

# Correction de la fiche 1

Le document comporte 16 pages de corrections.

## Exercice 1

(a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ i \neq j}} 1 = \begin{cases} n & \text{si } j \notin \llbracket 1, n \rrbracket \\ n - 1 & \text{si } j \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

(b) Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \leq n$

$$\sum_{k=p}^n a = (n - p + 1) a$$

(c) Pour  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \leq n$

$$\sum_{k=p}^n k = \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}$$

## Exercice 2

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} P(x) - P(x-1) &= x^3 \\ \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 - a(x-1)^4 - b(x-1)^3 - c(x-1)^2 &= x^3 \\ \Leftrightarrow 4ax^3 + (3b-6a)x^2 + (4a-3b+2c)x + b-a-c &= x^3 \end{aligned}$$

Par identification membre à membre, nous obtenons le système

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 3b - 6a = 0 \\ 4a - 3b + 2c = 0 \\ b - a - c = 0 \end{cases}$$

dont la solution est  $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n P(k) - \sum_{k=1}^n P(k-1) \\ &= P(n) - P(0) \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

soit donc

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

## Exercice 3

(a) La **méthode des pôles**<sup>1</sup> nous donne

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Pour obtenir **a** il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité par  $x$ , simplifier puis de poser  $x = 0$ . De même pour obtenir **b** il suffit de multiplier par  $x+1$ , simplifier puis de poser  $x = -1$ .

<sup>1</sup>Expliquée en classe.

(b) La somme  $S(n)$  s'écrit à l'aide du symbole sigma

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

Finalement

$$S(n) = \frac{n}{n+1}$$

Enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = 1$$

car  $S(n)$  se comporte au voisinage de l'infini comme le rapport des termes de plus haut degré.

#### Exercice 4

Il y a deux méthodes pour répondre à cette question. La première : vous profitez du fait que l'on vous donne l'expression refermée pour effectuer une récurrence standard<sup>2</sup>. La deuxième : vous utilisez la méthode des pôles extrêmement pratique mais *hors programme* en écrivant que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle donne  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$  en notant que la somme des coefficients des éléments simple est nulle ce qui est de très bonne augure pour effectuer du télescopage. Maintenant il y a une autre ruse plus fine consistant à écrire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{k+2}{k(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \end{aligned}$$

Par ce que donne la méthode des pôles on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

et par la prite ruse ...

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \text{ somme télescopique} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Que je vous laisse faire.

Quoi qu'il en soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

### Exercice 5

(a) Notons pour  $n \geq p$ ,  $\mathcal{P}_n$  :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

- *Initialisation* :  $\mathcal{P}_p$  est vérifiée car  $\binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$ .
- *Hypothèse de récurrence* : supposons que pour  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}_p$ ,  $\mathcal{P}_n$  soit vérifiée.
- *Transmissibilité* : nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \end{aligned}$$

*Conclusion* :  $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$  et selon le premier principe de récurrence<sup>3</sup>

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est vraie } \forall n \in \mathbb{N}_p}$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n &= 2 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \\ &= 2 \binom{n+1}{3} \text{ par "TPG"} \\ &= 2 \frac{(n-1)n(n+1)}{3!} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}}$$

(c) Si  $n \geq 3$ , de la même manière

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + (n-2)(n-1)n &= 3! \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} \\ &= 3! \binom{n+1}{4} \text{ par "TPG"} \end{aligned}$$

$$\boxed{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + (n-2)(n-1)n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}}$$

### Exercice 6

<sup>3</sup>Ou récurrence standart.

(a) Comme  $x \neq 1$  nous reconnaissons une somme géométrique de raison  $x$ , d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \\ &= \sum_{k=0}^n x^k \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Un calcul simple de **dérivation** donne

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, 1[, f'(x) &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx - (n+1)}{(1-x)^2} x^n$$

(b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous remarquons que

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

et en reprenant le résultat précédent avec  $x = \frac{1}{2}$  il vient

$$S(n) = 2 - \frac{(n+2)}{2^n}$$

Enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = 2$$

car

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)}{2^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) \exp(-n \ln 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par le **théorème des croissances comparées exponentielle-puissance**<sup>4</sup>

### Exercice 7

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , la formule du binôme donne

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \end{aligned}$$

Par intégration entre 0 et 1 membre à membre nous obtenons que

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 x^k dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale})$$

<sup>4</sup> Apprenez par coeur que  $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha e^{-\beta n} = 0$ .

soit

$$\left[ \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$$

donc

$$\boxed{\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}}$$

**Remarque :** le résultat précédent se retrouve en écrivant que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

soit

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \text{ par décalage d'indice} \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \right) \end{aligned}$$

et

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}}$$

### Exercice 8

(a) Par le **binôme de Newton**

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k}$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} f(x) dx &= \int_0^{-1} (1+x)^n dx \\ &= \left[ \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{-1} \\ &= \frac{-1}{n+1} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^{-1} x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} \end{aligned} \tag{2}$$

Selon (1) et (2)

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{-1}{n+1}}$$

**Remarque :** à l'instar de l'exercice 7 nous pourrions aussi écrire que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \text{ par décalage d'indice} \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k}}_{=0 \text{ par "BN"}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{-1}{n+1}}$$

(c)  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

Alors en posant  $x = 1$  nous obtenons

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}}$$

Et en posant  $x = \frac{1}{2}$  nous obtenons

$$\begin{aligned} n \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

soit donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \binom{n}{k} = \frac{n}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

### Exercice 9

(a) Soient  $p = 2k$  un entier pair et  $i = 2k + 1$  un entier impair.

- $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = [k] = \boxed{k}$  car  $k \in \mathbb{N}$ .
- $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left[ k + \frac{1}{2} \right] = \boxed{k}$  car  $\frac{1}{2} \in ]0; 1[$ .

(b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par la formule du binôme

$$\begin{aligned}
 X &= (1+1)^n \\
 &= 2^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\
 \text{et } Y &= (1-1)^n \\
 &= 0 \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\
 \text{donc } X+Y &= 2^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+(-1)^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \underbrace{(1+(-1)^{2k})}_{=2} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \underbrace{(1+(-1)^{2k+1})}_{=0} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \\
 \text{et } X-Y &= 2^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-(-1)^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \underbrace{(1-(-1)^{2k})}_{=0} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \underbrace{(1-(-1)^{2k+1})}_{=2} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}}$$

### Exercice 10

(a) Pour  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^p \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{n!}{k!} \times \frac{1}{(p-k)!(n-p)!} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{(p-k)!k!} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \end{aligned}$$

Finalement selon la formule du binôme de Newton

$$\boxed{\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} 2^p}$$

(b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \text{ par changement décroissant d'indice} \end{aligned}$$

et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

### Exercice 11

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}_2$ . La vérification de l'égalité  $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$  est très simple à effectuer en utilisant la formule du triangle de Pascal généralisée vue dans l'exercice 5. D'où

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{j+1}{2} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{j}{2} \text{ de premier terme nul} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} \binom{j}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{U_n = \binom{n+2}{3}}$$

$$\begin{aligned}
 V_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j j \\
 &= \sum_{j=0}^n j(j+1) \\
 &= 2U_n
 \end{aligned}$$

$$V_n = 2 \binom{n+2}{3}$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j} \text{ par inversion de l'ordre des sommations} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j 1 \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{j}{j}
 \end{aligned}$$

$$u_n = n$$

(c) Pour  $n$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls

$$\begin{aligned}
 S_{n,m} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n 2^{i+j} \\
 &= \sum_{i=0}^m \left( 2^i \sum_{j=1}^n 2^j \right) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^m 2^i \left( \frac{1-2^n}{1-2} \right) \\
 &= 2(2^n - 1) \sum_{i=0}^m 2^i
 \end{aligned}$$

$$S_{n,m} = 2(2^n - 1)(2^{m+1} - 1)$$

$$\begin{aligned}
 T_{n,m} &= \sum_{i=0}^n \sum_{i=j}^n 2^{i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n 2^i \sum_{j=0}^i \left( \frac{1}{2} \right)^j \\
 &= \sum_{i=0}^n 2^i \left( 2 - \frac{1}{2^i} \right) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^n 2^i - \sum_{i=0}^n 1 \\
 &= 2(2^{n+1} - 1) - (n+1)
 \end{aligned}$$

$$T_{n,m} = 2^{n+2} - n - 3$$

(d) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{k}{j} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j-1} k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{j(j-1)}{2j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j-1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} j \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{k}{j} = \frac{n(n-1)}{4}}$$

### Exercice 12

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i \\ &= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=2}^n i(i-1) \\ &= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=1}^n i(i-1) \text{ car le premier terme de la deuxième est nul} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{A_n = \frac{1}{6} n(n+1)(4n-1)}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \min(i, j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} j \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{i^2}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n i^2 - 1
\end{aligned}$$

$$B_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

**Remarque :** nous aurions pu éviter d'effectuer un des deux calculs en constatant que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \max(i, j) + \min(i, j) = i + j$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (i+j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j \\
&= 2n \sum_{i=1}^n i \\
&= n^2(n+1)
\end{aligned}$$

### Exercice 13

(a) Pour  $n$  un entier naturel non nul remarquons que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (i)^{2k} \binom{n}{2k}
\end{aligned}$$

Introduisons pour  $n$  entier naturel non nul  $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (i)^{2k+1} \binom{n}{2k+1}$  alors

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= \sum_{k=0}^n (i)^k \binom{n}{k} \\ &= (1+i)^n \\ \text{et } S_n - T_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-i)^{2k} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-i)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-i)^k \binom{n}{k} \\ &= (1-i)^n \end{aligned}$$

et comme  $(1-i)^n = \overline{(1+i)^n}$  alors  $S_n = \frac{2 \operatorname{Re} [(1+i)^n]}{2} = \operatorname{Re} [(1+i)^n]$  avec  $|1+i| = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$ <sup>5</sup> donc  $|(1+i)^n| = 2^{\frac{n}{2}}$  et  $\operatorname{Arg}(1+i)^n = \frac{n\pi}{4}$ .

Conclusion

$$S_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$$

(b) Soit  $n$  un entier naturel non nul et différent de 1, calculons  $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$ . Pour cela introduisons

$$U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+1} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+2} x^{3k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k} x^{3k} + x \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+1} x^{3k} + x^2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+2} x^{3k} \end{aligned}$$

C'est à ce moment là que l'on pense à introduire les **racines cubiques de l'unité** 1,  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ,  $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$  car l'avantage dans ce cas est que pour ces trois nombres  $x^{3k} = 1$  ce qui nous permettra d'avoir directement accès à  $T$  (et aussi à  $U$  et  $V$  si on nous le demandait).

Pour  $x = 1$  il est clair que

$$T_n + U_n + V_n = 2^n$$

D'autre part pour  $x = j$  cela donne

$$(1+j)^n = T_n + jU_n + j^2V_n$$

Enfin pour pour  $x = j^2 = \bar{j}$  nous obtenons

$$(1+j^2)^n = T_n + j^2U_n + jV_n$$

<sup>5</sup>Argument principal de  $1+i$  appartenant à  $]-\pi; \pi]$ .

Sachant enfin que  $1 + j + j^2 = 0$ , la somme des trois dernières équations nous donne que

$$\begin{aligned}
 T_n &= \frac{1}{3} \left[ 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[ 2^n + (-j^2)^n + (-j)^n \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[ 2^n + (-1)^n (j^{2n} + j^n) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[ 2^n + (-1)^n (\bar{j})^n + j^n \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[ 2^n + (-1)^n (\overline{j^n}) + j^n \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[ 2^n + 2(-1)^n \operatorname{Re} j^n \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[ 2^n + 2(-1)^n \operatorname{Re} e^{\frac{2in\pi}{3}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{3} \left[ 2^n + 2(-1)^n \cos \frac{2n\pi}{3} \right]}$$

**Remarque :** nous aurions pu aussi écrire que

$$\begin{aligned}
 1 + j &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
 &= e^{\frac{i\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 (1+j)^n + (1+j^2)^n &= 2 \operatorname{Re} \left[ e^{\frac{ni\pi}{3}} \right] \\
 &= 2 \cos \frac{n\pi}{3}
 \end{aligned}$$

ce qui nous aurait donné une autre écriture de  $T_n$  à savoir

$$\boxed{T_n = \frac{2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}}{2}}$$

(c) Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $(a, b)$  un couple de réels. Calculons

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$$

L'astuce méga-classique consiste à dire que

$$\begin{aligned}
 A_n &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[ e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikb} \right] \\
 \text{et } B_n &= \operatorname{Re} \left[ e^{ia} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikb} \right]
 \end{aligned}$$

- Commençons par  $B_n$  qui ne pose absolument aucun problème ! Par la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} B_n &= \operatorname{Re} \left[ e^{ia} (1 + e^{ib})^n \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{ia} e^{\frac{inb}{2}} \left( e^{-\frac{ib}{2}} + e^{\frac{ib}{2}} \right)^n \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{i\left(a + \frac{nb}{2}\right)} \left( 2 \cos \frac{b}{2} \right)^n \right] \end{aligned}$$

$$B_n = 2^n \cos \left( a + \frac{nb}{2} \right) \cos^n \frac{b}{2}$$

- Terminons par  $A_n$ .
  - Tout d'abord si  $b = 0 [2\pi]$  alors

$$A_n = \cos a \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \cos a$$

- Si  $b \neq 0 [2\pi]$ ,

$$\begin{aligned} A_n &= \operatorname{Re} \left[ e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ib})^k \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{ia} \left( \frac{1 - e^{inb}}{1 - e^{ib}} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{ia} e^{\frac{inb}{2}} \left( \frac{e^{-\frac{inb}{2}} - e^{\frac{inb}{2}}}{e^{-\frac{ib}{2}} - e^{\frac{ib}{2}}} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{i\left(a + \frac{b}{2}(n-1)\right)} \left( \frac{-2i \sin \frac{nb}{2}}{-2i \sin \frac{b}{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \cos \left( a + \frac{b}{2} (n-1) \right)$$

C'est çà la banlieue !

### Exercice 14

- (a) Pour  $n \in \mathbb{N}_2$ ,

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &= \left( \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \right) \left( \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \text{ par télescopes} \end{aligned}$$

$$\prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{n+1}{2n}$$

(b.i.) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé et  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} V_n &= \prod_{k=1}^n \alpha^k \\ &= (\alpha)^{\sum_{k=1}^n k} \end{aligned}$$

$$\boxed{V_n = \alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

(b.ii) Nous avons

$$\begin{aligned} W_n &= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^2}{k} \\ &= \frac{\alpha^{2n}}{\prod_{k=1}^n k} \end{aligned}$$

$$\boxed{W_n = \frac{\alpha^{2n}}{n!}}$$

(b.iii) Nous avons

$$\begin{aligned} Z_n &= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha}{k^2} \\ &= \frac{\alpha^n}{\left(\prod_{k=1}^n k\right)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_n = \frac{\alpha^n}{(n!)^2}}$$

### Exercice 15

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculons  $P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$ . en posant

$$Q_n = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij \quad R_n = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad \text{et} \quad S_n = \prod_{1 \leq i=j \leq n} ij$$

Nous avons clairement

$$P_n = Q_n \quad \text{et} \quad R_n = \frac{P_n Q_n}{S_n} = \frac{P_n^2}{S_n}$$

avec

$$\begin{aligned} S_n &= \prod_{1 \leq i \leq n} i^2 \\ &= \left(\prod_{1 \leq i \leq n} i\right)^2 \\ &= (n!)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_n &= \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij \\&= \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq n} ij \\&= \prod_{1 \leq i \leq n} \left( i^n \prod_{1 \leq j \leq n} j \right) \\&= (n!)^n \prod_{1 \leq i \leq n} i^n \\&= (n!)^n \left( \prod_{1 \leq i \leq n} i \right)^n \\&= (n!)^n (n!)^n \\&= (n!)^{2n}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}P_n &= \sqrt{S_n R_n} \\&= \sqrt{(n!)^{2n+2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{P_n = (n!)^{n+1}}$$

