

Correction de la fiche 4 bis

Le document comporte 6 pages de corrections.

Exercice 1

- Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que **série de Riemann** de paramètre $2 > 1$, le critère de comparaison par équivalence appliqué aux SATP permet de dire que $\sum_{n \geq 1} u_n$, de même nature, converge aussi.
- Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ (car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$) et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que **série de Riemann** de paramètre $2 > 1$, le critère de comparaison par équivalence appliqué aux SATP permet de dire que $\sum_{n \geq 1} u_n$, de même nature, converge aussi.
- Tout d'abord signalons que $\sum u_n$ n'est pas une série alternée du fait que $n^2 - n = n(n-1)$ et que le produit d'un nombre pair par un nombre impair redonne toujours un nombre pair. Ainsi $\forall n \in \mathbf{N}^*$, u_n peut s'écrire $u_n = \frac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une **série de Riemann** de paramètre $3 > 1$ donc convergente.
- Tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \exp\left(-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

avec $-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -n$. Ainsi en revenant à la caractérisation de l'équivalence $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{-n} = 1$ ce qui équivaut à dire, en revenant à la définition de la limite avec les quantificateurs, que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq N : \left| \frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

soit encore que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}^* \mid \forall n \geq N, \quad -\varepsilon + 1 < \frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} < \varepsilon + 1$$

et en multipliant membre à membre par $n > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}^* \mid \forall n \geq N, \quad -\varepsilon n + n < n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \varepsilon n + n$$

ce qui entraîne que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}^* \mid \forall n \geq N, \quad -n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < (\varepsilon - 1)n$$

et en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbf{N}^* \mid \forall n \geq N, \quad -n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{2}n \\ \implies & \exists N \in \mathbf{N}^* \mid \forall n \geq N, \quad \exp\left[-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] < \exp\left(-\frac{1}{2}n\right) \end{aligned}$$

Enfin comme $\sum_{n \geq 1} \exp\left(-\frac{1}{2}n\right)$ est une série convergente en tant que **série géométrique** de raison $e^{-1/2}$ telle $|e^{-1/2}| < 1$ le critère de comparaison par majoration appliqué aux SATP, permet de conclure quant à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

5. L'astuce est hyper classique consistant à écrire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2}{\sum_{k=1}^n k} \\ &= \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \frac{4}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Or comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que **série de Riemann** de paramètre $2 > 1$, le critère de comparaison par équivalence appliqué aux SATP permet de dire que $\sum_{n \geq 1} u_n$, de même nature, converge aussi.

6. Il y a des cas de discussion à générer, à savoir que :

- si $x = y$: $u_n = \frac{(xy)^n}{x^n + y^n} = \frac{x^{2n}}{2x^n} = \frac{x^n}{2}$ terme général d'une **série géométrique** convergente si et seulement si :

$$\boxed{|x| < 1}$$

- si $x > y$: alors $y^n = o_{+\infty}(x^n)$ et $x^n + y^n \underset{+\infty}{\sim} x^n$ et $\frac{(xy)^n}{x^n + y^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(xy)^n}{x^n} \underset{+\infty}{\sim} y^n$ qui est le terme général d'une **série géométrique** convergente si et seulement si $|y| < 1$ alors en utilisant le critère de comparaison par équivalence appliqué aux SATP, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si :

$$\boxed{|y| < 1}$$

- si $y > x$: alors $x^n = o_{+\infty}(y^n)$ et $x^n + y^n \underset{+\infty}{\sim} y^n$ et $\frac{(xy)^n}{x^n + y^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(xy)^n}{y^n} \underset{+\infty}{\sim} x^n$ qui est le terme général d'une **série géométrique** convergente si et seulement si $|x| < 1$ alors en utilisant le critère de comparaison par équivalence appliqué aux SATP, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si :

$$\boxed{|x| < 1}$$

7. Tout d'abord $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} (\ln n)^{-\ln n} &= \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \\ &= \frac{1}{\exp(\ln n \times \ln(\ln n))} \\ &= \frac{1}{(\exp \ln n)^{\ln(\ln n)}} \\ &= \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand, par exemple $n \geq e^{e^2}$ alors $\ln(\ln n) \geq \ln(\ln e^{e^2}) = 2$ par croissance de \ln , donc $n^{\ln(\ln n)} \geq n^2$ (par croissance de la fonction puissance deux) pour alors pour $n \geq e^{e^2}$: $(\ln n)^{-\ln n} \leq \frac{1}{n^2}$ et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que **série de Riemann** de paramètre $2 > 1$, le critère de comparaison par majoration appliqué aux SATP permet de dire que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge aussi}}$$

Exercice 2

1. D'après la **méthode des pôles** :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{3n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+3)}$$

alors par sommation :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(k+3)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{6} \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{6n+12} - \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{6n+18} + \frac{7}{36} \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{7}{36}$ et :

La série converge de somme $\frac{7}{36}$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) + \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k+3)) \\ &= \ln(n+1) + \ln 3 - \ln(n+3) \\ &= \ln \left(\frac{n+1}{n+3} \right) + \ln 3 \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \ln 3$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+1}{n+3} \right) = 0$ et :

La série converge de somme $\ln 3$

3. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k + 1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1) + 2k + 1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{k!} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ pour } n \geq 2 \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ pour } n \geq 2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

par passage à la limite quand n tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = 4e$.

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge de somme égale à $4e$

4. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1) + k}{2^k} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2^k} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \text{ pour } n \geq 2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons à ce niveau deux sommes partielles de séries convergentes en tant que série dérivée seconde (resp. dérivée première) de la série géométrique de raison $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$. Par passage à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 6$$

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge de somme égale à 6

5. *Cet exercice difficile nécessiterait normalement quelques questions préliminaires pour vous aider.*
Introduisons :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x > 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(2k)!}$$

Cette somme s'écrit aussi $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!}$ et nous retrouvons une "somme orpheline". Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!}}_{S_n} + \sum_{k=0}^n \frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(\sqrt{x})^k}{k!} \\ \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!}}_{S_n} + \sum_{k=0}^n \frac{(-\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\sqrt{x})^k}{k!} \end{array} \right.$$

et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(\sqrt{x})^k}{k!} + \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\sqrt{x})^k}{k!} \right)$$

puis par passage à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

Comme la limite existe et est finie, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et de somme :

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

Pour l'autre série $\sum v_n$ c'est exactement le même principe.

Introduisons :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x > 0, \quad T_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(2k+1)!}$$

Cette somme s'écrit aussi $T_n = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^n \frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et nous retrouvons une "somme orpheline". Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^n \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^n \frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{T_n} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(\sqrt{x})^k}{k!} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^n \frac{(-\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^n \frac{(-\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{-T_n} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\sqrt{x})^k}{k!} \end{array} \right.$$

et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x > 0, \quad T_n = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(\sqrt{x})^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\sqrt{x})^k}{k!} \right)$$

puis par passage à la limite quand n tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. Comme la limite existe et est finie, $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge et de somme :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$$

Exercice 3

1. Notons que :

$$\forall x \in \mathbf{R} - \{-1\}, \quad 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1}$$

est une **somme géométrique** de raison $-x \neq 1$. Alors :

$$\forall x \in \mathbf{R} - \{-1\}, \quad \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1 + x} = \frac{1}{1 + x} - \frac{(-x)^n}{1 + x}$$

et l'égalité :

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1 + x}$$

est vérifiée.

2. Par intégration de toutes les fonctions en jeu sur $[0, 1]$ qui y sont continues, nous obtenons :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x} = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^n}{1 + x} dx$$

soit :

$$[\ln(1 + x)]_0^1 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x} dx$$

ou bien :

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left[\frac{x^k}{k} \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x} dx$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x} dx = \ln 2}$$

3. Commençons par dire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq \left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx \leq \frac{1}{n + 1}$$

et par passage à la limite quand n tend vers l'infini le théorème d'encadrement nous permet de dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \ln 2$$

soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$$

Conclusion la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k}$ converge et de somme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2}$$

