

Séries numériques

Le TD comporte 2 pages d'énoncés

1 Etude de convergence

1.1 Nature de séries

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{n+2}{n^3+1}$

2. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

3. $u_n = \frac{(-1)^{n^2-n}}{n^3}$

4. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

5. $u_n = \frac{2}{1+2+3+\dots+n}$

6. $u_n = \frac{(xy)^n}{x^n + y^n}$ avec $x > 0$ et $y > 0$

7. $u_n = (\ln n)^{-\ln n}$

2 Sommation

2.1 Sommation

Montrer la convergence et calculer la somme des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$. *Indication : on déterminera des nombres a, b, c tels que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+3}$$

2. $u_n = \ln \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$

3. $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}$

4. $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

5. $u_n = \frac{x^n}{(2n)!}$ et $v_n = \frac{x^n}{(2n+1)!}$ où $x > 0$.

2.2 La série harmonique alternée

1. Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Montrer que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

2. Montrer que :

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

3. En déduire la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

