

# Correction de la fiche 2

Le document comporte 5 pages de corrections.

## Exercice 1

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

(a) Prouvons que  $(E \subset F) \iff (\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F))$

- $(\implies)$  Par hypothèse  $E \subset F$ . Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$  donc  $X \subset E$  et par hypothèse  $X \subset F$  donc  $X \in \mathcal{P}(F)$ . Comme ceci est vrai pour tout élément  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$  alors  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$  (i).
- $(\impliedby)$  Par hypothèse  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ . Soit  $X \subset E$  alors  $X \in \mathcal{P}(E)$  et par hypothèse  $X \in \mathcal{P}(F)$ . Comme ceci est vrai pour toute partie  $X$  de  $E$  alors  $E \subset F$  (ii).

Selon (i) et (ii) l'équivalence est démontrée.

(b) Soit  $X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ , alors  $X \in \mathcal{P}(E)$  ou  $X \in \mathcal{P}(F)$ , donc  $X \subset E$  ou  $X \subset F$ , donc  $X \subset E \cup F$ , donc  $X \in \mathcal{P}(E \cup F)$ .

Pour avoir l'égalité il suffirait de voir si  $\mathcal{P}(E \cup F) \subset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ , or prenons le contre-exemple  $E = \{1, 2\}$  et  $F = \{3, 4\}$  alors  $E \cup F = \{1, 2, 3, 4\}$ . Maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &= \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\} \\ \mathcal{P}(F) &= \{\emptyset; \{3\}; \{4\}; \{3, 4\}\} \\ \text{et } \mathcal{P}(E \cup F) &= \left\{ \begin{array}{l} \emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \\ \{3, 4\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{1, 3, 4\}; \{2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

or par exemple  $\{2, 3\} \notin \mathcal{P}(E)$  et  $\{2, 3\} \notin \mathcal{P}(F)$  donc  $\{2, 3\} \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  alors que  $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(E \cup F)$ .

Donc en général  $\mathcal{P}(E \cup F) \not\subset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  et ainsi on ne peut avoir l'égalité.

**Remarque :** si  $E \subset F$  alors  $E \cup F = F$  donc  $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(F)$  (iii) et comme selon la première question  $(E \subset F) \iff (\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F))$  alors dans ce cas  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(F)$  (iv).

**Conclusion :** (iii) (iv) entraînent alors l'égalité.

## Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble, et  $A$  et  $B$  des sous-ensembles de  $E$ . Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $A = B$  est que  $A \cup B = A \cap B$ .

Rappelons que la démonstration d'une condition nécessaire et suffisante entre deux assertions est la démonstration qu'elles sont équivalentes entre elles. Expliquons pourquoi à travers un exemple simple simple. Quand on écrit l'équivalence

$$(x^2 - 2x + 1 = 0) \iff (x = 1)$$

$x^2 - 2x + 1 = 0$  est une CONDITION SUFFISANTE pour obtenir  $x = 1$  mais pas obligatoire, car par exemple l'équation  $\ln x = 0$  nous donnerait aussi la solution  $x = 1$ . En revanche, et c'est la réciproque l'assertion  $x = 1$  est une CONDITION NÉCESSAIRE à la réalisation de l'égalité  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ( $E$ ) car si prenions une autre valeur pour  $x$  ( $E$ ) ne serait pas réalisé. En conclusion dans l'équivalence  $\mathfrak{P} \iff \mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{P}$  est une condition suffisante de  $\mathfrak{Q}$  alors que  $\mathfrak{Q}$  est une condition nécessaire de  $\mathfrak{P}$ .

Tout ceci à une conséquence très importante dans la façon de vous exprimer à l'oral ou à l'écrit. prenons un oral d'HEC où après avoir démontré un encadrement vérifié par une suite convergente  $S_n$  de limite  $S$  :  $0 \leq S - S_n \leq e^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^\pi}$  on devait déterminer une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-3}$  près. Pour cela

IL SUFFISAIT de déterminer  $n$  tel que  $e^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^\pi} \leq 10^{-3}$  car la transitivité de la relation d'ordre  $\leq$  entraînait que  $0 \leq S - S_n \leq 10^{-3}$ , ce qui se traduit par l'implication

$$\underbrace{\left( e^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^\pi} \leq 10^{-3} \right)}_{\text{Condition suffisante}} \implies (0 \leq S - S_n \leq 10^{-3})$$

Revenons à notre exercice où l'équivalence à montrer est

$$(A = B) \iff (A \cup B = A \cap B)$$

- ( $\implies$ ) Supposons que  $A = B$ . Alors  $A \cup B = A = A \cap B$  et le tour est joué !
- ( $\impliedby$ ) Supposons que  $A \cup B = A \cap B$ . Soit  $x \in A$  alors  $x \in A \cup B$  et par hypothèse  $x \in A \cap B$  donc  $x \in B$  par définition de l'intersection. Comme ceci est vrai pour tout élément  $x$  de  $A$  alors  $A \subset B$ . L'autre inclusion  $B \subset A$  étant immédiate puisque les ensembles  $A$  et  $B$  jouent un rôle symétrique, la double-inclusion donne que  $A = B$  et la réciproque (condition nécessaire) est vérifiée.

**Exercice 3**

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  et  $C$  trois sous-ensembles de  $E$ . Montrons l'implication

$$(A \cup B = A \cap C \text{ (i)}, B \cup C = B \cap A \text{ (ii)} \text{ et } C \cup A = C \cap B \text{ (iii)}) \implies (A = B = C)$$

Nous avons pour cela quatre inclusions à démontrer :  $A \subset B$  et  $B \subset A$  d'une part et  $B \subset C$  et  $C \subset B$  d'autre part.

- Soit  $x \in A$  alors  $x \in A \cup B$  donc  $x \in C$  selon (i) et  $x \in B \cup C$  donc  $x \in B$  selon (ii). Comme ceci est vrai pour tout élément  $x$  de  $A$  alors  $A \subset B$ .
- Soit  $x \in B$  alors  $x \in A \cup B$  donc  $x \in C$  selon (i) et  $x \in B \cup C$  donc  $x \in A$  selon (ii). Comme ceci est vrai pour tout élément  $x$  de  $B$  alors  $B \subset A$ .
- Soit  $x \in B$  alors  $x \in B \cup C$  donc  $x \in A$  selon (ii) et  $x \in A \cup C$  donc  $x \in C$  selon (iii). Comme ceci est vrai pour tout élément  $x$  de  $B$  alors  $B \subset C$ .
- Soit  $x \in C$  alors  $x \in C \cup A$  donc  $x \in B$  selon (iii). Comme ceci est vrai pour tout élément  $x$  de  $C$  alors  $C \subset B$ .

**Remarque :** voici une deuxième méthode plus rapide :

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = (B \cup C) \cap C = C \\ A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap (C \cup A) = A \\ A \cap B \cap C = B \cap (A \cap C) = B \cap (A \cup B) = B \end{array} \right\} \implies (A = B = C)$$

**Exercice 4**

Montrons que

$$\exists X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup X = B \cup X \text{ et } A \cap X = B \cap X) \implies (A = B)$$

- Soit  $x \in A$  alors  $x \in A \cup X$  alors  $x \in B \cup X$ . Deux cas se présentent alors :
  - Si  $x \in B$  alors l'inclusion  $A \subset B$  est directement obtenue.
  - Si  $x \in X$  alors  $x \in A \cap X$  donc  $x \in B \cap X$  donc  $x \in B$  et l'inclusion  $A \subset B$  est à nouveau obtenue.
 Dans tous les cas nous avons montré que  $A \subset B$ .
- Soit  $x \in B$  alors  $x \in B \cup X$  alors  $x \in A \cup X$ . Deux cas se présentent alors :
  - Si  $x \in A$  alors l'inclusion  $B \subset A$  est directement obtenue.
  - Si  $x \in X$  alors  $x \in B \cap X$  donc  $x \in A \cap X$  donc  $x \in A$  et l'inclusion  $B \subset A$  est à nouveau obtenue.
 Dans tous les cas nous avons montré que  $B \subset A$ .

**Exercice 5**

Soit  $E$  un ensemble, et  $A, B$  et  $C$  des sous-ensembles de  $E$ .

(a) Pour montrer que  $(A \setminus B = A) \iff (B \setminus A = B)$  raisonnons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} (A \setminus B = A) &\iff (A \cap \overline{B} = A) \\ &\iff (A \cap B = \emptyset) \\ &\iff (A \subset \overline{B}) \\ &\iff (B \subset \overline{A}) \text{ par passage au complémentaire} \\ &\iff (B \cap \overline{A} = B) \end{aligned}$$

(b) Prouvons que  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .

$$\begin{aligned} (A \cap B) \setminus C &= (A \cap B) \cap \bar{C} \\ &= A \cap \bar{C} \cap B \cap \bar{C} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) \\ &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \end{aligned}$$

(c) Prouvons que  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ .

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus C &= (A \cup B) \cap \bar{C} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) \\ &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

(d) Prouvons que  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ .

• Nous avons :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C &= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \\ &= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A \setminus (B \cup C) \end{aligned} \tag{1}$$

• et

$$\begin{aligned} (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) \\ &= ((A \cap \bar{C}) \cap \bar{B}) \cup \underbrace{(A \cap C \cap \bar{C})}_{=\emptyset} \\ &= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \\ &= A \setminus (B \cup C) \end{aligned} \tag{2}$$

Selon (1) et (2) les égalités sont montrées.

### Exercice 6

Soient  $E$  un ensemble et  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $E$ .

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned} (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) &= \underbrace{(X \cup (X \cap Y))}_{=X} \cap (\bar{Y} \cup (X \cap Y)) \\ &= X \cap (\bar{Y} \cup X) \cap \underbrace{(\bar{Y} \cup Y)}_{=E} \\ &= \boxed{X} \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) &= X \cap (Y \cup \bar{Y}) \\ &= X \cap E \\ &= \boxed{X} \end{aligned}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) &= (X \cap (X \cup Y)) \cup (\bar{Y} \cap (X \cup Y)) \\ &= X \cup (X \cap \bar{Y}) \\ &= \boxed{X} \end{aligned}$$

(c) Nous avons :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{(X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y})}_{=X} \cup \underbrace{(\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})}_{=\bar{X} \text{ selon 1. appliqué à } \bar{X}} \\ &= \boxed{E} \end{aligned}$$

(d) Nous avons :

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{(X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y})}_{=X} \cap \underbrace{(\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})}_{=\bar{X} \text{ selon 2. appliqué à } \bar{X}} \\ &= \boxed{\emptyset} \end{aligned}$$

### Exercice 7

Soient  $E$  un ensemble. Pour tous les sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $E$ , on pose  $A | B = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  par Morgan.

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A} \cap \bar{A} \\ &= \boxed{A | A} \end{aligned}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned} (A | A) | (B | B) &= \overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{B \cup A}} \\ &= \boxed{A \cap B} \end{aligned}$$

(c) Nous avons :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \\ &= \overline{A | B} \\ &= \boxed{(A | B) | (A | B)} \\ A \setminus B &= A \cap \bar{B} \\ &= (A | A) | (\bar{B} | \bar{B}) \\ &= \boxed{(A | A) | ((B | B) | (B | B))} \\ A \Delta B &= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= ((A \cap \bar{B}) | (\bar{A} \cap B)) | ((A \cap \bar{B}) | (\bar{A} \cap B)) \\ &= \boxed{\begin{aligned} &[(A | A) | ((B | B) | (B | B))] | [(B | B) | ((A | A) | (A | A))] | \\ &[(A | A) | ((B | B) | (B | B))] | [(B | B) | ((A | A) | (A | A))] \end{aligned}}$$

### Exercice 8

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  et  $C$  trois parties de  $E$ .

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{A \setminus B} &= \mathbb{I}_{A \cap \bar{B}} \\ &= \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_{\bar{B}} \\ &= \boxed{\mathbb{I}_A (1 - \mathbb{I}_B)} \end{aligned}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{A \Delta B} &= \mathbb{I}_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} \\ &= \mathbb{I}_{A \cup B} (1 - \mathbb{I}_{A \cap B}) \\ &= (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) (1 - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) \\ &= \boxed{\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B} \end{aligned}$$

(c) (i) On rappelle que deux ensembles sont égaux si et seulement si leur fonctions indicatrices sont égales. Calculons  $\mathbb{I}_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} &= \mathbb{I}_{A \cup B} (1 - \mathbb{I}_{A \cap B}) \\ &= (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) (1 - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) \\ &= \mathbb{I}_A - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + (\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B)^2 \\ &= \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B. \end{aligned}$$

Selon le (b) l'égalité est  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  prouvée.

(ii) Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{A \Delta (B \Delta C)} &= \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_{B \Delta C} - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_{B \Delta C} \\ &= \mathbb{I}_A + (\mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C) - 2\mathbb{I}_A (\mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C) \\ &= \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_C + 4\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathbb{I}_{(A \Delta B) \Delta C} &= \mathbb{I}_{A \Delta B} + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_{A \Delta B} \mathbb{I}_C \\ &= (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) + \mathbb{I}_C - 2(\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) \mathbb{I}_C \\ &= \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_C + 4\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \end{aligned} \tag{4}$$

Selon (3) et (4) :

$$\boxed{A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C}$$

(iii) Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{A \cap (B \Delta C)} &= \mathbb{I}_A \mathbb{I}_{B \Delta C} \\ &= \mathbb{I}_A (\mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C) \\ &= \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathbb{I}_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)} &= \mathbb{I}_{A \cap B} + \mathbb{I}_{A \cap C} - 2\mathbb{I}_{A \cap B} \mathbb{I}_{A \cap C} \\ &= \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \end{aligned} \tag{6}$$

Selon (5) et (6)

$$\boxed{A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)}$$

(d) Nous avons :

$$\begin{aligned} A \Delta A &= (A \cup A) - (A \cap A) \\ &= A - A \\ &= A \cap \bar{A} \\ &= \boxed{\emptyset} \\ \text{et } A \Delta \emptyset &= (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) \\ &= A - \emptyset \\ &= A \cap \bar{\emptyset} \\ &= A \cap E \\ &= \boxed{A} \end{aligned}$$

(e) Nous avons :

$$\begin{aligned} A \Delta B &= B \\ \iff \mathbb{I}_{A \Delta B} &= \mathbb{I}_B \\ \iff \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B &= \mathbb{I}_B \\ \iff \mathbb{I}_A - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B &= 0 \\ \iff \mathbb{I}_A (1 - 2\mathbb{I}_B) &= 0 \\ \iff \mathbb{I}_A &= 0 \\ \iff \boxed{(A = \emptyset)} \end{aligned}$$

