Correction fiche 4

La correction comporte 20 pages.

1 Langage ensembliste-langage probabiliste

$$\boxed{\begin{array}{ll}
(a) & A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\\
(b) & A\cap\overline{B}\cap C\\
(c) & A\cap B\cap C\\
(d) & A\cup B\cup C\\
(e) & (A\cap B)\bigcup(B\cap C)\bigcup(A\cap C)\\
(f) & \left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\bigcup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\bigcup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\bigcup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\\
(g) & \overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\\
(h) & \left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\bigcup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\bigcup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\\
(i) & \overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}
\end{array}}$$

2 Recherche de tribus engendrées

Soit $\Omega=\{0,1,2,3,4,5\}$.

a Déterminons la tribu engendrée par $\left\{\underbrace{\{0,1\}}_{A},\underbrace{\{3,4\}}_{B}\right\}$.

Il existe trois *atomes non vides* qui sont :

$$\underbrace{A\cap\overline{B}}_{C_1}=\{0,1\}\quad\underbrace{\overline{A}\cap B}_{C_2}=\{3,4\}\quad\underbrace{\overline{A}\cap\overline{B}}_{C_3}=\{2,5\}$$

Nous devons maintenant examiner *toutes les unions disjointes des atomes* un à un, deux à deux et trois à trois, ce qui donne :

$$\boxed{\sigma\left\{\{0,1\},\{3,4\}\right\}=\{\varnothing;\{0,1\};\{3,4\};\{2,5\};\{0,1,3,4\};\{0,1,2,5\};\{2,5,3,4\};\Omega\}}$$

b Déterminons la tribu engendrée par $\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.
Comme $\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ constitue une *partition* de Ω alors :

$$\boxed{\sigma\left\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\right\}=\mathcal{P}(\Omega)}$$

c Déterminons la tribu engendrée par $\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$.
Il existe cinq *atomes non vides* qui sont :

$$\underbrace{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}_{C_1}=\{1,2\}\quad\underbrace{A\cap B\cap\overline{C}}=\{3\}\quad\underbrace{\overline{A}\cap B\cap C}_{C_3}=\{4\}\quad\underbrace{\overline{A}\cap\overline{B}\cap C}_{C_4}=\{5\}\quad\underbrace{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}}_{C_5}=\{0\}$$

Nous devons maintenant examiner *toutes les unions disjointes des atomes* un à un, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre et cinq à cinq (ouf !) ce qui donne en notant $\{a,b,c\}=abc$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma\left\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\right\}=\{\varnothing;12;3;4;5;0;123;124;125;120;34;35;30;45;40;50;1234;1235;1230;\\1245;1240;1250;345;340;350;450;12345;12340;12450;3450;12350;\Omega\}\end{array}}$$

3 Recherche de tribus engendrées

Soit $\Omega = \mathbb{N}$.

a Déterminons la tribu engendrée par $\left\{ \underbrace{\{1,2\}}_{A}, \underbrace{\{2,4\}}_{B} \right\}$.

Il existe quatre *atomes non vides* qui sont :

$$\underbrace{A \cap \overline{B}}_{C_1} = \{1\} \quad \underbrace{\overline{A} \cap B}_{C_2} = \{4\} \quad \underbrace{\overline{A} \cap \overline{B}}_{C_3} = \{0,3\} \cup \mathbb{N}_5 \quad \underbrace{A \cap B}_{C_4} = \{2\}$$

Nous devons maintenant examiner *toutes les unions disjointes des atomes* un à un, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre ce qui donne en reprenant les mêmes notations qu'à l'exercice précédent :

$$\boxed{\sigma\left\{\{1,2\},\{2,4\}\right\} = \{\varnothing; 1; 2; 4; 03\mathbb{N}_5; 12; 14; 103\mathbb{N}_5; 24; 203\mathbb{N}_5; 403\mathbb{N}_5; 124; 1203\mathbb{N}_5; 2403\mathbb{N}_5; 1403\mathbb{N}_5; \Omega\}}$$

c Déterminons la tribu engendrée par $\left\{ \underbrace{\{1,2\}}_{A}, \underbrace{\{3,4\}}_{B}, \underbrace{\{1,2,3,4\}}_{C} \right\}$.

Il existe trois *atomes non vides* qui sont :

$$\underbrace{A \cap \overline{B} \cap C}_{C_1} = \{1,2\} \quad \underbrace{\overline{A} \cap B \cap C}_{} = \{3,4\} \quad \underbrace{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}_{C_3} = \{0\} \cup \mathbb{N}_4$$

Nous devons maintenant examiner *toutes les unions disjointes des atomes* un à un, deux à deux, trois à trois ce qui donne en reprenant les mêmes notations qu'à l'exercice précédent :

$$\boxed{\sigma\left\{\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3,4\}\right\} = \{\varnothing; 12; 34; 0\mathbb{N}_4; 1234; 120\mathbb{N}_4; 340\mathbb{N}_4; \Omega\}}$$

4 Recherche de tribus engendrées

Soit Ω un ensemble et A,B des sous-ensembles de Ω.

a Déterminons la tribu engendrée par $\left\{ \underbrace{A \cup B}_{A_1}, \underbrace{A \cap B}_{A_2} \right\}$.

Nous devons examiner les quatres *atomes* suivants :

$$A_1 \cap \overline{A_2} \quad \overline{A_1} \cap A_2 \quad A_1 \cap A_2 \quad \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

- $A_1 \cap \overline{A_2} = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = A \triangle B$
- $\overline{A_1} \cap A_2 = \overline{(A \cup B)} \cap (A \cap B) = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap (A \cap B) = \varnothing$
- $A_1 \cap A_2 = (A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{(A \cap B)} = \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Donc

$$\boxed{\sigma\{A \cup B, A \cap B\} = \left\{\varnothing; A \triangle B; A \cap B; \overline{A} \cap \overline{B}; A \cup B; \overline{A} \cup \overline{B}; \overline{A \triangle B}; \Omega\right\}}$$

b Déterminons la tribu engendrée par $\left\{A \cup B, \overline{A} \cap \overline{B}\right\}$.

Nous devons examiner les quatres *atomes* suivants :

$$A_1 \cap \overline{A_2} \quad \overline{A_1} \cap A_2 \quad A_1 \cap A_2 \quad \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

- $A_1 \cap \overline{A_2} = (A \cup B) \cap \overline{\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)} = A \cup B$
- $\overline{A_1} \cap A_2 = \overline{(A \cup B)} \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$

- $A_1 \cap A_2 = (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \varnothing$
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)} = \overline{(A \cup B)} \cap (A \cup B) = \varnothing$

Donc

$$\boxed{\sigma\left\{A \cup B, \overline{A} \cap \overline{B}\right\} = \left\{\varnothing; A \cup B; \overline{A} \cap \overline{B}; \Omega\right\}}$$

c Déterminons la tribu engendrée par $\left\{\underbrace{A \cap B}_{A_1}, \underbrace{\overline{A} \cap \overline{B}}_{A_2}\right\}$.

Nous devons examiner les quatres *atomes* suivants :

$$A_1 \cap \overline{A_2} \quad \overline{A_1} \cap A_2 \quad A_1 \cap A_2 \quad \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

- $A_1 \cap \overline{A_2} = (A \cap B) \cap \overline{\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)} = (A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$
- $\overline{A_1} \cap A_2 = \overline{(A \cap B)} \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \varnothing$
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{(A \cap B)} \cap \overline{\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)} = \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap (A \cup B) = A \bigtriangleup B$

Donc :

$$\boxed{\sigma\left\{A \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\right\} = \left\{\varnothing; A \cap B; \overline{A} \cap \overline{B}; A \bigtriangleup B; \overline{A \bigtriangleup B}; A \cup B; \overline{A} \cup \overline{B}; \Omega\right\}}$$

5 Manipulations

Tout d'abord signalons que comme $A \cap B \subset A$ avec $\mathbf{P}(A \cap B) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A) \neq 0$. De même par *symétrie des rôles joués par* A *et* B alors $\mathbf{P}(B) \neq 0$.

- $\boxed{\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}$
- $\boxed{\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}}$
- $\boxed{\mathbf{P}_{A \cap B}(A \cup B) = 1}$ car $A \cap B \subset A \cup B$.
- $\mathbf{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}_B(A) = 1 - \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \boxed{\dfrac{\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}$
- $\mathbf{P}_B\left(\overline{A \cup B}\right) = \mathbf{P}_B\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \boxed{0}$ car on ne peut réaliser en même temps B et $\overline{B}$.

6 Manipulations

Ce résultat est trivial puisque nous avons démontré dans le cours que $\mathbf{P}_C$ était une probabilité, donc nous pouvons lui appliquer la *formule du crible*. Un point c'est tout !

7 Manipulations

Comme $\mathbf{P}(A \cap B) \neq 0$, $\mathbf{P}_{A \cap B}(C)$ est bien définie. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{A \cap B}(C) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbf{P}(A \cap B)} \text{ par définition} \\ &= \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} \text{ par indépendance des événements} \end{aligned}$$

Après simplifications :

$$\boxed{\mathbf{P}_{A \cap B}(C) = \mathbf{P}(C)}$$

8 Manipulations

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{cl}
 & \mathbf{P}(A\cap B)\,\mathbf{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\mathbf{P}\left(A\cap\overline{B}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\cap B\right)\\
\iff & \mathbf{P}(A\cap B)\left(1-\mathbf{P}(A\cup B)\right)=\left(\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(A\cap B)\right)\left(\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)\right)\\
\iff & \mathbf{P}(A\cap B)\left(1-\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A\cap B)\right)\\
= & \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A\cap B)+\left(\mathbf{P}(A\cap B)\right)^2\\
\iff & \mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A\cap B)\,\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(A\cap B)\,\mathbf{P}(B)+\left(\mathbf{P}(A\cap B)\right)^2\\
= & \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A\cap B)+\left(\mathbf{P}(A\cap B)\right)^2\\
\iff & \mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B)\\
\iff & \boxed{A \text{ et } B \text{ indépendants}}
\end{array}$$

9 Inégalité probabiliste

Nous avons

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset A\\ A\cap B\subset B\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{l} 0\leq\mathbf{P}(A\cap B)\leq\mathbf{P}(A)\\ 0\leq\mathbf{P}(A\cap B)\leq\mathbf{P}(B)\end{array}\right\}$$

En multipliant membre à membre, ceux-ci étant positifs :

$$\boxed{\left(\mathbf{P}(A\cap B)\right)^2\leq\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)}$$

10 Inégalité probabiliste

Tout d'abord comme :

$$A\subset A\cup B\Longrightarrow\mathbf{P}(A)\leq\mathbf{P}(A\cup B)$$

alors $\mathbf{P}(A\cup B)\neq 0$ et les deux probabilités conditionnelles ont un sens.
Par définition :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A\cup B}(A\cap B) &= \frac{\mathbf{P}\left((A\cap B)\cup(A\cup B)\right)}{\mathbf{P}\left((A\cup B)\right)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A\cup B)}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\mathbf{P}(A)\leq\mathbf{P}(A\cup B)\Longrightarrow\frac{1}{\mathbf{P}(A\cup B)}\leq\frac{1}{\mathbf{P}(A)}\text{ car } x\longmapsto\frac{1}{x}\text{ est décroissante sur }]0,1]$$

Puis en multipliant les deux membres par $\mathbf{P}(A\cap B)\geq 0$, il vient :

$$\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A\cup B)}\leq\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$$

puis par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\boxed{\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A\cup B)}\leq\mathbf{P}_A(A\cap B)}$$

11 Inégalité probabiliste

Tout d'abord signalons que :

$$\left(\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\neq 0\right)\Longleftrightarrow\left(\mathbf{P}(A)\neq 0\text{ et }\mathbf{P}(B)\neq 0\right)$$

donc les probabilités conditionnelles ont toutes un sens. Nous avons l'implication $\mathbf{P}_B(A) > \mathbf{P}(A) \Longrightarrow \dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} > \mathbf{P}(A)$ par définition d'une probabilité conditionnelle. En multipliant les deux membres par $\mathbf{P}(B) \geq 0$, il vient que $\mathbf{P}(A\cap B) > \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ puis en divisant les deux membres par $\mathbf{P}(A) > 0$, il s'ensuit que $\dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} > \mathbf{P}(B)$ et en utilisant encore une fois la définition d'une probab ilité conditionnelle :

$$\boxed{\mathbf{P}_A(B) > \mathbf{P}(B)}$$

12 Inégalités probabilistes

a Nous avons

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}\left(A\cap \overline{B}\right) \tag{1}$$

avec

$$\mathbf{P}\left(A\cap \overline{B}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \Longrightarrow -\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \leq -\mathbf{P}\left(A\cap \overline{B}\right) \tag{2}$$

Selon (1) et (2) le résultat est prouvé.

b Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$\forall (A_1,\ldots,A_n) \in \mathcal{A}^n,\quad \mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)$$

- Pour $n = 1$ on a $\mathbf{P}(A_1) \geq \mathbf{P}(A_1)$ ce qui est toujours vrai.
- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition est vérifiée.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{n+1}) &= \mathbf{P}((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap A_{n+1})\\
&= \mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n) - \mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right)\\
&\geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) - \mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right) \text{ selon l'hypothèse}
\end{aligned}$$

Or comme :

$$(A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}} \subset \overline{A_{n+1}}$$

alors :

$$\mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right)$$

donc :

$$-\mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right) \geq -\mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{n+1}) &\geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) - \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right)\\
&\geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n+1}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La proposition est transmissible et donc héréditaire selon le premier principe de récurrence}}$$

c Nous avons l'implication $\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right) \subset \overline{A} \Longrightarrow \mathbf{P}\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)$ soit encore $\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right) \subset \overline{A} \Longrightarrow 1 - \mathbf{P}(B\cup C) \leq 1 - \mathbf{P}(A)$ et par la formule du crible $1 - \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(B\cap C) \leq 1 - \mathbf{P}(A)$ soit encore $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(B\cap C)$ et comme $\mathbf{P}(B\cap C) \geq 0$, il vient :

$$\boxed{\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)}$$

13 Inégalité probabiliste

a Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\Delta C) &= \mathbf{P}((A\cup C)-(A\cap C)) \text{ par définition}\\ &= \mathbf{P}(A\cup C)-\mathbf{P}((A\cup C)\cap(A\cap C))\\ &= \mathbf{P}(A\cup C)-\mathbf{P}(A\cap C)\end{aligned}$$

et selon la formule du crible :

$$\boxed{\mathbf{P}(A\Delta C)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(C)-2\mathbf{P}(A\cap C)}$$

b Nous avons les quivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(A\Delta C)\leq \mathbf{P}(A\Delta B)+\mathbf{P}(B\Delta C)\\ \iff & \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(C)-2\mathbf{P}(A\cap C)\leq \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-2\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-2\mathbf{P}(B\cap C)\\ \iff & -2\mathbf{P}(A\cap C)\leq \mathbf{P}(B)-2\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B)-2\mathbf{P}(B\cap C)\\ \iff & 2\mathbf{P}(A\cap B)+2\mathbf{P}(B\cap C)\leq 2\mathbf{P}(B)+2\mathbf{P}(A\cap C)\\ \iff & \mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B\cap C)\leq \mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A\cap C)\end{aligned}$$

Pour terminer il suffit de prouver que cette dernière inégalité est vraie. Comme $(A\cap B)\cup(B\cap C)\subset B$ nous avons

$$\mathbf{P}((A\cap B)\cup(B\cap C))\leq \mathbf{P}(B)$$

soit par la formule du crible :

$$\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B\cap C)-\mathbf{P}(A\cap B\cap C)\leq \mathbf{P}(B)$$

ou :

$$\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B\cap C)\leq \mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A\cap B\cap C) \tag{3}$$

Enfin comme :

$$(A\cap B\cap C)\subset(A\cap C)$$

nous avons :

$$\mathbf{P}(A\cap B\cap C)\leq \mathbf{P}(A\cap C)$$

d'où selon (3) :

$$\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B\cap C)\leq \mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A\cap C)$$

Le travail sera achevé lorsque nous dirons qu'ayant raisonné par *équivalences successives*, en remontant, l'inégalité de départ est bien véridique.

14 Inégalités de Bonferroni

a Montrons que pour tout entier n non nul :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\geq \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)$$

- Pour $n=1$ on a $\mathbf{P}(A_1)\geq \mathbf{P}(A_1)$ ce qui est toujours vrai.
- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition est vérifiée.

- Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &= \mathbf{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{selon l'hypothèse}
\end{aligned}$$

Or comme selon *l'inégalité de Boole :*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1})$$

alors :

$$-\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \geq -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1})$$

et en "injectant" ce résultat dans la dernière inégalité, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) \\
&\quad \text{en regroupant les deux dernières sommes}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La proposition est transmissible et doncx héréditaire selon le premier principe de récurrence}}$$

b Montrons par récurrence sur n entier naturel non nul que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

- Pour $n = 1$ on a $\mathbf{P}(A_1) \leq \mathbf{P}(A_1)$ ce qui est toujours vrai.
- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition est vérifiée.
- Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &= \mathbf{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{selon l'hypothèse}
\end{aligned}$$

Or comme selon la première question :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i\cap A_{n+1})-\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})$$

alors

$$-\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right)\leq-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i\cap A_{n+1})+\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})$$

et en "injectant" ce résultat dans la dernière inégalité, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1\cup\ldots\cup A_{n+1}) &\leq \sum_{i=1}^{n+1}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i\cap A_{n+1})\\ &\quad+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)+\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})\\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n+1}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n+1}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)\end{aligned}$$

en regroupant les quatre dernières sommes deux à deux.

$\boxed{\text{La proposition est transmissible et donc héréditaire selon le premier principe de récurrence}}$

15 La formule de Poincaré "customisée"

Nous supposerons, car rien n'est dit dans le texte, que $n\geq 2$ (la relation n'ayant aucun intérêt pour $n=1$).

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right) &= 1-\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}\left(\overline{A_{i_1}}\cap\ldots\cap\overline{A_{i_k}}\right)\text{ par le "crible" habituel}\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\left(1-\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\right)\text{ par Morgan}\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\left(1-\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\right)\right)\\ &= 1-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}1\right)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\right)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1+\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}-1\right)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1+(0^n-1)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\text{ par "BN"}\\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})}\end{aligned}$$

16 Majoration d'une probabilité

Par *indépendance* des événements nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)$$

Posons par hypothèse (légitime) que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) > 0$ ainsi en composant par la fonction ln les deux membres de l'égalité, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\ln \mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right) &= \ln \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) - 1\right) \text{ puisque l'on sait que } \forall x > 0,\ \ln x \leq x - 1 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \mathbf{P}\left(A_k\right) - 1\right) \\
&\leq -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k\right)
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i\right)\right)}$$

par *croissance de la fonction* exp .

17 Application de la sous-additivité

Nous savons d'après le *corollaire du théorème de la limite monotone* que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Or d'après *Morgan* :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)$$

avec selon *l'inégalité de Boole :*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}
-\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right) &\geq -\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)\\
\text{donc } \underbrace{1-\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right)}_{=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)} &\geq 1-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)\\
&\geq 1-\sum_{k=1}^{n}\left(1-\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\\
&\geq 1-\sum_{k=1}^{n}(1-1)\\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Enfin comme culturellement :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\leq 1$$

alors par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=1}$$

et le résultat est prouvé.

18 Le lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements défini sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ telle que $\sum_n \mathbf{P}(A_n)$ converge. Montrons que la probabilité qu'une infinité d'événements A_i se produisent simultanément est nulle.

Autrement dit montrons que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)\right)=0$$

Constatons que la suite d'événements $\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)_{n\geq 1}$ est *décroissante* car :

$$\forall n\geq 1,\quad \bigcup_{k\geq n+1}(A_k)\subset\bigcup_{k\geq n}(A_k)$$

donc d'après le *théorème de la limite monotone :*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)$$

Enfin comme $\sum_n \mathbf{P}(A_n)<\infty$ nous pouvons utiliser l'*inégalité de Boole* pour le cas infini disant que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbf{P}(A_k)\tag{4}$$

cette dernière somme représentant le *reste d'ordre $n-1$ de la série convergente de la série de terme général* $\mathbf{P}(A_n)$, donc d'après le cours d'analyse on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\mathbf{P}(A_k)=0$ et le *théorème de prolongement des inégalités* appliqué à l'inégalité (4) donne que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)\leq\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbf{P}(A_k)=0$$

les *"gendarmes"* concluent l'affaire, à savoir :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)=0$$

soit donc :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)\right)=0}$$

19 Une chaîne de Markov[1]

a On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$. Montrons, en la déterminant, qu'il existe une matrice $D\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n=D^nX_0.$$

La famille (A_n,B_n,C_n) où $n\geq 1$ constitue un *système complet d'événements de probabilités à priori non nulles*, alors selon la *formule des probabilités totales* appliquée trois fois nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{n+1})&=\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbf{P}(A_n)+\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbf{P}(B_n)+\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbf{P}(C_n)\\
\mathbf{P}(B_{n+1})&=\mathbf{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbf{P}(A_n)+\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbf{P}(B_n)+\mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbf{P}(C_n)\\
\mathbf{P}(C_{n+1})&=\mathbf{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbf{P}(A_n)+\mathbf{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbf{P}(B_n)+\mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbf{P}(C_n)
\end{aligned}$$

soit numériquement :

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{3}{4}b_n\\
b_{n+1}&=\frac{3}{4}a_n+c_n\\
c_{n+1}&=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n
\end{aligned}$$

et matriciellement :

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}}_{X_{n+1}}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&\frac{3}{4}&0\\\frac{3}{4}&0&1\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}}_{=D}\underbrace{\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}}_{X_n}}$$

Une récurrence immédiate à faire obligatoirement sur la copie donne :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n=D^nX_0}$$

[1] Mathématicien russe (1856 – 1922)

b En admettant[2] que :

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & \frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & -\frac{6}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} \\ -\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & -\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} \\ -\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

calculons X_n en fonction de n. Notons que j'ai décidé de poser que $a_0 = b_0 = c_0 = 1/3$, le texte manquant de précision à ce niveau-là.

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} \frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & \frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & -\frac{6}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} \\ -\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & -\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} \\ -\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35}\right) a_0 + \left(\frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35}\right) b_0 + \left(-\frac{6}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35}\right) c_0 \\ \left(-\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35}\right) a_0 + \left(-\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35}\right) b_0 + \left(\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35}\right) c_0 \\ \left(-\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5}\right) a_0 + \left(-\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5}\right) b_0 + \left(\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5}\right) c_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35}\right) + \left(\frac{3}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35}\right) + \left(-\frac{6}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35}\right) \\ \left(-\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35}\right) + \left(-\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35}\right) + \left(\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35}\right) \\ \left(-\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{4}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{36}{35} \\ \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n + \frac{48}{35} \\ \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

c Comme $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{12}{35} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{16}{35} \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{5}}$$

Nous constatons bien que la somme des limites est égale à 1.

20 Jeu de Pile ou Face

a Introduisons pour tout entier naturel k non nul, les événements A_k (resp. B_k) : "on lance la pièce A au $k^{\text{ième}}$ lancer". On demande de calculer $\mathbf{P}(A_k)$. Le couple (A_k, B_k) où $k \geq 1$ constitue un système complet d'événements de probabilités à priori non nulles, alors selon la formule des probabilités totales nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{k+1}) &= \mathbf{P}_{A_k}(A_{k+1})\,\mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}_{B_k}(A_{k+1})\,\mathbf{P}(B_k) \\ &= a\mathbf{P}(A_k) + (1-b)\,\mathbf{P}(B_k) \\ &= a\mathbf{P}(A_k) + (1-b)\,(1 - \mathbf{P}(A_k)) \\ &= (\underbrace{a+b-1}_{\text{noté } \alpha\neq 1})\mathbf{P}(A_k) + (\underbrace{1-b}_{\text{noté } \beta}) \end{aligned}$$

De cela nous pouvons dire que la suite $(\mathbf{P}(A_k))_{k\geq 1}$ est **arithmético-géométrique** de point fixe $x = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Alors d'après le cours d'analyse la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ définie par $\forall k \geq 1,\ v_k = \mathbf{P}(A_k) - x$ est

[2] pour de très peu de temps encore. . . .

géométrique de raison α (je vous engage très vivement à vous reporter à votre cours !). D'où $\forall k \geq 1$, $v_k = \alpha^{k-1} v_1$ avec $v_1 = \mathbf{P}(A_1) - x = \dfrac{1}{2} - x$ et

$$\begin{aligned}\forall k \geq 1,\ \mathbf{P}(A_k) &= v_k + x \\ &= \alpha^{k-1} v_1 + x \\ &= (a+b-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right) + \frac{1-b}{2-a-b}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(A_k) = \frac{(b-a)(a+b-1)^{k-1}}{2(2-a-b)} + \frac{1-b}{2-a-b}}$$

b Introduisons pour tout entier naturel k non nul, l'événements P_k : "on lance pile au $k^{\text{ième}}$ lancer". On demande de calculer $\mathbf{P}(P_k)$. Le couple (A_k, B_k) où $k \geq 1$ constitue un système complet d'événements de probabilités à priori non nulles, alors selon la formule des probabilités totales nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(P_k) &= \mathbf{P}_{A_k}(P_k)\mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}_{B_k}(P_k)\mathbf{P}(B_k) \\ &= a\mathbf{P}(A_k) + b\mathbf{P}(B_k) \\ &= a\mathbf{P}(A_k) + b(1 - \mathbf{P}(A_k)) \\ &= (a-b)\mathbf{P}(A_k) + b \\ &= (a-b)\left(\frac{(b-a)(a+b-1)^{k-1}}{2(2-a-b)} + \frac{1-b}{2-a-b}\right) + b \\ &= \left(\frac{(b-a)^2(a+b-1)^{k-1}}{2(a+b-2)} + \frac{(a-b)(1-b)}{2-a-b}\right) + b\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(P_k) = \frac{(b-a)^2(a+b-1)^{k-1}}{2(a+b-2)} + \frac{(2ab-b-a)}{a+b-2}}$$

c Nous avons :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(P_k) = \frac{(2ab-b-a)}{a+b-2}}$$

car $|a+b-1| < 1$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} (a+b-1)^{k-1} = 0$.
Maintenant si $a = 1$ et $0 < b < 1$:

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(P_k) = 1}$$

ce qui est très cohérent car si on commence la série des lancers avec la pièce A, vue qu'elle ne possède pas de face on est sûr d'obtenir que des piles au cours de la série illimitée de lancers avec cette même pièce.

Maintenant si on commence la série avec la pièce B, il est quasi-certain que nous finirons par obtenir face lors d'un lancer ce qui nous fera changer de pièce pour jouer avec A, et nous ramènera au cas précédent.

21 Autour de la formule du crible

a.i Notons P_1 l'événement "la personne P_1 ne reçoit aucun lot". Il est clair que par **indépendance des tirages** au sort :

$$\boxed{\mathbf{P}(P_1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^r}$$

a.ii Notons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, P_i l'événement "la personne P_i ne reçoit aucun lot". Nous avons :

$$\boxed{\mathbf{P}(P_1 \cap \ldots \cap P_k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^r}$$

b Pour tout événement $A_1, \ldots, A_n$ définis sur un même espace probabilisé nous avons :

$$\boxed{\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})}$$

c On demande de calculer $\mathbf{P}\left(\overline{P_1} \cap \ldots \cap \overline{P_n}\right)$ en précisant que la question n'a de sens que si $r \geq n$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\overline{P_1} \cap \ldots \cap \overline{P_n}\right) &= 1 - \mathbf{P}(P_1 \cup \ldots \cup P_n) \text{ par Morgan} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_k}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^r \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^r \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} 1 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^r \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\overline{P_1} \cap \ldots \cap \overline{P_n}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^r \binom{n}{k}} \tag{5}$$

d.i L'événement dont on demande la probabilité notée p_m est :

$$\biguplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \left[(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_m}) \bigcap \left(\bigcap_{j \notin \{i_1, i_2, \ldots i_m\}} \overline{P_j}\right)\right]$$

Par $\sigma-$ additivité de $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}
p_m &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \left[(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_m}) \bigcap \left(\bigcap_{j \notin \{i_1, i_2, \ldots i_m\}} \overline{P_j}\right)\right]\right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \mathbf{P}\left((P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_m}) \bigcap \left(\bigcap_{j \notin \{i_1, i_2, \ldots i_m\}} \overline{P_j}\right)\right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \mathbf{P}(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_m}) \, \mathbf{P}_{P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_m}}\left(\bigcap_{j \notin \{i_1, i_2, \ldots i_m\}} \overline{P_j}\right) \text{ par la "FPC"} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \left(\frac{n-m}{n}\right)^r \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \left(\frac{n-m-k}{n-m}\right)^r \binom{n-m}{k} \text{ selon (5)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \left(\frac{n-m-k}{n-m}\right)^r \left(\frac{n-m}{n}\right)^r \binom{n-m}{k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_m = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} \left(\frac{n-m-k}{n}\right)^r}$$

d.ii Nous avons $q_m = \sum_{i=m}^{n-1} p_i$ (on ne somme pas jusqu'à n car il n'est pas possible que tout le monde n'ait rien reçu) et :

$$\boxed{q_m = \sum_{i=m}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} \left(\frac{n-i-k}{n}\right)^r}$$

22 Jeu de dés

a Soit E_n l'événement "une somme de 5 apparaît au $n^{\text{ème}}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît". Calculons $\mathbf{P}(E_n)$.

Commençons par donner le tableau des sommes possibles que les deux dés peuvent faire apparaître :

Dé1↓ Dé2 ⟶	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	**5**	6	**7**
2	3	4	**5**	6	**7**	8
3	4	**5**	6	**7**	8	9
4	**5**	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Introduisons pour tout entier $k \geq 1$ les événements S_{5_k} : "lors du $k^{\text{ème}}$ lancer la somme des deux dés fait 5", S_{7_k} : "lors du $k^{\text{ème}}$ lancer la somme des deux dés fait 7". Ainsi pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1,\ \mathbf{P}(E_n) &= \mathbf{P}\left(\left(\overline{S_{5_1}} \cap \overline{S_{7_1}}\right) \cap \left(\overline{S_{5_2}} \cap \overline{S_{7_2}}\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{S_{5_{n-1}}} \cap \overline{S_{7_{n-1}}}\right) \cap S_{5_n}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\overline{S_{5_1}} \cap \overline{S_{7_1}}\right) \mathbf{P}\left(\overline{S_{5_2}} \cap \overline{S_{7_2}}\right) \ldots \mathbf{P}\left(\overline{S_{5_{n-1}}} \cap \overline{S_{7_{n-1}}}\right) \mathbf{P}\left(S_{5_n}\right) \text{ par indépendance des évts}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(E_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{36}\right)}$$

b Notons A_5 l'événement : "on s'arrête sur une somme de 5", alors

$$A_5 = \biguplus_{n \geq 1} E_n$$

d'où par $\sigma-$ additivité de $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_5) &= \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(E_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{36}\right) \text{ (somme d'une série géo cv de raison } \frac{26}{36},\ \left|\frac{26}{36}\right| < 1 \\ &= \frac{4}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{26}{36}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(A_5) = \frac{2}{5}}$$

c Notons A_7 l'événement : "on s'arrête sur une somme de 7", alors :

$$A_7 = \biguplus_{n \geq 1} F_n$$

où pour tout entier naturel non nul n, F_n l'événement "une somme de 7 apparaît au $n^{\text{ème}}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît". Par $\sigma-$ additivité de $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_7) &= \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(F_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \left(\frac{6}{36}\right) \text{ (somme d'une série géo cv de raison } \frac{26}{36},\ \left|\frac{26}{36}\right| < 1 \\ &= \frac{6}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{26}{36}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(A_7) = \frac{3}{5}}$$

d Notons J l'événement "le jeu ne s'arrête jamais". La famille (A_5, A_7, J) constitue un *système complet d'événements*. Ainsi :

$$\mathbf{P}(A_5) + \mathbf{P}(A_7) + \mathbf{P}(J) = 1$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{P}(J) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = 0}$$

$$\boxed{\text{Moralité l'événement } J \text{ est quasi-impossible}}$$

23 Tirages dans une urne bicolore

a Introduisons $\forall k \in [\![1,2]\!]$ les événements R_k : "le $k^{\text{ème}}$ tirage fournit une boule rouge" et N_k : "le $k^{\text{ème}}$ tirage fournit une boule noire". On demande $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$. D'après la *formule des probabilités composées :*

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}_{R_1}(R_2) \text{ où } \mathbf{P}(R_1) \neq 0$$

$$\boxed{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{r}{n+r} \times \frac{r-1}{n+r-1}}$$

b On demande $\mathbf{P}(R_1 \cap N_2)$. D'après la *formule des probabilités composées :*

$$\mathbf{P}(R_1 \cap N_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}_{R_1}(N_2) \text{ où } \mathbf{P}(R_1) \neq 0$$

$$\boxed{\mathbf{P}(R_1 \cap N_2) = \frac{r}{n+r} \times \frac{n}{n+r-1}}$$

24 Urne de Pôlya

a Introduisons $\forall k \in [\![1,2]\!]$ les événements R_k : "le $k^{\text{ème}}$ tirage fournit une boule rouge" et N_k : "le $k^{\text{ème}}$ tirage fournit une boule noire". On demande $\mathbf{P}(N_2)$. D'après la *formule des probabilités totales* où $\{N_1, R_1\}$ forme un *système complet d'événements de probabilités non nulles*, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N_2) &= \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}_{R_1}(N_2) + \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(N_2) \\ &= \left[\frac{r}{n+r} \times \frac{n}{n+r+d}\right] + \left[\frac{n}{n+r} \times \frac{n+d}{n+r+d}\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(N_2) = \frac{n}{n+r}}$$

Moralité : la remise de d boules de la couleur précédemment obtenue n'a aucune influence sur le résultat.

b On demande $\mathbf{P}_{N_2}(N_1)$ est le problème est bayesien. En reprenant toujours le *même système complet d'événements :*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{N_2}(N_1) &= \frac{\mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(N_2)}{\mathbf{P}(N_2)} \\ &= \frac{\frac{n}{n+r} \times \frac{n+d}{n+r+d}}{\frac{n}{n+r}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{N_2}(N_1) = \frac{d+n}{d+n+r}}$$

25 Le théorème de Bayes

a Introduisons les événements R : "le chapitre `R` est tombé à l'examen", A (resp. B et C) : "L'enseignant A (resp. B et C) pose le sujet". La famille (A, B, C) constitue une *système complet d'événements de probabilités non nulles* et selon la *formule de Bayes :*

$$\mathbf{P}_R(A) = \frac{\mathbf{P}_A(R)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}_A(R)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}_B(R)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}_C(R)\,\mathbf{P}(C)}$$

avec $\mathbf{P}(A) = 0.35$, $\mathbf{P}(B) = 0.4$, $\mathbf{P}(C) = 0.25$, $\mathbf{P}_A(R) = 0.1$, $\mathbf{P}_B(R) = 0.4$, $\mathbf{P}_C(R) = 0.8$. Ainsi

$$\mathbf{P}_R(A) = \frac{0.1 \times 0.35}{0.1 \times 0.35 + 0.4 \times 0.4 + 0.25 \times 0.8}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_R(A) = 8.8608 \times 10^{-2}}$$

b De même :

$$\mathbf{P}_R(B) = \frac{0.4 \times 0.4}{0.1 \times 0.35 + 0.4 \times 0.4 + 0.25 \times 0.8}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_R(B) = 0.40506}$$

c Enfin :

$$\mathbf{P}_R(C) = \frac{0.25 \times 0.8}{0.1 \times 0.35 + 0.4 \times 0.4 + 0.25 \times 0.8}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_R(C) = 0.50633}$$

26 Jeu de "pile ou face"

a Nous avons vu en classe que conjecturer la formule à partir de quelques exemples chiffrés s'avérait extrêmement difficile. C'est pour cela nous avons eu l'idée d'introduire une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1,\ u_n = \mathbf{P}(N_{2n})$, N_{2n} étant l'événement : "la partie dure au moins $2n$ lancers", et essayons de trouver une *relation de récurrence* vérifiée par la suite. Notons toutefois que N_{2n} est réalisé si et seulement si il y a eu autant de piles que de faces lors des $2n$ premiers lancers sans qu'il y ait eu lors de tirages intermédiaures deux piles de plus que de faces et inversement. Introduisons $\forall k \geq 1$ les événements P_k (resp. F_k) : "le $k^{\text{ème}}$ tirage donne pile (resp. face)". Ainsi pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_{2n+2}) &= \mathbf{P}((N_{2n} \cap P_{2n+1} \cap F_{2n+2}) \uplus (N_{2n} \cap F_{2n+1} \cap P_{2n+2})) \\
&= \mathbf{P}(N_{2n} \cap P_{2n+1} \cap F_{2n+2}) + \mathbf{P}(N_{2n} \cap F_{2n+1} \cap P_{2n+2}) \text{ par } \sigma- \text{ additivité de } \mathbf{P} \\
&= \mathbf{P}(N_{2n})\,\mathbf{P}(P_{2n+1})\,\mathbf{P}(F_{2n+2}) + \mathbf{P}(N_{2n})\,\mathbf{P}(F_{2n+1})\,\mathbf{P}(P_{2n+2}) \text{ par indépendance} \\
&= 2p(1-p)\,\mathbf{P}(N_{2n})
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\mathbf{P}(N_{2n}))_{n\geq 1}$ est *géométrique* de raison $2p(1-p)$ qui est différente de 1 et même strictement inférieure à 1 en valeur absolue car on sait par coeur que $x(1-x) \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ quand $x \in [0,1]$. D'où pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_{2n}) &= [2p(1-p)]^{n-1}\,\mathbf{P}(N_2) \text{ par indépendance} \\
&= [2p(1-p)]^{n-1}\,\mathbf{P}((P_1 \cap F_2) \uplus (F_1 \cap P_2)) \\
&= [2p(1-p)]^{n-1}\,(\mathbf{P}(P_1 \cap F_2) + \mathbf{P}(F_1 \cap P_2)) \text{ par } \sigma- \text{ additivité de } \mathbf{P} \\
&= [2p(1-p)]^{n-1} \times 2p(1-p)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(N_{2n}) = [2p(1-p)]^n}$$

b Notons les événements G : "la personne gagne" et $\forall n \geq 1$, G_{2n} : "la personne gagne à l'issue d'un nombre pair de lancers". Nous avons clairement $G = \biguplus_{n\geq 1} G_{2n}$ avec

$$\forall n \geq 1, \quad G_{2n} = N_{2n-2} \cap P_{2n-1} \cap P_{2n}$$

alors par $\sigma -$ *additivité* et *indépendance des événements :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(G) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{n\geq 1} G_{2n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(G_{2n}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{2n-2} \cap P_{2n-1} \cap P_{2n}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{2n-2})\,\mathbf{P}(P_{2n-1})\,\mathbf{P}(P_{2n}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} [2p(1-p)]^{n-1} p^2 \text{ série géométrique convergente} \\
&= \frac{p^2}{1-2p(1-p)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(G) = \frac{p^2}{2p^2-2p+1}}$$

27 Indépendance mutuelle

a Nous avons

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{2}}$$

puisque la pièce est équilibrée et les **lancers indépendants**.
Pour calculer $\mathbf{P}(A_{n+1})$ nous utiliserons une **distribution binomiale** puisque on effectue une **succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre** $\frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \text{ ("somme orpheline" déjà rencontrée plusieurs fois !)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}}$$

b.i Le résultat est très net, à savoir :

$$\boxed{\mathbf{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}(A_{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \in 2\mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}}$$

b.ii Il suffit de trouver un contre-exemple qui "tue", et il n'est pas compliqué d'en trouver un après le résultat de la question précédente. En effet nous avons $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) = 0$ si $n \in 2\mathbb{N}+1$ alors que $\prod_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \neq 0$. Moralité :

$$\boxed{\text{Les événements } A_1, \ldots, A_{n+1} \text{ ne sont pas mutuellement indépendants}}$$

b.iii Cette question est un peu plus délicate car son traitement doit se faire à partir d'une discussion concernant la présence ou non dans la sous-famille de l'événement A_{n+1}.

1.
 - A_{n+1} est absent de la sous-famille des événements considérés.
   Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall (i_1, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) &= \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_{i_k}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

   en effet l'événement $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ est réalisé si et seulement si on a obtenu pile lors des i_1,…et $i_k^{\text{ème}}$ lancers, peut importe ce qu'on donné les autres.
   En conclusion, toute sous famille d'au plus n événements choisis parmi $A_1, \ldots, A_n$ est formée d'**événements mutuellement indépendants.**
 - A_{n+1} est présent dans la sous-famille des événements considérés.
   - Si $k \in 2\mathbb{N}$ montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$,

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j) \times \mathbf{P}(A_{n+1})$$

     Nous avons $\prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j) \times \mathbf{P}(A_{n+1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.
     D'autre part selon la formule des probabilités composées

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \forall (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \times \underbrace{\mathbf{P}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}}(A_{n+1})}_{\substack{\text{Il y a eu k lancers donnant obligatoi-}\\ \text{rement pile éventuellement complétés}\\ \text{par d'autres lancers donnant un nbre}\\ \text{pair de piles parmi les n-k restants}}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{2i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-2i} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{2i} \text{ ("somme orpheline")} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{2i} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} 2^{n-k-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

– Si $k \in 2\mathbb{N}+1$ montrons toujours que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$,

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j) \times \mathbf{P}(A_{n+1})$$

Nous avons

$$\prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j) \times \mathbf{P}(A_{n+1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

D'autre part selon la formule des probabilités composées $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \times \underbrace{\mathbf{P}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}}(A_{n+1})}_{\text{Il y a eu k, avec k impair, lancers donnant obligatoirement pile obligatoirement complétés par d'autres lancers donnant un nbre impair de piles parmi les n-k restants}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-k-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{2i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-2i-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-k-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{2i+1} \text{ ("somme orpheline")} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-k-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{2i+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} 2^{n-k-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

Conclusion selon les deux cas de discussion précédents, nous avons bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall (i_1, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$,

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j) \times \mathbf{P}(A_{n+1})$$

ce qui équivaut à dire que toute sous famille contenant A_{n+1} d'au plus n événements choisis parmi $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ est constituée d'**événements mutuellement indépendants**.

Conclusion finale **:** selon la présence ou non de A_{n+1} dans la sous-famille en question, toute sous famille d'au plus n événements choisis parmi $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ est formée d'**événements mutuellement indépendants**.