitions par paires de l'ensemble E.

(b) Un tournoi de tennis (en simple) réunit 64 joueurs[1]. De combien de façons peut-on organiser le premier tour ? Combien l'organisateur du tournoi devra-t-il prévoir de rencontre ?

(c) Même questions pour un tournoi en double réunissant 64 joueurs (les équipes sont tirés au sort).

(8) **Partitions** `(W27.221)` Soit E_n un ensemble non vide de cardinal n. Une partition $\mathfrak{A}$ de A est un ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ de parties de E_n non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E_n. On note $\overline{\omega}_n$ le nombre de partitions de E_n.

(a) Calculer $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ et $\overline{\omega}_3$.

(b) On fixe un élément a de E_n. En considérant la partie qui contient a, établir que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \overline{\omega}_n = \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} \overline{\omega}_{n-p} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \overline{\omega}_k$$
(c) Calculer $\overline{\omega}_k$ pour $k \leq 7$.

(9) **Points fixes** `(W28.222/Type ESSEC 2004)` Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même). Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On dit que l'élément i de $[\![1, n]\!]$ est un **point fixe** de σ si, et seulement s'il est invariant par σ (c'est-à-dire si, et seulement si, $\sigma(i) = i$). On dit que σ est un dérangement lorsqu'elle n'admet pas de point fixe.

(a) Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, on note A_i l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ admettant i comme point fixe.
Exprimer l'ensemble D_n des dérangements de $[\![1, n]\!]$ à l'aide des A_i.
En utilisant la formule de Poincaré, calculer le cardinal du complémentaire de D_n dans $\mathfrak{S}_n$.
En déduire le cardinal $d(n)$ de l'ensemble D_n.

---

[1]Taille d'un tournoi type Masters Series dont le recordman des victoires est André Agassi avec 17 réalisations. La dernière ayant eu lieu contre toute attente à Cincinnati en août 2004 en battant au passage Andy Roddick 75 67 76 en demi à l'occasion d'un match mytique et Hewitt en finale 63 36 62, ce qui mettait fin à 16 mois de disette, sa dernière victoire datant d'avril 1984 à Houston !

(b) On note φ_n^p le nombre des permutations de $[\![1,n]\!]$ admettant p points fixes.
Exprimer φ_n^p à l'aide de $d\,(n-p)$.
En déduire une expression de φ_n^p sous forme de somme.

(10) **Réunion d'ensembles** `(W18.218)` Soit E un ensemble de cardinal n.

(a) Calculer le nombre de paires (A,B) de parties de E telles que $A \subset B$. Combien de telles paires satisfont-elles en plus à la condition $A \neq B$?

(b) Combien existe-t-il de couples de parties de E dont la réunion soit égale à E ? Combien existe-t-il de recouvrements de E à l'aide de deux parties ?

(c) Combien existe-t-il de triplets de parties dont la réunion soit égale à E ? Généraliser à k parties.

CHAPITRE 4

Espaces probabilisés

(1) **Langage ensembliste-langage probabiliste** (`Foata 1.5`) Soient A, B, C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations ensemblistes les événements ci-après :

(a) A seul se produit.

(b) A et C se produisent, mais non B.

(c) Les trois événements se produisent.

(d) L'un au moins des événements se produit.

(e) Deux événements au moins se produisent.

(f) Un événement au plus se produit.

(g) Aucun des trois événements ne se produit.

(h) Deux événements exactement se produisent.

(i) Pas plus de deux événements ne se produisent.

(2) **Recherche de tribus engendrées** (`WARUS1.738`) Soit $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Déterminer la tribu engendrée par $\{\{0, 1\}, \{3, 4\}\}$.

(b) Déterminer la tribu engendrée par $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.

(c) Déterminer la tribu engendrée par $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

(3) **Recherche de tribus engendrées** (`WARUS2.738`) Soit $\Omega = \mathbb{N}$.

(a) Déterminer la tribu engendrée par $\{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$.

(b) Déterminer la tribu engendrée par $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

(4) **Recherche de tribus engendrées** (`WARUS10.738`) Soit Ω un ensemble et A,B des sous-ensembles de Ω.

(a) Déterminer la tribu engendrée par $\{A \cup B, A \cap B\}$.

(b) Déterminer la tribu engendrée par $\left\{A \cup B, \overline{A} \cap \overline{B}\right\}$.

(c) Déterminer la tribu engendrée par $\left\{A \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\right\}$.

(5) **Manipulations de probabilités** (`Guégand18.71`) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A et B dans $\mathcal{A}$ tels que $\mathbf{P}(A \cap B) \neq 0$. Calculer $\mathbf{P}_B(A), \mathbf{P}_A(B), \mathbf{P}_{A\cap B}(A \cup B), \mathbf{P}_B\left(\overline{A}\right)$ et $\mathbf{P}_B\left(\overline{A \cup B}\right)$ en fonction de $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$.

(6) **Manipulations de probabilités** (`Cassini2.19`) Si $\mathbf{P}(C) > 0$, montrer que :

$$\mathbf{P}_C(A \cup B) = \mathbf{P}_C(A) + \mathbf{P}_C(B) - \mathbf{P}_C(A \cap B)$$

(7) **Manipulations de probabilités** `(Cassini9.20)` Si A, B, C sont indépendants et $\mathbf{P}(A \cap B) \neq 0$, montrer que :

$$\mathbf{P}_{A\cap B}(C) = \mathbf{P}(C)$$

(8) **Manipulations de probabilités** `(Guégand11.71)` Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A \cap B)\, \mathbf{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \mathbf{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$$

(9) **Inégalité probabiliste** `(Guégand22.71)` Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, montrer que :

$$[\mathbf{P}(A \cap B)]^2 \leq \mathbf{P}(A)\, \mathbf{P}(B)$$

(10) **Inégalité probabiliste** `(Cassini18.21)` Si $\mathbf{P}(A) > 0$, montrer que :

$$\mathbf{P}_{A\cup B}(A \cap B) \leq \mathbf{P}_A(A \cap B)$$

(11) **Inégalité probabiliste** Soient A et B deux événements tels que $\mathbf{P}(A)\, \mathbf{P}(B) \neq 0$. Montrer que :

$$\mathbf{P}_B(A) > \mathbf{P}(A) \Longrightarrow \mathbf{P}_A(B) > \mathbf{P}(B)$$

(12) **Inégalités probabilistes** `(Guégand8.71)` Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Montrer que :

(a) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ \mathbf{P}(A \cap B) \geq \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}\left(\overline{B}\right).$

(b) $\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n,\ \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right).$

(c) $\left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \subset \overline{A} \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C).$

(13) **Inégalité probabiliste** `(Guégand20.71)` Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A, B, C dans $\mathcal{A}$.

(a) Calculer $\mathbf{P}(A \Delta C).$

(b) Montrer que $\mathbf{P}(A \Delta C) \leq \mathbf{P}(A \Delta B) + \mathbf{P}(B \Delta C)$.

(14) **Inégalités de Bonferroni** `(Cassini16.14)` Montrer que :

(a) $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j).$

(b) $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k).$

(15) **La formule de Poincaré "customisée"** `(Foata 4.22)` Montrer que la formule de Poincaré est encore vraie en échangeant les signes " $\cup$ " et " $\cap$ " ; en d'autres termes, montrer que l'on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k})$$

(16) **Majoration d'une probabilité** `(Cassini17.21)` Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ n événements indépendants d'un espace probabilisé, montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\right).$

(17) **Application de la sous-additivité** `(Quebec 19)` Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = 1$. Montrer que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1$$

(18) **Le lemme de Borel-Cantelli** `(MazliakB3.26)` Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements défini sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Montrer que la probabilité qu'une infinité d'événements A_i se produisent simultanément est nulle.

(19) **Une chaîne de Markov**[1] `(e=mc`^{2}`13)` Trois enfants A,B,C jouent à la balle.

– Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à B est $\dfrac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\dfrac{1}{4}$.

– Lorsque B a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à A est $\dfrac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\dfrac{1}{4}$.

– C envoie toujours la balle à B.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "A (resp. B,C) a la balle à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer".
On pose $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$, $c_n = p(C_n)$.
Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs ; c'est par convention le lancer numéro 0. Donc on pose $a_0 = p(A_0)$, $b_0 = p(B_0)$, $c_0 = p(C_0)$ avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

(a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$. Montrer en la déterminant, qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = D^n X_0.$$

(b) En admettant[2] que :

$$D^n = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & \frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & -\frac{6}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} \\ -\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & -\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} \\ -\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

calculer X_n en fonction de n.

(c) Calculer les limites de a_n, b_n, c_n quand n tend vers $+\infty$.

(20) **Jeu de pile ou face** `(Oral ESCP 3.8.02)` On considère deux pièces truquées A et B ; A donne pile avec la probabilité a $(0 < a < 1)$, et B donne Pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance : si on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois $(k \geq 2)$.

---

[1] Mathématicien russe (1856 – 1922)

[2] pour de très peu de temps encore tant que vous n'avez pas étudié la diagonalisabilité d'une matrice en algèbre linéaire. . . .

(a) Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au $k-$ième lancer.
(b) Déterminer la probabilité d'obtenir pile au $k-$ième lancer.
(c) Déterminer la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini. Interpréter le résultat obtenu si l'on suppose maintenant $a = 1$ et $0 < b < 1$.

(21) **Autour de la formule du crible** `(Oral ESCP 3.13.02)` Soient n et r deux entiers strictement positifs. Lors de la kermesse d'une association, n personnes sont présentes. On tire r fois au sort une personne (avec remise) pour offrir r lots aux personnes présentes.

(a) (i) Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité qu'une personne donnée P_1 ne reçoive aucun lot.
(ii) Soit k un entier inférieur strictement à n. Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité que les personnes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ne reçoivent aucun lot.
(b) Rappeler la formule du crible.
(c) Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité que chaque personne ait reçu au moins un lot.
(i) Soit m un entier strictement inférieur à n. Déduire de la question précédente le calcul, en fonction de n, r et m, de la probabilité p_m qu'exactement m personnes, parmi les n personnes présentes, n'aient rien reçu.
(ii) Comment calculer la probabilité q_m qu'au moins m personnes n'aient rien reçu ?

(22) **Jeu de dés** On lance deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.

(a) Soit E_n l'événement "une somme de 5 apparaît au $n^{\text{ème}}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît". Calculer $\mathbf{P}(E_n)$.
(b) Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.
(c) Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.
(d) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

(23) **Tirages dans une urne bicolore** `(Cassini10.20)` Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard (chaque boule a la même probabilité d'être tirée), et une seconde boule est ensuite choisie au hasard parmi les $r + n - 1$ boules restantes. Trouver la probabilité pour que :

(a) Les deux boules soient rouges.
(b) La première boule soit rouge et la seconde noire.

(24) **Urne de Pôlya** `(Cassini11.20)` Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard, on note sa couleur, et on la remet avec d boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire. Trouver la probabilité pour que :

(a) La seconde boule tirée soit noire.
(b) La première boule est noire, sachant que la seconde est noire.

(25) **Le théorème de Bayes** Une matière étant enseignée par 3 professeurs `A,B,C` le sujet d'examen est susceptible d'être donné par l'un des 3 enseignants. D'après les statistiques des années précédentes et aussi d'après les charges d'examens prévues, les étudiants évaluent à :

– 0,35 la probabilité que ce soit l'enseignant `A` qui pose le sujet.
– 0,40 la probabilité que ce soit l'enseignant `B` qui pose le sujet.
– 0,25 la probabilité que ce soit l'enseignant `C` qui pose le sujet.

Par ailleurs, ils redoutent qu'un certain chapitre `R` fasse l'objet d'une question à l'examen. Par des déductions psychologiques, ils évaluent à 10% la probabilité que le chapitre `R` soit choisi si c'est l'enseignant `A` qui pose le sujet, 40% si c'est l'enseignant `B`, 80% si c'est l'enseignant `C`. Le jour J arrive et l'événement tant redouté se produit. Quelles sont les probabilités que le sujet ait été posé par :

(a) L'enseignant `A` ?
(b) L'enseignant `B` ?
(c) L'enseignant `C` ?

(26) **Jeu de pile ou face** Soit p un réel de l'intervalle ouvert $]0,1[$. Une personne joue à un jeu de pile ou face. A chaque lancer, elle a une probabilité p d'obtenir "pile" et une probabilité $1-p$ d'obtenir "face". La personne est déclarée gagnante dès qu'elle a obtenu deux "piles" de plus que de "faces", et est déclarée perdante dès qu'elle a obtenu deux "faces" de plus que de "piles".

(a) Quelle est la probabilité pour que la partie dure plus de $2n$ lancers ?
(b) Quelle est la probabilité pour que la personne gagne ?

(27) **Indépendance mutuelle** `(Oral ESCP 3.17.03)` On lance une pièce équilibrée n fois $(n \geq 2)$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A_k désigne l'événement "on obtient pile au $k-$ème lancer". Soit A_{n+1} l'événement "le nombre de piles obtenus au cours des n lancers est pair".

(a) Déterminer les probabilités des événements A_k, pour $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

(i) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}(A_{n+1})$.
(ii) En déduire que les événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants (i.e. $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) \neq \mathbf{P}(A_1) \ldots \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1})$).
(iii) Montrer que toute sous famille de n événements choisis parmi $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

CHAPITRE 5

Variables aléatoires discrètes

(1) **Recherche d'un paramètre** `(WARUS1.812)` Soit a un réel non nul. On considère la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2+a^n}{n!}\right)$. Pour quelle valeur de a, la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définit-elle une loi de probabilité ?

(2) **Inégalité probabiliste de Laplace**[1] On considère une variable aléatoire réelle sur un certain espace probabilisé. On suppose que pour tout réel $t \geq 0$, la variable $\exp(-tX)$ possède une espérance. Montrer alors que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}([X \leq 0]) \leq \mathbf{E}\left(e^{-tX}\right)$$

(3) **Inégalité probabiliste** `(Cassini12.35)` Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que :

$$\forall (\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbf{P}([X - np > \varepsilon]) \leq \mathbf{E}(\exp(\lambda(X - np - \varepsilon)))$$

(4) **IBT** `(WARUS25.819)` On lance n fois un dé et soit F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition du six. $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ où X_n est la variable aléatoire égale au nombre d'apparition du six. Trouver n tel que $\mathbf{P}\left(\left[\left|F_n - \dfrac{1}{6}\right| < 0.99\right]\right) \geq 0.99$.

(5) **Moment factoriel d'ordre r d'une variable de Poisson** `(Cassini21.36)` Soit X une variable de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour $r \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbf{E}(X(X-1)\ldots(X-r+1)) = \lambda^r$$

(6) **Moment factoriel d'ordre r d'une variable géométrique sur $\mathbb{N}$** `(Cassini22.36)` Soit X une variable géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p. Montrer que pour $r \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbf{E}(X(X-1)\ldots(X-r+1)) = \frac{q^r r!}{p^r}$$

(7) **Loi d'une variable fonction d'une autre** `(WARUS8.813)` Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = 4\left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1$ où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière entière. Déterminer la loi de Y.

(8) **Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence** `(WARUS4.812)` Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = n]) = \frac{4}{n}\mathbf{P}([X = n-1])$$

Calculer $\mathbf{P}([X = 0])$ et en déduire la loi de X son espérance et sa variance.

[1] Laplace Pierre-Simon (Marquis De) (1749 – 1827)

(9) **Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence** `(WARUS5.812)` Soit X une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de X son espérance et sa variance sachant que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbf{P}([X = n+2]) = 5\mathbf{P}([X = n+1]) - \mathbf{P}([X = n])$$

(10) **Recherche d'une loi à partir d'une relation probabiliste**`(WARUS5.812)` Soit X une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de X sachant que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \exists p \in]0,1[\mid \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = n]) = p\mathbf{P}([X \geq n])$$

(11) **Loi et série logarithmique** `(WARUS7.813)` Soit $p \in]0,1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_k = \frac{-p^{k+1}}{(k+1)\ln(1-p)}$$

Vérifier que $(p_n)_{n\geq 0}$ est la loi d'une variable X c'est-à-dire telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = p_k$$

(12) **Loi d'une variable fonction d'une autre** `(WARUS9.813)` Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est impaire} \\ X(\omega)/2 & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est paire} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y son espérance et sa variance.

(13) **Loi d'une variable fonction d'une autre** `(PHAREe11.29)` Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est impaire} \\ X(\omega)/2 & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est paire} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y.

(14) **Une inégalité probabiliste** `(Cassini1.34)` Si $g : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est strictement croissante, montrer que pour $a > 0$:

$$\mathbf{P}([|X| \geq a]) \leq \frac{\mathbf{E}(g(|X|))}{g(a)}$$

(15) **Une inégalité probabiliste** `(Cassini2.35)` Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\alpha]$ montrer que pour $0 \leq a < \alpha$ on a :

$$\mathbf{P}([h(X) \geq a]) \geq \frac{\mathbf{E}(h(X)) - a}{\alpha - a}$$

(16) **Théorème de transfert** `(Cassini17.36)` Soit X une variable géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p. Montrer que :

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = (\ln p)^{\frac{p}{p-1}}$$

(17) **Théorème de transfert** `(PHAREe11.27)` Soit X variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ et soit α un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance et la calculer.

(18) **Espérance et antirépartition** `(ROQUEIII.67)` Soit X une variable aléatoire à valeurs entières positives.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([X = k]) + (n+1)\mathbf{P}([X > n])$$

(b) En déduire :

(i) X admet une espérance si et seulement si $\sum_k \mathbf{P}([X > k])$ est convergente.

(ii) Si l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessus est vérifiée, on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > k])$$

(19) **Mode(s) d'une distribution**

(a) `(Cassini 6.34)` Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Quelle valeur de k maximise l'expression $\mathbf{P}([X = k])$.

(b) `(Cassini 9.34)` Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Quelle valeur de k maximise l'expression $\mathbf{P}([X = k])$.

(20) **Loi et antirépartition** `(PHAREe11.14)` Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une et sans remise. On s'arrête dès que le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer $\mathbf{P}([X > k])$ et en déduire la loi de X.

(21) **Tirages sans remise** `(PHAREe11.08)` Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. Soit n un entier compris entre 1 et N. On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne (donc sans remise). On note Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré.

(a) Combien y a-t-il de poignées de n boules possibles ?

(b) Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ?

(c) Combien y a-t-il de poignées telles que $[Y \geq k]$? En déduire $\mathbf{P}([Y \geq k])$.

(d) Déterminer la loi de Y.

(22) **Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, loi géométrique sur $\mathbb{N}$** `(PHAREe11.07)` Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées avant la boule noire.

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) Quelle est la loi de Y ? Calculer l'espérance de Y.

(23) **Loi du plus grand des numéros** `(PHAREe11.04)` On lance deux fois de suite un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de X.

(24) **Loi du plus grand et du plus petit des numéros tirés** `(PHAREb16.07)` Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules.

(a) On note Y le plus grand des numéros des deux boules. Déterminer la fonction de répartition puis la loi de Y. Déterminer l'espérance de Y.

(b) On note X le plus petit des deux numéros tirés. Déterminer la loi de X.

(25) **Loi de Pascal, loi binomiale négative** Supposons qu'on réalise des expériences indépendantes de Bernoulli avec le paramètre p.

(a) Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'essais nécessaires à l'obtention du $r^{\text{ième}}$ succès ($r \geq 1$). Déterminer la loi de X.

(b) Soit Y la variable aléatoire associée au nombre d'échecs avant l'obtention du $r^{\text{ième}}$ succès ($r \geq 1$). Déterminer la loi de Y.

(26) **Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore** (PHAREb16.06) Une urne contient $n-2$ boules blanches et deux boules rouges $(n \in \mathbb{N}_2)$. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On désigne par X le rang d'apparition de la première boule rouge et par Y celui de la seconde. Déterminer la loi de X et celle de Y.

(27) **Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore** (PHAREb16.08) Une urne contient $n \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $x \in [\![1, r]\!]$. On appelle X le rang d'apparition de la $x^{\text{ème}}$ boule rouge. Trouver la loi de X.

(28) **Tirages simultanés** (PHAREb16.11) Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n $(n \geq 3)$. On extrait 3 jetons simultanément, on note X, Y, Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$. Déterminer la loi de Y.

(29) **Le jeu de Pierre et Marie** (POLYTECHIII.122) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour $n > 0$:

$$\mathbf{P}([X = n]) = \frac{\lambda}{n(n+1)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

(a) Calculer λ.

(b) Pierre et Marie jouent selon la règle suivante : une partie consiste à tirer un entier $n > 0$ suivant la loi de X. Si n est impair, Marie donne n francs à Pierre. Si n pair, Pierre donne n francs à Marie. On note G le gain de Pierre sur une partie : $G(n) = +n$ si Pierre gagne et $G(n) = -n$ si Marie gagne.

(i) Calculer la probabilité que Pierre gagne une partie.

(ii) Préciser l'ensemble des valeurs de G et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} G(n)\,\mathbf{P}([X = n])$.

CHAPITRE 6

Vecteurs aléatoires discrets

(1) **Loi conjointe, lois marginales, indépendance** `[ENS17.1]` On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant 4 jetons numérotés de 1 à 4. Soit U le plus petit et V le plus grand des numéros obtenus.

   (a) Déterminer la loi conjointe de U et V.

   (b) Déterminer les lois marginales de U et V.

   (c) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

(2) **Loi conjointe, indépendance** `[ENS17.5]` On lance un dé honnête et on note X le numéro obtenu. Puis on relance X fois le dé et on note Y le nombre d'as obtenus lors de la deuxième série de tirage.

   (a) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

   (b) X et Y sont-elles indépendantes ?

(3) **Loi d'une somme** `[ENS18.3]` Pierre et Paul lancent chacun n fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$). Soient X et Y les nombres de pile obtenus respectivement par Pierre et Paul.

   (a) Déterminer la loi de X et de Y.

   (b) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

(4) **Egalité de deux variables** `[CAPES06.2.96]` Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, quelle est la probabilité de l'événement $[X = Y]$?

(5) **Antirépartition du min d'un couple géométrique** `[ENS14.3]` Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, et soit $U = \min(X,Y)$. Calculer $\mathbf{P}([U > k])$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de U, son espérance et sa variance.

(6) **Somme de variables de Poisson indépendantes** `[ENS15.4]` Soient X, Y et Z trois variables mutuellement indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson de paramètre λ, μ et υ. Calculer, pour tout $(i,j,k) \in \mathbb{N}^3$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbf{P}_{[X+Y+Z=i+j+k]}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k])$$

(7) **Loi d'une somme et variables indépendantes** `[CAPES06.1.96]` Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson respectivement de paramètre λ et p. On note $S = X + Y$. Si s est un entier fixé, quelle est la loi de probabilité conditionnelle de X sachant $[S = s]$? (On donnera explicitement le nom de cette loi).

(8) **Inégalité probabiliste** `[TtesLesProbas135]` Soit X et Y deux variables $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et ayant un moment d'ordre deux. Montrer que pour tout réel strictement positif ε, on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left([|X-Y| \geq \varepsilon]\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\left(|X-Y|^2\right)$$

(9) **Loi d'un couple, covariance** `[CAPES5.3.79]` On considère la variable aléatoire X prenant ses valeurs avec équiprobabilité dans l'ensemble $\{-a, -b, b, a\}$ (où a et b sont des réels $0 < a < b$) et l'on pose $Y = X^2$.

(a) Ecrire la loi de la variable aléatoire Y et celle du couple (X, Y).

(b) Montrer que $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$ alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

(10) **Coefficient de corrélation** `[ENS27.3]` On pioche simultanément 3 jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4 et on note U et V le plus petit et le plus grand des numéros obtenus.
Calculer le coefficient de corrélation linéaire de U et V.

(11) **Loi conjointe, lois marginales, indépendance** `[ENS17.2]` On lance deux fois de suite un dé. Soient X et Y le premier et le second numéro obtenus et soit $U = \min(X, Y)$.

(a) Donner la loi du couple (X, Y), la loi de X et la loi de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(b) Déterminer la loi du couple (X, U) et la loi de U. Les variables X et U sont-elles indépendantes ?

(12) **Variable fonction d'autres** `[GUEI-42]` Soient X et Y deux variables indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, X suivant une loi géométrique de paramètre a $(a \in]0, 1[)$. On considère la variable aléatoire définie par :

$$Z = \begin{cases} X - Y & \text{si} \quad X > Y \\ 0 & \text{si} \quad X \leq Y \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z en fonction de celle de Y et montrer qu'elle ne dépend que de $\alpha = \mathbf{E}\left((1-a)^Y\right)$.

(13) **Variable fonction d'autres** `[GUEI-53]` Soient X et Y deux variables entières et indépendantes, X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, Y suivant une lioi de Poisson de paramètre λ. Soit Z la variable telle que :

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X = 0 \\ Y & \text{si} \quad X = 1 \end{cases}$$

Déterminer :

(a) La loi de Z.

(b) $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$.

(c) $\mathbf{P}_{[Z=0]}([X = 1])$.

(14) **Loi d'un vecteur, lois marginales, loi d'une somme, loi d'un produit** `[ENS17.4]` On tire simultanément 3 jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note U, V, W les numéros tirés, rangés dans l'ordre croissant $U < V < W$.

(a) Déterminer la loi du vecteur aléatoire (U, V, W) et les lois marginales de U, V et W.

(b) Dans le cas où $n = 5$, déterminer les lois de la somme $S = U + V + W$ et du produit $T = UVW$.

(15) **Loi conditionnelle et loi inconditionnelle : relativisation** `[ENS15.2]` On suppose que le nombre de voitures traversant par jour le péage d'une autoroute est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et que le péage comprend 12 guichets.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance Z du nombre de voitures se présentant par jour au guichet numéro 1.

(16) **Loi conditionnelle et loi de Poisson** `[ENS15.3]` Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et Y une variable aléatoire dont la loi sachant $[X = k]$ est la loi de Poisson $\mathcal{P}(k)$.

(a) Calculer $\mathbf{P}([Y = 0])$.

(b) Calculer l'espérance de Y.

(17) **Espérance totale** `[Pagdom06.58]` Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et λ un réel strictement positif.

(a) j et k désignant deux entiers naturels, $a_{k,j}$ des réels tels que la série $\sum_k a_{k,j}$, $k \in \mathbb{N}$ soit convergente pour tout j appartenant à $[\![0, n]\!]$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$$

(b) Soient X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et S une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on définit l'espérance conditionnelle de S sachant que $X = k$ par :

$$\mathbf{E}_{[X=k]}(S) = \sum_{j=0}^{n} j \mathbf{P}_{[X=k]}([S = j])$$

C'est donc l'espérance de la loi conditionnelle de S sachant $[X = k]$.
Montrer que :

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}_{[X=k]}(S) \mathbf{P}([X = k])$$

*Cette formule s'appelle **formule de l'espérance totale**.*

(18) **Espérance conditionnelle** `[WAR9.2.315]` Soit un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est définie dans le tableau ci-dessous :

$X \downarrow \underset{\longrightarrow}{Y}$	1	2	3	4
1	0.08	0.04	0.16	0.12
2	0.04	0.02	0.08	0.06
3	0.08	0.04	0.16	0.12

(a) Déterminer les lois marginales de ce couple.

(b) Les lois de X et Y sont-elles indépendantes ?

(c) Calculer la covariance du couple (X,Y).
(d) Déterminer les lois conditionnelles de X sachant que $Y=2$ et de Y sachant que $X\in\{1,3\}$.
(e) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathbf{E}(Y\mid X)$.
(f) Calculer $\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y\mid X))$ et comparer à $\mathbf{E}(Y)$.

(19) **Espérance conditionnelle** `[WAR9.3.316]` Soit un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est définie dans le tableau ci-dessous :

$X\diagdown Y$	1	2	3	4
1	0	0	0	0.3
2	0.2	0	0	0
3	0	0	0.1	0
4	0.3	0.1	0	0

(a) Déterminer les lois marginales de ce couple.
(b) Les lois de X et Y sont-elles indépendantes ?
(c) Calculer la covariance du couple (X,Y).
(d) Déterminer les lois conditionnelles de X sachant que $Y=2$ et de Y sachant que $X\in\{1,4\}$.
(e) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathbf{E}(X\mid Y)$.
(f) Calculer $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X\mid Y))$ et comparer à $\mathbf{E}(X)$.

(20) **Espérance conditionnelle** Soit (X,Y) un vecteur aléatoire discret dans $\mathbf{N}^2$ dont la loi conjointe est :

$$\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])=\binom{n}{x}\binom{n-x}{y}p^x q^y(1-p-q)^{n-x-y}$$

pour $x,y\in\{0,\dots,n\}$ avec $x+y\leq n$ (loi multinomiale).

(a) Donner la loi de X.
(b) Déterminer les lois conditionnelles de Y sachant que $[X=x]$ et de X sachant que $[Y=y]$.
(c) Calculer $\mathbf{E}(Y\mid[X=x])$ et $\mathbf{E}(X\mid[Y=y])$.
(d) Trouver $\mathbf{E}(Y\mid X)$ et $\mathbf{E}(X\mid Y)$.

(21) **Espérance conditionnelle** Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, où X_1 et X_2 sont des variables de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Posons $Z=X_1+X_2$.

(a) Trouver la loi du couple (X_2,Z) et celle de X_2 sachant que $[Z=z]$.
(b) En déduire $\mathbf{E}(X_2\mid[Z=z])$ et $\mathbf{E}(X_2\mid Z)$.

(22) **Espérance conditionnelle** Montrer que $\mathbf{E}[aY_1+bY_2\mid X]=a\mathbf{E}[Y_1\mid X]+b\mathbf{E}[Y_2\mid X]$.

(23) **Espérance conditionnelle** Soit X et Y deux variables indépendantes. Montrer que $\mathbf{E}(Y\mid X)=\mathbf{E}(Y)$.

(24) **Loi d'une somme, loi de max, loi de min** `[Lapres2.29]`

(a) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $n\in\mathbf{N}$ donné. Trouver les lois suivies par les variables :

(i) $Y = \max(n, X)$.
(ii) $Z = \min(n, X)$.

(b) Soit X_1 une variable aléatoire réelle indépendante de X qui suit elle aussi une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Trouver les lois suivies par :

(i) $X + X_1$.
(ii) $\max(X, X_1)$.
(iii) $\min(X, X_1)$.

(25) **Loi de max, loi de min et fonction de répartition** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p $(0 < p < 1)$, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{P}([Y = k]) = (1 - p)^{k-1} p$$

(a) Quelle est la fonction de répartition de X et la valeur, pour tout réel x, de $\mathbf{P}([X > x])$?

(b) Notons U (resp. V) la variable aléatoire égale au minimum (resp. maximum) des deux variables X et Y : $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$.

(i) Quelle est la fonction de répartition de V; en déduire la probabilité que $[V = k]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
(ii) De façon semblable, quelle est la loi de probabilité de U ?

(c) Plus généralement, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, toutes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, quelle est la loi de probabilité des variables aléatoires : $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(26) **Covariance et inégalité** `[Agreg10.97]` Soient (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires vérifiant $X + Y + Z = 1$. On suppose que l'on a $\mathbf{V}(X) \leq \mathbf{V}(Y) \leq \mathbf{V}(Z) < +\infty$. Montrer que :

(a) La variable Z est en corrélation négative avec X ainsi qu'avec Y.
(b) L'on a $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$ si et seulement si $\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) \leq \mathbf{V}(Z)$.
(c) L'on a $|\text{Cov}(X, Z)| \leq |\text{Cov}(Y, Z)|$.

(27) **Coefficient de corrélation** `[ENS27.2]` Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p et $Y_i = X_i X_{i+1}$.
Calculer $\rho(Y_i, Y_j)$ pour $i \leq j$.

(28) **Loi d'un quotient de variables indépendantes** `[ENS22.4]` Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p, $p \in \left]0, 1\right[$.
On pose $q = 1 - p$.

(a) Déterminer la loi du quotient $U = \dfrac{X}{Y}$.
(b) Déterminer $\mathbf{E}(U)$ et vérifier qu'on a toujours $\mathbf{E}(U) > 1$.

(29) **Loi du min d'un couple aléatoire** `[ENS14.3]` Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$, et soit $U = \min(X, Y)$. Calculer $\mathbf{P}([U > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de U, son espérance et sa variance.

(30) **Loi d'un couple, loi marginale, loi d'une différence** `[Lapres2.19]` Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeur dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\mathbf{P}_{[Y=n]}\left([X=k]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

(a) Trouver la loi du couple (X, Y) en fonction de la loi de Y.

(b) Montrer que $\mathbf{P}\left([X \leq Y]\right) = 1$.

(c) Soit $a \in \left]0, 1\right[$. On suppose que $\mathbf{P}\left([Y=n]\right) = (1-a)^2 (n+1) a^n$. Trouver les lois de X puis de $Y - X$.

(31) **Somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi : formule de Waldt** `[ROV108_ESCP 1990]` Soient X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et indépendantes avec N et soit Y définie par $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Déterminer l'espérance et la variance de Y en fonction des espérances et variances de X et N.

CHAPITRE 7

Variables aléatoires à densité

(1) **Densité de probabilité** On considère la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Montrer que f peut constituer la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

(2) **Recherche d'un paramètre** Soit X une variable aléatoire de densité associée f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ a\left(3x - x^2\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

(a) Trouver le coefficient a.
(b) Construire la courbe représentative de la fonction densité de probabilité f.
(c) Calculer la probabilité de la variable X de tomber dans l'intervalle $]1, 2[$.

(3) **Fonction de répartition et calcul de probabilités** Une variable aléatoire X est donnée par la fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Calculer la probabilité que la variable aléatoire X se situe dans les intervalles $]1.5; 2.5[$ et $]2.5; 3.5[$.

(4) **Changement de variable affine** Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Donner la loi de $Y = -X$.

(5) **Changement de variable puissance** Soit X une variable aléatoire de densité f associée définie par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Soit $Y = X^2$ et $Z = X^3$. Montrer que Y et Z sont des variables à densité dont on déterminera une densité.

(6) **Densité paramétrée et changement de variable $x \mapsto x^2$** `[GUEII-37]` Soit X la variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{si} \quad x \geq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

(a) Déterminer k.

(b) Trouver $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

(c) Déterminer la loi de $Y = X^2$.

(7) **Changement de variable exponentiel** `[ESCP]` Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[1,2]$. Déterminer une densité et la fonction de répartition de $Y = \exp\left(X^2 - 1\right)$.

(8) **Valeur absolue d'une variable à densité** `[ESCP]` Soit X une variable à densité dont une densité associée est f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in \,]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\end{cases}$$

Montrer que $Y = |X|$ est variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

(9) **Changement polynomial** `[ESCP]` Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de $Y = X^2 + 1$.

(10) **Variable à densité et antirépartition** `[GUEII-1.2]` Soit X une variable absolument continue, de fonction de répartition F à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et ayant une espérance $\mathbf{E}(X)$. Montrer qu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-F(x)) = 0$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t])$ converge et vaut $\mathbf{E}(X)$.

(11) **Vecteur aléatoire exponentiel** `[GUEII-34]` Soient n un entier naturel non nul et $X_1, \ldots, X_n$ n variables mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi exponentielle de paramètre λ.

(a) Préciser la loi de $Y_n = \min(X_1, \ldots X_n)$, son espérance et sa variance.

(b) Préciser la loi de $S = X_1 + \cdots + X_n$.

(12) **Variable à densité et partie entière** `[GUEII-2]` Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$. Préciser la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X(\omega) \rfloor$ désigne la partie entière de $X(\omega)$, ainsi que celle de $Z = X - Y$.

(13) **Vecteur aléatoire à densité** `[GUEII-26]` Soient n un entier naturel non nul et $X_1, \ldots, X_n$ n variables indépendantes et de même loi, de densité commune f où :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0,\theta] \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \max\limits_{1 \le i \le n}(X_i)$.

(a) Trouver $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

(b) Déterminer la loi de T_n.

(14) **Variables exponentielles et loi d'une différence, loi d'un min, loi d'un écart** `[GUEII-35]` Soient X et Y deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ, $(\lambda > 0)$. On pose $U = X - Y$, $V = \min(X,Y)$, $Z = |U| = |X - Y|$. Déterminer les lois de U, V et Z et examiner l'indépendance éventuelle de U et V ainsi que de Z et V.

(15) **Produit d'une variable normale et d'une variable à deux états, covariance** `[GUEII-53]` Soient X une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable telle que :

$$\mathbf{P}([Y=1]) = \mathbf{P}([Y=-1]) = \frac{1}{2}$$

X et Y sont supposées indépendantes. On pose $Z = XY$.

(a) Déterminer la loi de Z.

(b) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Z)$.

(16) **Loi gamma et loi de Poisson** `[GUEII-30]` Soient Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et X suivant une loi gamma de paramètres 1 et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathbf{P}([Y<\alpha]) = \mathbf{P}([X>\lambda])$$

(17) **Produit de convolution** `[OralHEC99]` On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y, définies sur le même espace probabilisé, suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Soit t un réel strictement positif. Montrer que la variable $Y - tX$ admet pour densité l'application h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si} \quad x>0 \\ \dfrac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

(b) En déduire une densité de la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{X}{X+Y}$.

(18) **Loi log-normale** `[OralHEC97]` Soit $a>0$. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{at} \exp\left(-\dfrac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) & \text{si} \quad t>0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$ converge.

(b) Montrer qu'elle définit une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi **Log-normale** de paramètre $a>0$ si et seulement si elle admet la densité h. On considère une variable aléatoire X suivant une loi Log-normale de paramètre $a>0$.

(c) Montrer que X admet une espérance et déterminer $\mathbf{E}(X)$.

(d) Exprimer sous forme d'intégrale, la fonction de répartititon de la variable aléatoire $Y = \dfrac{\ln X}{a}$. Déterminer une densité de la loi de Y et indentifier cette loi.

(e) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$. Identifier cette loi.

(19) **Loi d'un produit et loi d'un quotient** `[03.19.98]` Dans cet exercice f désigne l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur un espace probabilisé telle que $X(\Omega) = [1, +\infty[$ et admettant f pour densité. On pose $Y = \ln X$. Déterminer la loi de Y, puis celle de $-Y$.

(c) Soient X_1, X_2, deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi que X. On pose $U = X_1 X_2$ et $V = \dfrac{X_1}{X_2}$.

(i) A l'aide des résultats de la question (b), déterminer la loi de U, puis celle de V.

(ii) Montrer que les variables aléatoires $\sqrt[3]{U}$, $\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{UV}$ admettent des espérances et les calculer. Que remarque-t-on ?

(20) **Loi normale et loi du chi-deux** `[OralHEC97]` Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennnes centrées réduites indépendantes.

(a) (i) Déterminer la loi de $\dfrac{X^2}{2}$.

(ii) Déterminer la loi de $\dfrac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$. (On admettra que les variables X^2 et Y^2 sont indépendantes).

(b) Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables gaussiennnes centrées réduites indépendantes. On définit $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ et $V = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

On pose $U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$ et $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(X_1 + X_2 - 2X_3)$.

(i) Déterminer les lois de $\overline{X}$, U_1 et U_2.

(ii) Montrer que $V = \dfrac{1}{2}\left(U_1^2 + U_2^2\right)$.

(iii) On admet que U_1 et U_2 sont indépendantes. Quelle est la loi de V ?

(c) On suppose maintenant que X_1, X_2 et X_3 sont trois variables indépendantes gaussiennnes d'espérance μ et d'écart-type σ. On définit $\overline{X}$ et V comme dans le (b). Quelle est la loi de V ?

(21) **Loi de Laplace et loi de min sur max** `[OralHEC97]` Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1]$. On définit les variables aléatoires $U = \ln X$ et $V = -\ln Y$ où ln désigne le logarithme népérien.

(a) Déterminer les densités des variables U et V.

(b) En déduire que $Z = \ln\left(\dfrac{X}{Y}\right)$ admet une densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

On admet que les variables U et V sont indépendantes.

(c) On pose $S = \max(X, Y)$ et $I = \min(X, Y)$.

(i) Montrer que $\forall x \in \left]0, 1\right]$, $\mathbf{P}\left(\left[\dfrac{I}{S} \leq x\right]\right) = 2\mathbf{P}\left(\left[\dfrac{X}{Y} \leq x\right]\right)$.

(ii) En déduire la loi de $\dfrac{I}{S}$.

CHAPITRE 8

Convergences et approximations

(1) **Approximations** On tire 400 fois à pile ou face avec une pièce de monnaie. Soit X le nombre de "piles".

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, $\sigma(X)$.

(c) Calculer $\mathbf{P}([X > 200])$, $\mathbf{P}([190 < X < 210])$ et $\mathbf{P}([185 < X < 205])$, $\mathbf{P}([X = 201])$.

(2) **Approximations** Si la probabilité de réaction allergique d'un sérum est de 0,001, quelle est la probabilité pour que parmi 2000 personnes exactement 3, et plus de 2 soient sujets de troubles.

(3) **Approximations** L'étude statistique d'une maladie réalisée sur une grande échelle a permis de constater qu'elle atteint mortellement par année environ 400 personnes sur 1 million.

(a) Quelle est la loi suivie par X, nombre de décès par an dus à la maladie, dans un échantillon de taille N. Donner les paramètres de cette loi.

(b) Déterminer pour un seuil de confiance de 95%, le nombre de décès que l'on peut rencontrer par an dans des échantillons de 1000, 10 000 et 100 000 personnes.

(4) **Approximations** Une pharmacie accueille 150 clients par jour. La probabilité pour qu'un client achète une boîte d'aspirine est de 0,02. Quel est le stock minimum pour que la pharmacie puisse satisfaire à la demande avec une probabilité de 98%.

(5) **Convergence en loi** `(ESCP 3.5.02)` Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune.

(a) Pour tout $n > 0$, on pose $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F et n.

(b) Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = \lambda M_n - \ln n$. Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et on suppose que X_1 admet pour fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - (1-x)^a & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = n^{1/a}(M_n - 1)$.

(i) Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(ii) Que retrouve-t-on lorsque $a = 1$?

(6) **Convergence en loi** `(ESCP 3.24.02)` Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U. Soit, d'autre part, Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$.
Montrer que la suite de variables $(nZ_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y.

(a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = e^{-\lambda X}$.

(b) On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites de terme général :

(i) $A_n = n \min\left(e^{-\lambda X_1}, \ldots, e^{-\lambda X_n}\right)$.

(ii) $D_n = \max(X_1, \ldots, X_n) - \ln n$, dans le cas où $\lambda = 1$.

(7) **Convergence en probabilité** `(ESCP 3.32.02)` On dispose de n urnes numérotées de 1 à n et de N boules numérotées de 1 à N où $N = an$, a étant un entier fixé non nul. On place "au hasard" et de manière indépendante chacune des N boules dans une des urnes (chaque boule est donc placée avec la probabilité $\dfrac{1}{n}$ dans l'urne numéro k).
On note :

– Y_n le nombre d'urnes vides
– T_i la variable qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide et 0 sinon
– $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$

(a) Donner la loi de T_i et son espérance.

(b) Calculer $\mathbf{E}(T_iT_j)$ et $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$.

(c) Calculer $\mathbf{E}(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

(d) Calculer $\mathbf{V}(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

(i) Vérifier que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad |S_n(\omega) - e^{-a}| \leq |S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)| + |\mathbf{E}(S_n) - e^{-a}|$$

(ii) En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}^* \mid \quad \forall n \geq n_0, \quad \mathbf{P}\left([|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

(iii) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left([|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

(iv) Interpréter le résultat précédent.

(8) **Convergence en probabilité** `[Laprestél4.3]` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \geq 1$ on pose :

$$Y_n = X_nX_{n+1} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Quelle est la limite en probabilité de S_n, lorsque n tend vers l'infini ?

(9) **Convergence en probabilité** `[Laprestě4.1]` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{P}([X_n = 1]) = 1 - p^n \\ \mathbf{P}([X_n = -1]) = p^n \end{cases} \quad \text{avec } 0 < p < 1$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{S_n} = \frac{1}{n} S_n$.

(a) Calculer $\mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)$.

(b) Montrer que $\left(\overline{S_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$.

(10) **Une autre forme de la loi faible des grands nombres** `[Agreg.th7.9.234]` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un certain espace probabilisé, indépendantes et admettant un moment d'ordre deux.

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(X_j) = m$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{V}(X_j) = 0$. Montrer que :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$$

(11) **Convergence en probabilité d'une suite de variables suivant une loi bêta** `[Laprestě4.2]` Soit n et m deux entiers strictement positifs. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin [0,1] \\ \dfrac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}}{B(n,m)} & \text{si} \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

avec $B(n,m) = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$.

(a) Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X_{n,m}$.

(b) Calculer l'espérance et la variance de $X_{n,m}$.

(c) On suppose que n est fixé et m tendant vers l'infini. Quelle est la limite en probabilité de $(X_{n,m})$?

(12) **Variables presque sûrement égales** `[Laprestě4.4]` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Z$. Montrer que $Y = Z$ p.s.

(13) **Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée** Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

(14) **Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée** `(Oral HEC)` En utilisant le théorème de la limite centrée, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}$$

où $\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$ désigne la partie entière de $\dfrac{n}{3}$.

CHAPITRE 9

Estimations

(1) **Estimation ponctuelle et risque quadratique** Soit X de loi uniforme sur $[0, a]$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n-$ échantillon de variables. Le but de l'exercice est d'effectuer une estimation de a. Soit $\overline{X_n}$ la moyenne empirique.

(a) Soit $T_n = 2\overline{X_n}$. Montrer que T_n est sans biais et déterminer son risque quadratique.

(b) Soit $T'_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de X puis celle de T'_n.
En déduire sa densité puis son biais et son risque quadratique.

(c) Soit $T''_n = \dfrac{n+1}{n} T'_n$ déterminer son biais et son risque quadratique.

(d) Quel est le meilleur estimateur de a pour de grandes valeurs de n ?

(2) **Estimation ponctuelle** `[Oral ESCP 1999]` On considère n variables aléatoires X_1, $X_2, \ldots, X_n$ indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre inconnu λ.

(a) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} S_n$.
Rappeler la loi de S_n.
Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur de λ sans biais et convergent.

(b) On pose $\theta = \mathbf{P}[(X = 0)] = e^{-\lambda}$ (où $\mathbf{P}(A)$ désigne la probabilité de l'événement A) et on cherche un estimateur sans biais du paramètre θ. (Dans le cas où X représente le nombre de pannes que subit un appareil, $\mathbf{P}([X = 0])$ est la probabilité qu'il n'y ait aucune panne et c'est en ce sens qu'il est intéressant de l'estimer).

(i) Calculer l'espérance de $T_n = \exp\left(-\overline{X_n}\right)$ et montrer que T_n n'est pas un estimateur sans biais de θ.

(ii) Soit s un entier quelconque. Montrer que la loi conditionnelle de X_1 sachant $[S_n = s]$ est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Préciser en particulier la valeur de $\mathbf{P}_{[S_n = s]}([X_1 = 0])$.

(iii) On considère la variable aléatoire $\widehat{\theta} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{S_n}$. Montrer que $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ.

(iv) Calculer la variance de $\widehat{\theta}$ et montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} V\left(\widehat{\theta}\right) = 0$.

(3) **Estimation ponctuelle et par intervalle** `[Oral ESCP 1999]` Soit $a \in \left]0, 1\right[$ et X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathbf{P}\right)$, à valeurs dans $[0, 1]$. On suppose que la loi conditionnelle de X conditionnée par $[X \leq a]$ est la loi uniforme sur $[0, a]$ et que sa loi conditionnelle conditionnée par $[X > a]$ est la loi uniforme sur $[a, 1]$. On suppose de plus que $\mathbf{P}([X \leq a]) = \dfrac{1}{2}$.

(a) Déterminer une densité de X, son espérance et sa variance.
On cherche maintenant à estimer le paramètre inconnu a.

(b) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
On pose $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(M_n)$ et la variance $\mathbf{V}(M_n)$ de la variable M_n.
En déduire un estimateur sans biais T_n de a.
La suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

(c) Donner une majoration de $\mathbf{V}(T_n)$ quand $a \in \left]0, 1\right[$.
Pour n et α donnés, préciser, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, les valeurs de ε pour lesquelles $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance au risque α pour a (c'est-à-dire : $\mathbf{P}([T_n - \varepsilon \leq a \leq T_n + \varepsilon]) \geq 1 - \alpha$).

(d) Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\dfrac{T_n - a}{\sqrt{\mathbf{V}(T_n)}}\right)_{n\geq 1}$?
On suppose que n est suffisamment grand pour identifier la loi de $\dfrac{T_n - a}{\sqrt{\mathbf{V}(T_n)}}$ à cette loi limite. En déduire un intervalle de confiance pour a à un risque inférieur à 5%.

(e) Au niveau de risque 5%, comparer les longueurs des deux intervalles de confiance trouvés dans les questions (c) et (d).

(4) **Estimation ponctuelle** `[Oral ESCP 1997]` On veut estimer les paramètres a et b de la loi uniforme sur $[a, b]$ à l'aide d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables indépendantes suivant cette loi.

(a) (i) On pose $S_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de S_n, puis sa densité et son espérance.

(ii) Montrer que la variance de S_n est égale à $\mathbf{V}(S_n) = \dfrac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}$. (On pourra d'abord supposer $a = 0$ et $b = 1$ puis effectuer une transformation affine).

(iii) S_n est-il un estimateur sans biais de b ?

(iv) Quelle est la limite de $\mathbf{E}(S_n)$ quand n tend vers l'infini ?

(v) Comparer $\mathbf{E}(S_n)$ et b. Que risque-t-on en général en estimant b par la réalisation de S_n ?

(b) On pose $I_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Déterminer l'espérance de I_n et sa limite quand n tend vers l'infini. On admettra que $\mathbf{V}(I_n) = \mathbf{V}(S_n)$.

(c) Exprimer a et b en fonction de $\mathbf{E}(I_n)$ et $\mathbf{E}(S_n)$.
En déduire des estimateurs A_n et B_n sans biais de a et b.

(5) **Estimation ponctuelle et par intervalle** `[Oral ESCP 1999]` On note $VP(\lambda, \theta)$ la **loi de Pareto**[1] de paramètres $\lambda > 0$, $\theta > 0$ et 0, c'est-à-dire la loi de densité f définie

[1] Vilfredo Frederico Samaso marquis de Pareto : sociologue italien né à Paris - France le 15 juillet 1848 ; décédé à Céligny - France le 19 août 1923.

par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1} & \text{si} \quad x > \theta \\ 0 & \text{si} \quad x \leq \theta \end{cases}$$

Un phénomène économique suit une loi $VP(\lambda, \theta)$, θ étant un paramètre connu et λ un paramètre que l'on veut estimer. On dispose pour cela d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant cette loi. On pose $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\theta}\right)$ et $\widehat{\lambda} = \dfrac{n}{T}$.

(a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $VP(\lambda, \theta)$ et $Y = \ln\left(\dfrac{X}{\theta}\right)$.

(i) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

(ii) Déterminer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X.

(iii) Montrer que Y suit une loi Γ dont précisera les paramètres.

(b) Quelle est la loi de T ? En donner une densité.

(c) Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\lambda}$.

(d) Déduire de $\widehat{\lambda}$ un estimateur $\widehat{\lambda_1}$ sans biais de λ. L'estimateur $\widehat{\lambda_1}$ est-il convergent ?

(e) On admet que la suite de variables aléatoires $Z_n = \dfrac{\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right)}{\lambda}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, et on rappelle que la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite vérifie $\Phi(1,96) \simeq 0,975$.
En utilisant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ comme approximation de la loi de Z_n, donner, en fonction de n (supposé assez grand) et de la valeur observée λ_0 de $\widehat{\lambda}$, un intervalle de confiance à 95 % de λ.
Application numérique : $n = 100$ et $\lambda_0 = 5$.

(6) **Estimation ponctuelle** `[Oral ESCP 1997]`

(a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Quelle est la loi de $X + Y$?
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre λ. Quelle est la loi de la somme S_n de ces variables ?

(b) On désire estimer le paramètre λ d'une loi de Poisson à l'aide d'un $n-$ échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables indépendantes suivant cette loi. Vérifier que $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de λ. Quelle est sa variance ?

(c) On cherche maintenant à estimer, à l'aide du même échantillon, la probabilité $e^{-q\lambda}$ de n'observer que des 0 au cours de q expériences consécutives. On pose $T_n = \exp\left(-q\dfrac{S_n}{n}\right)$.

(i) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(T_n)$ de T_n.

(ii) T_n est-il un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$? Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}(T_n)$.

(iii) Calculer la variance $\mathbf{V}(T_n)$. T_n est-il un estimateur convergent ?

(d) On admettra que la suite nulle est la seule suite $(a_n)_n$ de réel vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

Soit $g(S_n)$ un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$.

(i) Montrer que pour tout $\lambda > 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k g(k)}{k!} \lambda^k = e^{(n-q)\lambda}$$

En déduire l'expression du seul estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$, fonction de S_n.

(ii) Est-il toujours judicieux de l'utiliser ?

(iii) On suppose q petit devant n. Comparer T_n et l'estimateur trouvé en (d) i.

(7) **Régression orthogonale** Etant donnés n points A_i de coordonnées (x_i, y_i) dans le repère orthonormé (xOy), on pose :

$$\dot{x}_i = x_i - \overline{x} \qquad \dot{y}_i = y_i - \overline{y} \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^{\,2} \qquad s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i^{\,2} \qquad s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i\dot{y}_i$$

On se propose de calculer l'équation de la droite Δ telle que la somme des carrés des distances entre les points observés et la droite Δ soit minimum.

(a) Soit A_i' la projection orthogonale de A_i sur la droite Δ d'équation $y = cx + d$. Montrer que le carré de la distance du point A_i à la droite Δ s'écrit :

$$(A_i A_i')^2 = \frac{(y_i - cx_i - d)^2}{1 + c^2}$$

(b) On pose alors $f(c,d) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - cx_i - d)^2}{1 + c^2}$. Calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial d}(c,d)$. Trouver la valeur d_0 qui annule cette dérivée. Calculer $f(c, d_0)$ et minimiser cette fonction par rapport à c. On supposera $s_{xy} > 0$ et on posera $\alpha = \frac{s_y^2 - s_x^2}{s_{xy}}$. On appellera c_2 la racine positive de l'équation $c^2 s_{xy} - c\left(s_y^2 - s_x^2\right) - s_{xy} = 0$.

(c) Donner l'équation de la droite Δ.