Correction fiche 3 bis

La correction comporte 5 pages.

Partie I

1. • Lorsque $p > n$, il n'existe pas d'applications surjectives de E_n vers E_p et

$$\boxed{S_{n,p} = 0}$$

• L'ensemble des applications surjectives de E_n vers lui-même est aussi celui des **permutations** de E_n et

$$\boxed{S_{n,n} = n!}$$

• L'application constante égale à 1 est la seule application surjective de E_n vers E_1 et

$$\boxed{S_{n,1} = 1}$$

• Il y a 2^n applications quelconques de E_n vers E_2 dont deux seulement ne sont pas surjectives. Celles telles qu'un seul des deux éléments de E_2 posséde au moins un antécédent.

$$\boxed{S_{n,2} = 2^n - 2}$$

2. Une application surjective de E_{p+1} vers E_p ne **peut être injective**. Il existe donc un élément x de E_p admettant **plusieurs** antécédents. Si x admet strictement plus de 2 antécédents, prenons $k \geq 3$ pour fixer les idées, il reste dans l'ensemble E_{p+1} $p+1-k$ éléments distincts (avec $p+1-k < p$) qui ont forcément une image, ce qui fait qu'en comptant l'élément x, le nombre total d'images est égal à $p+2-k$ strictement plus petit que p, en contradiction avec l'hypothèse de surjectivité de l'application considérée. Il existe donc un seul élément x de E_p admettant plusieurs antécédents, en fait 2 exactement.
Une application **surjective** f de E_{p+1} dans E_p est donc caractérisée par un triplet (A, x, g) où A est une paire d'éléments de E_{p+1} (qu'il faut choisir), x un élément de E_p (qu'il faut choisir) et g une **bijection** de $E_{p+1} - A$ vers $E_p - \{x\}$ (qu'il faut construire). On en déduit par le lemme des bergers que

$$\boxed{S_{p+1,p} = \binom{p+1}{2} p\,(p-1)! = \frac{p\,(p+1)!}{2}}$$

Partie II

1. Transformons classiquement le produit de coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \{0, \dots, p-1\}\,, \quad \forall q \in \{k, \dots, p\} \quad \binom{p}{q}\binom{q}{k} &= \frac{p!}{q!\,(p-q)!}\frac{q!}{k!\,(q-k)!} \\
&= \frac{p!}{(p-q)!}\frac{1}{k!\,(q-k)!} \\
&= \frac{p!}{k!\,(p-k)!}\frac{(p-k)!}{(p-q)!\,(q-k)!} \\
&= \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}
\end{aligned}$$

Puis par sommation sur q allant de k à p nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} &= \sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k} \\
&= \binom{p}{k}\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p-k}{q-k} \\
&= \binom{p}{k}(-1)^k\sum_{i=0}^{p-k}(-1)^i\binom{p-k}{i} \\
&= \binom{p}{k}(-1)^k\,0^{p-k} \quad \text{par la formule du binôme de Newton} \qquad (1)
\end{aligned}$$

D'où selon la question précédente, puisque $k < p$:

$$\boxed{\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k}=0}$$

2. Cette identité sommatoire, doit absolument vous faire penser à introduire une **partition** particulière de l'ensemble $\mathcal{A}(E_n, E_p)$ des applications de E_n vers E_p. Cette partition $(\mathcal{A}_q(E_n, f(E_n)))_{q\in[\![0,p]\!]}$ est constituée de l'ensemble des **applications surjectives** de E_n vers $f(E_n)$ telles que $|f(E_n)| = q$ où $q \in [\![0,p]\!]$. Comme $\mathcal{A}(E_n, E_p) = \biguplus_{q=0}^{p}\mathcal{A}_q(E_n, f(E_n))$, il vient que $|\mathcal{A}(E_n, E_p)| = \sum_{q=0}^{p}|\mathcal{A}_q(E_n, f(E_n))|$ avec $\forall q \in [\![0,p]\!]$, $|\mathcal{A}_q(E_n, f(E_n))| = \binom{p}{q}S_{n,q}$ par le **lemme des bergers** puisqu'il y a $\binom{p}{q}$ parties de E_p de cardinal q pouvant représenter $f(E_n)$ et $S_{n,q}$ **surjections** de E_n vers $f(E_n)$ (fixée et de cardinal q). Alors finalement

$$\boxed{p^n=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}S_{n,q}}$$

3. Selon le résultat de la **question 2**

$$\begin{aligned}
(-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n &= (-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}S_{n,q} \\
&= (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\sum_{q=0}^{k}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}S_{n,q} \\
&= (-1)^p\sum_{q=0}^{p}S_{n,q}\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} \\
&\quad \text{par inversion de l'ordre de sommation}
\end{aligned}$$

Or selon (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} &= \binom{p}{q}(-1)^q\,0^{p-q} \\
&= \begin{cases}(-1)^p & \text{si} \quad p=q \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \qquad (2)
\end{aligned}$$

D'où

$$(-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n=(-1)^{2p}S_{n,p}$$

et finalement

$$\boxed{S_{n,p}=(-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n}$$

4. De la question précédente nous déduisons que si $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&p\left((-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \tbinom{p}{k} k^{n-1} + (-1)^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \tbinom{p-1}{k} k^{n-1}\right) \\
&\qquad = p\,(-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}\right) k^{n-1} \\
&\qquad = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, p \binom{p-1}{k-1} k^{n-1} \text{ selon "TP"} \\
&\qquad = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, k \binom{p}{k} k^{n-1} \\
&\qquad = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^{n}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall p \geq 2, \quad S_{n,p} = p\left(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}\right)}$$

Pour $n = p + 1$,

$$\begin{aligned}
S_{p+1,p} &= p\left(S_{p,p} + S_{p,p-1}\right) \\
&= p\left(p! + S_{p,p-1}\right) \\
&= pp! + pS_{p,p-1}
\end{aligned}$$

Par itérations successives, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
S_{p+1,p} &= pp! + (p-1)\,p! + \cdots + 2p! + p\,(p-1)\cdots 2\underbrace{S_{2,1}}_{=1} \\
&= p! \sum_{k=2}^{p} k + p! \\
&= p!\left(\frac{(p+2)(p-1)}{2} + 1\right)
\end{aligned}$$

et nous retrouvons bien que

$$\boxed{S_{p+1,p} = \frac{p}{2}\,(p+1)!}$$

Pour $n = p+2$ il sera plus confortable de raisonner par récurrence (les itérations étant trop "galères") en supposant que

$$S_{p+2,p} = \frac{p\,(3p+1)}{24}\,(p+2)!$$

(où p est fixé dans $\mathbb{N}_2$) et profitant de la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
S_{p+3,p+1} &= (p+1)\left(S_{p+2,p+1} + S_{p+2,p}\right) \\
&= (p+1)\left(\frac{(p+1)}{2}\,(p+2)! + \frac{p\,(3p+1)}{24}\,(p+2)!\right) \\
&= (p+1)\,(p+2)!\left(\frac{p+1}{2} + \frac{p\,(3p+1)}{24}\right) \\
&= \frac{(p+1)\,(p+2)!}{24}\,(p+3)\,(3p+4)
\end{aligned}$$

Ainsi par hérédité pour tout entier $p \geq 2$

$$\boxed{S_{p+2,p} = \frac{p\,(3p+1)}{24}\,(p+2)!}$$

5. A l'image de la formule du triangle de Pascal, la relation $\forall p \geq 2$, $S_{n,p} = p\left(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}\right)$ permet de construire le tableau suivant pour les premières valeurs de n et de p

$n \downarrow \underset{\rightarrow}{p}$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0	0
5	1	30	150	240	120	0	0
6	1	62	540	1560	1800	720	0
7	1	126	1806	8400	16800	15120	540

Partie III

1. **A chaque** surjection f de E_n dans E_p on peut associer **une** partition $\left(E_n^{(k)}\right)_{k\in[\![1,p]\!]}$ de E_n en p parties non vides où $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $E_n^{(k)} = f^{-1}\left(\{y_k\}\right)$ (en notant $E_p = \{y_1, \ldots, y_p\}$). D'autre part toute application de $\left\{f^{-1}\left(\{y_1\}\right), \ldots, f^{-1}\left(\{y_p\}\right)\right\}$ vers E_p est une **bijection** (pour que f soit surjective), il en existe $p!$ Comme il y a $A_{n,p}$ partitions possibles de E_n en p parties non vides, il vient par le lemme des bergers
$$\boxed{S_{n,p} = p!A_{n,p}} \tag{3}$$

2. De la relation $\forall p \geq 2$, $S_{n,p} = p\left(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}\right)$ et du résultat précédent on en déduit immédiatement que
$$\boxed{A_{n,p} = A_{n-1,p-1} + pA_{n-1,p}}$$

3. D'après la **première question de la partie 1** et la relation (3)
$$\boxed{A_{n,1} = A_{n,n} = 1}$$

Partie IV

1. On peut classer les bijections de E_n dans lui-même selon le nombre $n-k$ de leurs points fixes. Il y a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ choix de $n-k$ points fixes et D_k bijections ayant exactement $n-k$ points fixes. Lorsque l'entier k parcourt l'ensemble $[\![0,n]\!]$ on retrouve le cardinal de l'ensemble de toutes les permutations de E_n. On en déduit que
$$\boxed{n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k}$$

2. Comme dans la **question 3 de la partie II**
$$\begin{aligned}
(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k! &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} D_q \\
&= (-1)^n \sum_{q=0}^{n} \left(D_q \sum_{k=q}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{q} \right) \\
&= (-1)^n \sum_{q=0}^{n} \left(D_q \binom{n}{q} (-1)^q \, 0^{n-q} \right) \text{ selon } (2) \\
&= (-1)^{2n} D_n \text{ car } 0^{n-q} = 1 \text{ quand } q = n
\end{aligned}$$

D'où
$$\boxed{D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!}$$

NB : Ce résultat bien connu peut s'obtenir aussi par la **formule du crible**.