Compléments sur la sommation

Le TD comporte 2 pages d'énoncés

Les grands classiques

Exercice 1
(Un équivalent de $\binom{n}{p}$) Montrer que :

1. $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$

2. Pour $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{k} x^n = 0$.

Exercice 2
(Sommes doubles) `[kd2.105]` Soit un entier $n \geq 1$ et pour tous entiers i, j des nombres réels $a_{i,j}$. En appliquant le théorème de Fubini, donner une formule d'inversion des sommes pour les sommes doubles suivantes :

$$S_1(n) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \qquad S_2(n) = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{i=n-j}^{2n-j} a_{i,j} \qquad S_3(n) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{2n-j} a_{i,j}$$

Pour aller plus loin ...

Exercice 3
(Sommations par développements limités) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty, 1/4[$ par la relation :

$$\forall t \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$$

1. Ecrire le développement limité au voisinage de 0 de la fonction f à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$.
2. En remarquant que $(f(t))^2 = (1-4t)^{-1}$, déduire du théorème du produit de deux développements limités une première identité sommatoire.
3. En remarquant maintenant que $f(t)f(-t) = f\left(4t^2\right)$ et en procédant exactement comme au **2.**, déduire une seconde identité combinatoire.

Exercice 4
(Sommation via Leibniz) On considère un entier naturel n et notre propos est de parvenir à refermer la somme :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+i}{n}$$

Pour ce faire, on introduit le polynôme $P_n = t^n (1-t)^n$.

1. Calculer de deux manières différentes la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme P_n.
2. En s'intéressant à $P_n^{(n)}(1)$ conclure.

Exercice 5
(Leibniz et Legendre) Le but de l'exercice est de calculer la somme :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2$$

On considère à cet effet pour tout entier naturel les deux polynômes :

$$U_n = \left(t^2-1\right)^n \quad \text{et} \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$$

1. Calculer $L_n(0)$ pour tout entier naturel n.
2. Appliquer la formule de Leibniz au produit $(t-1)^n(t+1)^n$ pour obtenir une expression de L_n.
3. Parvenir au but fixé au début de l'exercice.