Compléments sur le dénombrement

Le TD comporte 2 pages d'énoncés

Le problème des surjections

(Le problème des surjections – type ESSEC)  Soit n un entier naturel strictement positif, dans tout le problème, on notera E_n l'ensemble des entiers naturels strictement positifs et inférieurs ou égaux à n. On désigne par $S_{n,p}$ le nombre d'applications surjectives de E_n sur E_p.

Partie I

1. Calculer $S_{n,p}$ pour $p > n$. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, $S_{n,2}$.
2. Calculer $S_{p+1,p}$. Pour cela on utilisera, en justifiant son existence, l'élément r de E_p ayant deux antécédents.

Partie II

1. Démontrer que
$$\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad \sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$$
2. Etablir
$$p^n = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} S_{n,q}$$
3. En déduire la formule
$$S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$$
4. En déduire que, si $p \geq 2$,
$$S_{n,p} = p\left(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}\right)$$
Retrouver alors $S_{p+1,p}$ puis montrer
$$S_{p+2,p} = \frac{p\,(3p+1)}{24}\,(p+2)!$$

Partie III

Soit $A_{n,p}$ le nombre de partitions de E_n en p parties non vides.

1. Quelle est la relation entre $A_{n,p}$ et $S_{n,p}$?
2. En déduire une relation donnant $A_{n,p}$ en fonction de $A_{n-1,p}$ et $A_{n-1,p-1}$.
3. Calculer $A_{n,1}$ et $A_{n,n}$.

Partie IV

On appelle "dérangement" de E_n une bijection f de E_n dans E_n telle que $f(x) \neq x$ pour tout x de E_n. Soit D_n le nombre de dérangements de E_n. On posera $D_0 = 1$.

1. Etablir
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$
2. En s'inspirant de la partie II, en déduire
$$D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$$