Correction fiche 5

La correction comporte 23 pages.

1 Recherche d'un paramètre

La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définit une loi de probabilité si et seulement si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$ ce qui entraîne que $a > 0$
- $\sum\limits_n p_n$ converge et de somme égale à 1.
  Or comme p_n s'écrit comme combinaison linéaire de deux termes généraux de séries proportionnelles à des séries convergentes ($\sum\limits_n \frac{1}{n!}$ et $\sum\limits_n \frac{a^n}{n!}$ sont des *séries exponentielles* convergentes). Ainsi $\sum\limits_n p_n$ converge avec

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\\
&= \frac{1}{4}e + \frac{1}{8}e^a
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}e + \frac{1}{8}e^a = 1\\
\iff & \boxed{a = \ln(8-2e)}
\end{aligned}$$

2 Inégalité probabiliste de Laplace[1]

Pour commencer montrons que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{1}_{[X\leq 0]} \leq e^{-tX} \tag{1}$$

- L'événement $[X \leq 0]$ n'est pas réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[X\leq 0]} = 0$ et comme la fonction exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inégalité (1) est bien vérifiée.
- L'événement $[X \leq 0]$ est réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[X\leq 0]} = 1$. D'autre part :

  $$[X \leq 0] \subset [-tX \geq 0] \subset \left[e^{-tX} \geq e^0\right]$$

  par *croissance* de exp et (1) est bien vérifiée.
- Comme $\exp(-tX)$ possède une espérance, par la *croissance et la linéarité de l'opérateur*[2] $\mathbf{E}$ on obtient $\forall t \geq 0$, $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[X\leq 0]}\right) \leq \mathbf{E}(\exp(-tX))$, soit par *définition de l'indicatrice* :

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ \mathbf{P}([X \leq 0]) \leq \mathbf{E}\left(e^{-tX}\right)}$$

[1] Laplace Pierre-Simon (Marquis De) (1749 – 1827)
[2] Symbole mathématique représentant une ou plusieurs opérations mathématiques à effectuer.

3 Inégalité probabiliste

Pour commencer montrons que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{1}_{[X-np>\varepsilon]} \leq \exp\left(\lambda\left(X-np-\varepsilon\right)\right) \tag{2}$$

- L'événement $[X-np>\varepsilon]$ n'est pas réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[X-np>\varepsilon]}=0$ et comme la fonction exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inégalité (2) est bien vérifiée.
- L'événement $[X-np>\varepsilon]$ est réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[X-np>\varepsilon]}=1$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\forall\left(\lambda,\varepsilon\right)\in\mathbb{R}_+^*,\ [X-np>\varepsilon] &= [X-np-\varepsilon>0]\\
&= [\lambda\left(X-np-\varepsilon\right)>0]\\
&= \left[\exp\left(\lambda\left(X-np-\varepsilon\right)\right)>e^0\right] \text{ car exp est une } \textit{bijection croissance}\\
&= [\exp\left(\lambda\left(X-np-\varepsilon\right)\right)\geq 1] \text{ et (2) est bien vérifiée}
\end{aligned}$$

- Nous supposerons que la variable $\exp\left(\lambda\left(X-np-\varepsilon\right)\right)$ possède une espérance. Par la *croissance et la linéarit*é *de l'opérateur* $\mathbf{E}$ on obtient :

$$\forall\left(\lambda,\varepsilon\right)\in\mathbb{R}_+^*,\quad \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{[X-np>\varepsilon]}\right)\leq\mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda\left(X-np-\varepsilon\right)\right)\right)$$

soit par *définition de l'indicatrice* :

$$\boxed{\forall\left(\lambda,\varepsilon\right)\in\mathbb{R}_+^*,\quad \mathbf{P}\left([X-np>\varepsilon]\right)\leq\mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda\left(X-np-\varepsilon\right)\right)\right)}$$

4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Tout d'abord commençons par dire que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{6}\right)$ (car on effectue une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\dfrac{1}{6}$). Cela nous permet de dire que F_n admet une espérance et une variance et l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* est applicable, ce qui donne $\forall\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(|F_n-\mathbf{E}\left(F_n\right)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\mathbf{V}\left(F_n\right)}{\varepsilon^2}\\
\iff\quad & 1-\mathbf{P}\left(|F_n-\mathbf{E}\left(F_n\right)|<\varepsilon\right)\leq\frac{\mathbf{V}\left(F_n\right)}{\varepsilon^2}\\
\iff\quad & \mathbf{P}\left(|F_n-\mathbf{E}\left(F_n\right)|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\mathbf{V}\left(F_n\right)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(F_n\right) &= \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(X_n\right)\\
&= \frac{n1/6}{n}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(F_n\right) &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(X_n\right)\\
&= \frac{5n}{36n^2}\\
&= \frac{5}{36n}
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon=0.99$, l'IBT donne :

$$\mathbf{P}\left(\left|F_n-\frac{1}{6}\right|<0.99\right)\geq 1-\frac{5}{36n\left(0.99\right)^2}$$

Pour trouver n il suffit que n soit tel que $1 - \dfrac{5}{36n\,(0.99)^2} \geq 0.99$ soit n tel que $\dfrac{5}{36n\,(0.99)^2} \leq 0.01$ ou encore n tel que $n \geq \dfrac{5}{36 \times 0.01 \times (0.99)^2}$. Finalement :

$$\boxed{n \geq \left\lfloor \frac{5}{36 \times 0.01 \times (0.99)^2} \right\rfloor + 1}$$

5 Moment factoriel d'ordre r d'une variable de Poisson

D'après le cours la variable $X(X-1)\dots(X-r+1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k(k-1)\dots(k-r+1)\,\mathbf{P}([X=k])$ est convergente et en cas de convergence :

$$\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)\,\mathbf{P}([X=k])$$

Or $\forall k \geq \mathbb{N}$:

$$k(k-1)\dots(k-r+1)\,\mathbf{P}([X=k]) = k(k-1)\dots(k-r+1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}_r, \quad k(k-1)\dots(k-r+1)\,\mathbf{P}([X=k]) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-r}\lambda^r}{(k-r)!}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la *série exponentielle* de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Finalement X admet un *moment factoriel d'ordre* r égal à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) &= \lambda^r e^{-\lambda} \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} \\
&= \lambda^r e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \text{ en posant } i = k-r \\
&= \lambda^r e^{-\lambda} e^{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \lambda^r}$$

6 Moment factoriel d'ordre r d'une variable géométrique sur $\mathbb{N}$

D'après le cours la variable $X(X-1)\dots(X-r+1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k(k-1)\dots(k-r+1)\,\mathbf{P}([X=k])$ est convergente et en cas de convergence :

$$\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)\,\mathbf{P}([X=k])$$

Or $\forall k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
k(k-1)\dots(k-r+1)\,\mathbf{P}([X=k]) &= k(k-1)\dots(k-r+1)\,q^k p \\
&= k(k-1)\dots(k-r+1)\,q^{k-r} p q^r
\end{aligned}$$

A ce niveau, je vous garantie la présence de préliminaires qui vous permettrons de conclure que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

si et seulement si $|x| < 1$ (on parle de **série dérivée d'ordre k de la série géométrie de raison x**).

Ainsi comme $|q| < 1$, nous constatons que nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la *série dérivée d'ordre r dc la série géométrique de raison q*.

En conclusion X admet un moment factoriel d'ordre r égal à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X\left(X-1\right)\ldots\left(X-r+1\right)\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(k-1\right)\ldots\left(k-r+1\right)q^{k-r}pq^{r} \\
&= \sum_{k=r}^{+\infty} k\left(k-1\right)\ldots\left(k-r+1\right)q^{k-r}pq^{r} \\
&= pq^{r}\sum_{k=r}^{+\infty} A_k^r q^{k-r} \\
&= pq^{r}\frac{r!}{\left(1-q\right)^{r+1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X\left(X-1\right)\ldots\left(X-r+1\right)\right) = \frac{q^r r!}{p^r}}$$

7 Loi d'une variable fonction d'une autre

Un petit échauffement pour les premières valeurs entières, comme fait en classe, nous amène à distinguer deux cas de figure :

- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$, l'événement $[X(\omega) = 2k]$ est réalisé si et seulement si $\left[4\left\lfloor \frac{X(\omega)}{2}\right\rfloor - 2X(\omega) + 1 = 4k - 4k + 1\right]$ l'est, soit l'événement $[X(\omega) \in 2\mathbb{N}]$ est réalisé si et seulement si $[Y(\omega) = 1]$ est réalisé.
- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$, l'événement $[X(\omega) = 2k+1]$ est réalisé si et seulement si $\left[4\left\lfloor \frac{X(\omega)}{2}\right\rfloor - 2X(\omega) + 1 = 4k - 4k - 2 + 1\right]$ l'est, soit l'événement $[X(\omega) \in 2\mathbb{N}+1]$ est réalisé si et seulement si $[Y(\omega) = -1]$ est rélisé.

  Moralité $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([Y=-1]\right) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=0}^{+\infty}[X=2k+1]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left([X=2k+1]\right) \text{ par } \sigma - \textit{additivité} \text{ de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([Y=1]\right) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=0}^{+\infty}[X=2k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left([X=2k]\right) \text{ par } \sigma - \textit{additivité} \text{ de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

Nous sommes en terrain connu avec des séries méga-classique "à trous" avec :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \\
&= 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} &= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^{k}}{k!}\\ &= e^{-2\lambda}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([Y=1])=\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\quad\text{et}\quad\mathbf{P}([Y=-1])=\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}}$$

8 Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence

Des *itérations successives* nous amènent au résultat à démontrer par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X=n])=\frac{4^n}{n!}\mathbf{P}([X=0])$$

L'initialisation est triviale. Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}$, l'égalité est vérifiée. Comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=n+1]) &= \frac{4}{n+1}\mathbf{P}([X=n])\\ &= \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\mathbf{P}([X=0])\ \text{selon l'hypothèse de récurrence}\end{aligned}$$

la proposition étant transmissible est donc héréditaire.

Cherchons enfin $\mathbf{P}([X=0])$. Pour cela $\sum_n \frac{4^n}{n!}\mathbf{P}([X=0])$ doit converger et de somme égale à 1. La convergence ne pose aucun problème car le terme général est proportionnel à celui d'une *série exponentielle* de paramètre 4. Enfin $\mathbf{P}([X=0])$ doit vérifier :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{n!}\mathbf{P}([X=0]) &= \mathbf{P}([X=0])\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{n!}\\ &= \mathbf{P}([X=0])\,e^4\\ &= 1\end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que $\mathbf{P}([X=0])=e^{-4}$.

D'après le cours :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X=n])=\frac{e^{-4}4^n}{n!}\quad\text{et donc}\quad X\hookrightarrow\mathcal{P}(4)\quad\text{avec}\quad\mathbf{E}(X)=\mathbf{V}(X)=4}$$

9 Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence

Introduisons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\mathbf{P}([X=n])$ vérifiant $4u_{n+2}-5u_{n+1}+u_n=0$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente d'ordre deux* d'équation caractéristique associée :

$$\begin{aligned}&4r^2-5r+1=0\\ \iff\ &4(r-1)\left(r-\frac{1}{4}\right)=0\\ \iff\ &r=1\text{ ou }r=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha 1^n+\beta\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

et pour que $\sum_n u_n$ ait une chance de converger il faut que :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha + \beta\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

ce qui entraîne que $\alpha = 0$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \beta\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Dans ce cas la série de terme général $\beta\left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge en tant que série proportionnelle à la *série géométrique* de raison $\frac{1}{4}$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \beta\left(\frac{1}{4}\right)^n &= \frac{\beta}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{4}{3}\beta\end{aligned}$$

d'où $\beta = \frac{3}{4}$. D'après le cours :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X=n]) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et donc} \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X) = \frac{1}{3} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{4}{9}}$$

10 Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence

Nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}([X \geq n]) = \mathbf{P}([X=n]) + \mathbf{P}([X>n])\\ \iff\ &\mathbf{P}([X=n]) = \mathbf{P}([X\geq n]) - \mathbf{P}([X \geq n+1]) \end{aligned} \tag{3}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}([X=n]) = p\mathbf{P}([X\geq n])\\ \iff\ &\mathbf{P}([X\geq n]) - \mathbf{P}([X\geq n+1]) = p\mathbf{P}([X\geq n])\\ \iff\ &\mathbf{P}([X\geq n+1]) = (1-p)\,\mathbf{P}([X\geq n]) \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\mathbf{P}([X\geq n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $1-p$, donc

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([X\geq n]) &= (1-p)^{n-1}\,\mathbf{P}([X\geq 1])\\ &= (1-p)^{n-1} \text{ puisque } X(\Omega) = \mathbb{N}^* \Longrightarrow \mathbf{P}([X\geq 1]) = 1\end{aligned}$$

Selon (3) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}([X=n]) = p(1-p)^{n-1} \quad \text{et} \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

11 Loi et série logarithmique

La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est la loi d'une variable X si et seulement si $\forall n \geq 0$, $p_n \geq 0$ et la série $\sum_k p_k$ converge et de somme égale à 1.

- $\forall n \geq 0$:
$$\frac{-p^{n+1}}{(n+1)\ln(1-p)} \geq 0 \tag{4}$$
puisque $\ln(1-p) \leq 0$.

- Examinons si la série converge. C'est l'occasion d'étudier la *série logarithmique* (totalement hors programme) qui est assez récurrente en probabilités et qu'il est très important d'examiner en détail.
$\boxed{\heartsuit}$ Introduisons $\forall n \geq 0$, $\forall x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
S_n &= -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{(k+1)}\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^{k}}{k}\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^x t^{k-1}dt\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\int_0^x\sum_{k=1}^{n+1} t^{k-1}dt\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\int_0^x\sum_{k=0}^{n} t^{k}dt\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\int_0^x\left[\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right]dt\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\left(\int_0^x\frac{dt}{1-t}-\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-t}dt\right)\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\left([-\ln(1-t)]_0^x-\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-t}dt\right)\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)}\left(-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-t}dt\right)
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
0\leq\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-t}dt &\leq \int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-x}dt \text{ car } t\mapsto\frac{1}{1-t} \text{ est croissante sur } [0,x]\\
&\leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^{n+1}dt\\
&\leq \frac{1}{1-x}\times\frac{x^{n+2}}{n+2}
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-x}\frac{x^{n+2}}{n+2}=0$ du fait que $|x|<1$ alors le *théorème d'encadrement :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-t}dt=0$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}S_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1-x)}{\ln(1-p)}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(1-p)}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-t}dt\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1-x)}{\ln(1-p)}
\end{aligned}$$

et pour $x=p$,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=1 \qquad (5)$$

Selon (4) et (5) :

$$\boxed{\text{La suite } (p_n)_{n\geq0} \text{ est la loi d'une variable } X}$$

12 Loi d'une variable sous conditions

- Nous avons de toute évidence :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Selon la formule des probabilités totales associée au système complet d'événement $([X \in 2\mathbb{N}+1], [X \in 2\mathbb{N}])$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=0]) &= \mathbf{P}([Y=0] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([Y=0] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}(\underbrace{[0=0]}_{\Omega} \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([X=0] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=0}^{+\infty} [X = 2k+1]\right) + \mathbf{P}([X=0]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X=2k+1]) + e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Y=k]) &= \mathbf{P}([Y=k] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([Y=k] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}(\underbrace{[0=k]}_{\varnothing} \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([X=2k] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}\left([X=2k] \biguplus \left(\biguplus_{i=0}^{+\infty} [X=2i]\right)\right) \\
&= \mathbf{P}([X=2k]) \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

Notons P la somme définie par :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

C'est à ce moment que nous bénissons le chapitre outils ! En effet :

$$\begin{aligned}
P + I &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{\lambda}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P - I &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

D'où le système linéaire à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \dfrac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \\ I = \dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} \end{array} \right. \tag{6}$$

Ainsi donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y=0]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + e^{-\lambda} \\ &= \frac{1-e^{-2\lambda}}{2} + e^{-\lambda}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}([Y=0]) = \frac{-e^{-2\lambda}+2e^{-\lambda}+1}{2}}$$

et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([Y=k]) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}}$$

Notez avec joie que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y=k]) &= \frac{-e^{-2\lambda}+2e^{-\lambda}+1}{2} + e^{-\lambda}(P-1) \\ &= \frac{-e^{-2\lambda}+2e^{-\lambda}+1}{2} + e^{-\lambda}\left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} - 1\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

- Passons à l'espérance. La variable Y admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$. En cas de convergence Y est le réel noté $\mathbf{E}(Y)$ définie par $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$. Or pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!} &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{2(2k-1)!} \\ &\leq \frac{e^{-\lambda}\left(\lambda^2\right)^k}{k!}\end{aligned}$$

Comme la série de terme général $\sum_k \frac{e^{-\lambda}\left(\lambda^2\right)^k}{k!}$ converge en tant que série proportionnelle à la série exponentielle de paramètre λ^2, le critère de majoration appliqué aux séries à termes positifs nous assure que la série $\sum_k k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$ converge aussi. En reprenant le principe "papa-maman" comme ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \times \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{\lambda\left(1-e^{-2\lambda}\right)}{4}}$$

- On sait que Y admet une variance si et seulement si Y^2 admet une espérance, soit si et seulement si la série de terme géneral $k^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$ converge. Or pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned}k^2\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} &= \frac{1}{4}\left(2k(2k-1)+2k\right)\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} + \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}\right)\end{aligned}$$

Or les séries $\sum_k \frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!}$ et $\sum_k \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}$ convergent car on utilise le critère de majoration appliqué aux séries à termes positifs après avoir remarqué que $\frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} \leq \frac{(\lambda^2)^k}{k!}$ et $\frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} \leq \frac{(\lambda^2)^k}{k!}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} + \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}\right) \\
&= \frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}\right) \\
&= \frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{4}\left(\lambda^2 \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} + \lambda\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\right) \text{ selon (6)} \\
&= \frac{\lambda^2\left(1+e^{-2\lambda}\right)}{4}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Huygens-Koenig :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}\left(Y^2\right) - \left(\mathbf{E}(Y)\right)^2 \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{4}\left(\lambda^2 \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} + \lambda\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\right) - \left(\frac{\lambda\left(1-e^{-2\lambda}\right)}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

et après reduction :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y) = \frac{\lambda}{8}\left(1-e^{-2\lambda}\right) + \frac{1}{16}\lambda^2\left(4e^{-2\lambda}+1-e^{-4\lambda}\right)}$$

13 Loi d'une variable fonction d'une autre

Tout d'abord :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Selon la formule des probabilités totales associée au système complet d'événement $([X \in 2\mathbb{N}+1], [X \in 2\mathbb{N}])$:

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Y=2k+1]) &= \mathbf{P}([Y=2k+1] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([Y=2k+1] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}([X=2k+1] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{2} = 2k+1\right] \cap [X \in 2\mathbb{N}]\right) \\
&= \mathbf{P}([X=2k+1]) + \mathbf{P}([X=4k+2] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}([X=2k+1]) + \mathbf{P}([X=4k+2]) \\
&= q^{2k}p + q^{4k+1}p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([Y=2k+1]) = p\left(q^{2k}+q^{4k+1}\right)}$$

et $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=2k]) &= \mathbf{P}([Y=2k] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([Y=2k] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}(\underbrace{[X=2k] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]}_{=\varnothing}) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{2} = 2k\right] \cap [X \in 2\mathbb{N}]\right) \\
&= \mathbf{P}([X=4k] \cap X \in 2\mathbb{N}) \\
&= \mathbf{P}([X=4k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([Y = 2k]) = q^{4k-1}p}$$

Je vous laisse cette fois-ci vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

14 Une inégalité probabiliste

Pour commencer montrons que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{1}_{[|X| \geq a]} \leq \frac{g(|X|)}{g(a)} \tag{7}$$

- L'événement $[|X| \geq a]$ n'est pas réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[|X| \geq a]} = 0$ et comme la fonction g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ alors $\dfrac{g(|X|)}{g(a)} \geq 0$, l'inégalité (7) est bien vérifiée.
- L'événement $[|X| \geq a]$ est réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[|X| \geq a]} = 1$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \ [|X| \geq a] \quad & \subset \quad [g(|X|) \geq g(a)] \ \text{ car } g \ \textit{est strictement croissance} \\ & \subset \quad \left[\frac{g(|X|)}{g(a)} \geq 1\right] \ \text{ car } g(a) > 0 \text{ et } (7) \text{ est bien vérifiée} \end{aligned}$$

- Nous supposerons que la variable $g(|X|)$ possède une espérance, par la *croissance et la linéarité de l'opérateur* $\mathbf{E}$ on obtient :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[|X| \geq a]}\right) \leq \mathbf{E}\left(\frac{g(|X|)}{g(a)}\right) \leq \frac{\mathbf{E}(g(|X|))}{g(a)}$$

soit par *définition de l'indicatrice* :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}([|X| \geq a]) \leq \frac{\mathbf{E}(g(|X|))}{g(a)}}$$

15 Une inégalité probabiliste

Pour commencer montrons que pour $0 \leq a < \alpha$ on a :

$$\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]} \geq \frac{h(X) - a}{\alpha - a} \tag{8}$$

- L'événement $[h(X) \geq a]$ n'est pas réalisé autrement dit $[h(X) < a]$ est réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]} = 0$ et comme $h(X) - a < 0$ avec $\alpha - a > 0$ alors :

$$\frac{h(X) - a}{\alpha - a} < 0 \Longrightarrow \frac{h(X) - a}{\alpha - a} \leq 0$$

l'inégalité (8) est bien vérifiée.
- L'événement $[h(X) \geq a]$ est réalisé. Alors $\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]} = 1$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \forall a \in [0, \alpha[\,, \ [\alpha \geq h(X)] \quad & = \quad [h(X) - a \leq \alpha - a] \\ & \quad\quad \text{car } \exp \ \textit{est une bijection croissance} \\ & = \quad \left[\frac{h(X) - a}{\alpha - a} \leq 1\right] \ \text{ et } (8) \text{ est bien vérifiée} \end{aligned}$$

- Nous supposerons que la variable $h(X)$ possède une espérance, par la *croissance et la linéarité de l'opérateur* $\mathbf{E}$ on obtient :

$$\forall a \in [0, \alpha[\,, \quad \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]}\right) \geq \mathbf{E}\left(\frac{h(X) - a}{\alpha - a}\right) \geq \frac{\mathbf{E}(h(X)) - a}{\alpha - a}$$

soit par *définition de l'indicatrice :*

$$\boxed{\forall a \in [0, \alpha[\,, \quad \mathbf{P}(h(X) \geq a) \geq \frac{\mathbf{E}(h(X)) - a}{\alpha - a}}$$

16 Théorème de transfert

D'après le *théorème de transfert* $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_k \frac{1}{k+1}\mathbf{P}([X=k])$ est convergente. En cas de convergence $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ existe et vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathbf{P}([X=k])$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{k+1}\mathbf{P}([X=k]) &= \frac{q^k p}{k+1} \\ &= \frac{p}{q}\frac{q^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

Nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la *série logarithmique* de paramètre q déjà étudiée à l'exercice 9. Donc $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{q}\frac{q^{k+1}}{k+1} &= \frac{p}{q}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} \\ &= -\frac{p}{q}\ln(1-q) \\ &= -\frac{p}{q}\ln p \\ &= (\ln p)^{-\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = (\ln p)^{\frac{p}{p-1}}}$$

17 Théorème de transfert

L'utilisation du théorème de transfert nous permet de dire que α^X admet une espérance si et seulement si $\sum_k \alpha^k \mathbf{P}([X=k])$ est convergente et en cas de convergence :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\alpha^X\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \mathbf{P}([X=k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}(\alpha\lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la série exponentielle de paramètre $\alpha\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En conclusion α^X admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\alpha^X\right) &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\alpha\lambda} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\alpha^X\right)=e^{\lambda(\alpha-1)}}$$

18 Espérance et antirépartition

a Montrons que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left(X>k\right)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbf{P}\left(X=k\right)+\left(n+1\right)\mathbf{P}\left(X>n\right)$$

Nous avons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}\left([X\geq k]\right)=\mathbf{P}\left([X>k]\right)+\mathbf{P}\left[X=k\right]$. En multipliant les deux membres par k, il vient $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $k\mathbf{P}\left([X\geq k]\right)=k\mathbf{P}\left([X>k]\right)+k\mathbf{P}\left[X=k\right]$, puis en sommant sur k, k allant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X\geq k]\right)=\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X>k]\right)+\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)$$

soit encore :

$$\sum_{k=1}^{n}k\mathbf{P}\left([X>k-1]\right)=\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X>k]\right)+\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)\ \text{(reste valable pour } n=0)$$

ou même :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbf{P}\left([X>k]\right)=\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X>k]\right)+\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)$$

en développant :

$$\sum_{k=0}^{n-1}k\mathbf{P}\left([X>k]\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left([X>k]\right)=\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X>k]\right)+\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)=\sum_{k=0}^{n-1}k\mathbf{P}\left([X>k]\right)-\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X>k]\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left([X>k]\right)$$

après simplifications (télescopage) :

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left([X>k]\right)-n\mathbf{P}\left([X>n]\right)$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left([X>k]\right)=\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)+n\mathbf{P}\left([X>n]\right)$$

En conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left([X>k]\right)=\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\left([X=k]\right)+(n+1)\mathbf{P}\left([X>n]\right)}$$

b.i

- On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $\mathbf{E}\left(X\right)$.Montrons que la série $\sum_k\mathbf{P}\left(X>k\right)$ est convergente. Pour cela **il suffit** de montrer que $\lim_{n\to+\infty}(n+1)\mathbf{P}\left(X>n\right)=0$ soit $\lim_{n\to+\infty}(n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(X=k\right)=0$. Nous avons :

$$0\leq(n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(X=k\right)\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}k\mathbf{P}\left(X=k\right)$$

car $k \geq n+1$, et nous reconnaissons le *reste d'ordre n d'une série convergente*, puisque par hypothèse l'espérance existe. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(X=k) = 0$ et selon le *théorème d'encadrement* $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) = 0$. Alors en prenant l'égalité de la question précédente, par *passage à la limite* quand n tend vers $+\infty$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X>k) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) + \lim_{n\to+\infty} (n+1)\mathbf{P}(X>n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) + 0 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k)
\end{aligned}$$

Comme l'espérance existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \mathbf{E}(X)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X>k)$ existe et est finie égale à $\mathbf{E}(X)$, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X>k) = \mathbf{E}(X)}$$

- Réciproquement, supposons que la série $\sum\limits_{k} \mathbf{P}(X>k)$ est convergente, montrons qu'il en est de même pour la série de terme général $k\mathbf{P}([X=k])$ et que X admet une espérance. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\mathbf{P}([X>n]) \geq 0$ l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X>k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) + (n+1)\mathbf{P}(X>n)$$

entraine que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([X=k]) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X>k]) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X>k])$$

puisque la série de terme général $\mathbf{P}([X>n])$ converge. Ainsi la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbf{P}([X=k])\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc *convergente*, ce qui équivaut à dire que la série de terme général $k\mathbf{P}([X=k])$ est convergente et donc que l'espérance existe. Cela nous ramène donc à la question précédente "pour boucler la boucle" et dire que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X>k]) = \mathbf{E}(X)}$$

b.ii Si l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessus est vérifiée, on a trivialement l'égalité :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X>k)}$$

19 Mode(s) d'une distribution

a Introduisons la suite $(p_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définie par $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = \mathbf{P}([X=k])$. Etudions la *monotonie* de cette suite. $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}\frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}\\ &= \frac{n!k!(n-k)!p}{(k+1)!(n-k-1)!n!(1-p)}\\ &= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}\end{aligned}$$

et :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\iff \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \geq 1\\ &\iff (n-k)p \geq (k+1)(1-p)\\ &\iff np-kp \geq k-kp+1-p\\ &\iff np \geq k+1-p\\ &\iff k \leq n(1+p)-1\end{aligned} \tag{10}$$

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si $n(1+p)-1$ est un entier. La réponse est que nous n'en savons rien, tout dépendant de p pour lequel nous n'avons aucun renseignement. C'est la raison pour laquelle nous considèrerons la *partie entière* de $n(1+p)-1$, notée $\lfloor n_0\rfloor$ où $n_0 = n(1+p)-1$.

Par définition $\lfloor n_0\rfloor \leq n_0 < \lfloor n_0\rfloor + 1$, nous savons selon (9) et (10) que $p_{n_0} > p_{\lfloor n_0\rfloor}$ et $p_{n_0} > p_{\lfloor n_0\rfloor+1}$, mais la question est de savoir si nous avons $p_{\lfloor n_0\rfloor} < p_{\lfloor n_0\rfloor+1}$ ou le contraire. La réponse est simple. Comme $\lfloor n_0\rfloor \leq n_0$, par définition nous avons l'équivalence :

$$\frac{p_{\lfloor n_0\rfloor+1}}{p_{\lfloor n_0\rfloor}} \geq 1 \iff \lfloor n_0\rfloor \leq n_0$$

qui est vraie. Moralité le mode de la distribution est $m_o = \lfloor n_0\rfloor + 1$, soit :

$$\begin{aligned}m_o &= \lfloor n(1+p)-1\rfloor + 1\\ &= \lfloor n(1+p)\rfloor - 1 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{m_o = \lfloor n(1+p)\rfloor}$$

b Nous avons pour tout entier k :

$$\begin{aligned}\frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}k!}{(k+1)!e^{-\lambda}\lambda^k}\\ &= \frac{\lambda}{k+1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1\\ \iff &\frac{\lambda}{k+1} > 1\\ \iff &k \leq \lambda - 1\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue nous donne que :

$$\boxed{m_o = \lfloor \lambda \rfloor}$$

Deuxième partie : recherche de loi

20 Loi et antirépartition

- Nous avons $X(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
- $[X > k] = \left\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k \mid i_1 > i_2 > \cdots > i_k\right\}$ et
$\Omega = \left\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k \mid i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k\right\}$ est l'ensemble des $k-$ *arrangements* de $[\![1, n]\!]$ de cardinal A_n^k. Ainsi pour $k \in [\![2, n-1]\!]$:

$$\boxed{\mathbf{P}([X > k]) = \frac{\binom{n}{k}}{A_n^k} = \frac{1}{k!}}$$

Cette formule reste valable pour $k = 1$ puisque $\mathbf{P}([X > 1]) = 1$ du fait que $X(\Omega) = [\![2, n]\!]$. En revanche elle ne l'est pas pour $k = n$ car $[X > n] = \varnothing$ alors que l'égalité donne :

$$\mathbf{P}([X > n]) = \frac{1}{n!}$$

- $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$:

$$\mathbf{P}([X \geq k]) = \mathbf{P}([X > k]) + \mathbf{P}([X = k])$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = k]) &= \mathbf{P}([X \geq k]) - \mathbf{P}([X > k]) \\ &= \mathbf{P}([X > k-1]) - \mathbf{P}([X > k]) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n-1]\!], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}}$$

Enfin :

$$\boxed{\mathbf{P}([X = n]) = \frac{1}{(n-1)!}}$$

$[X = n] = \{(n, n-1, \ldots, 1); (n, n-1, \ldots, 3, 1, 2); (n, n-1, \ldots, 4, 2, 1, 3), \ldots, (n-1, n-2, \ldots, 1, n)\}$

Notez bien que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}([X = k]) &= \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

21 Tirages sans remise

a Il y a :

$$\boxed{\binom{N}{n}}$$

poignées de n boules possibles.

b Nous avons :

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]}$$

c L'événement $[Y \geq k]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules tirées ont un numéro supérieur ou égal à k. Il y a $N-k+1$ boules dont le numéro est compris entre k et N, donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N-n+1]\!], \quad \mathbf{P}([Y \geq k]) = \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}}}$$

d Déterminons la loi de Y.

- $\boxed{Y(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]}$
- Nous avons
$$\forall k \in [\![1, N-n]\!], \quad \mathbf{P}([Y \geq k]) = \mathbf{P}([Y > k]) + \mathbf{P}([Y = k])$$
donc :
$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, N-n]\!],\ \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}([Y \geq k]) - \mathbf{P}([Y > k]) \\ &= \mathbf{P}([Y \geq k]) - \mathbf{P}([Y \geq k+1]) \\ &= \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}} - \frac{\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}} \text{ par "TP"} \end{aligned} \tag{11}$$
Enfin pour $k = N-n+1$:
$$\mathbf{P}([Y = k]) = \frac{1}{\binom{N}{n}}$$
et la formule (11) reste encore valable.
En conclusion :
$$\boxed{\forall k \in [\![1, N-n+1]\!], \quad \mathbf{P}([Y = k]) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}}$$

22 Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, loi géométrique sur $\mathbb{N}$

a C'est une question de cours à l'état pur, je vous engage donc à vous y reporter.

b

- Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Notons $\forall k \in \mathbb{N}^*$, B_k (respectivement N_k) l'événement : "obtenir une boule blanche (respectivement une boule noire) lors du $k^{\text{ème}}$ tirage". Alors :
$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k \cap N_{k+1}) \\ &= \left(\frac{b}{b+n}\right)^k \frac{n}{n+b} \end{aligned}$$
On dira que :
$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+b}\right) \text{ soit } Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n}{n+b}\right)}$$
loi géométrique sur $\mathbb{N}$ ou loi du nombre d'échecs qui précèdent le premier succès.
- Il est clair que $X = Y+1$ donc $Y = X-1$ et comme X admet une espérance et une variance, alors Y en admet une aussi avec
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}(X) - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{n}{n+b}} - 1 \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{b}{n}}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y) &= \mathbf{V}(X) \\ &= \frac{\frac{b}{b+n}}{\left(\frac{n}{n+b}\right)^2} \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y) = \frac{(b+n)\,b}{n^2}}$$

23 Loi du plus grand des numéros

- Tout d'abord $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.
- $\forall k \in X(\Omega)$:

$$\mathbf{P}([X \leq k]) = \frac{k^2}{6^2}$$

car

$$[X \leq k] = \left\{(i_1, i_2) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i_1 \leq k,\ i_2 \leq k\right\}$$

et $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

$$\forall k \in [\![1, 6]\!], \quad \mathbf{P}([X \leq k]) = \mathbf{P}([X = k]) + \mathbf{P}([X \leq k-1])$$

(valable aussi pour $k = 1$ car $\mathbf{P}([X \leq 0]) = 0$) donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 6]\!], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{k^2}{6^2} - \frac{(k-1)^2}{6^2} = \frac{2k-1}{36}}$$

24 Loi du plus grand et du plus petit des numéros tirés

a Nous avons

- Tout d'abord $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
- Notons F_Y la fonction de répartition associée à Y, elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} & \text{si} \quad x \in [\![k, k+1[\![\text{ où } k \in [\![2, n-1]\!] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n \end{cases}}$$

- Cherchons l'espérance de Y.

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad \mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([Y \leq k]) - \mathbf{P}([Y \leq k-1])$$

(valable aussi pour $k = 2$ car $\mathbf{P}([Y \leq 1]) = 0$ du fait que $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$) donc

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![2, n]\!],\ \mathbf{P}([Y = k]) &= \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} - \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{\binom{k-1}{1}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2k(k-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{4}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} \\
&= \frac{4}{n(n-1)} \binom{n+1}{3} \text{ par "TPG"} \\
&= \frac{4(n+1)n(n-1)}{6n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{2(n+1)}{3}}$$

b Nous avons :

- $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.
- $\forall k \in X(\Omega), [X \geq k] = \mathcal{P}_2([\![k, n]\!])$ et $\Omega = \mathcal{P}_2([\![1, n]\!])$ ainsi

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \mathbf{P}([X \geq k]) = \frac{\binom{n-k+1}{2}}{\binom{n}{2}}$$

et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad \mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{P}([X \geq k]) - \mathbf{P}([X > k])$$

(cette formule reste valable pour $k = n-1$ puisque $\mathbf{P}([X > n-1]) = 0$ du fait que $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$). Alors :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![1, n-1]\!], \ \mathbf{P}([X = k]) &= \frac{\binom{n-k+1}{2}}{\binom{n}{2}} - \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} \\
&= \frac{\binom{n-k}{1}}{\binom{n}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}}$$

25 Loi de Pascal, loi binomiale négative

a Tout d'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}_r$.

Calculons $\forall i \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = i])$. Pour cela introduisons une variable Y associée au nombre de succès obtenus lors des $i-1$ premiers tirages. Il est clair que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(i-1, p)$. D'autre part introduisons pour $i \in \mathbb{N}^*$, S_i l'événement "obtenir un succès lors du $i^{\text{ème}}$ essai". Ainsi nous avons $[X = i] = [Y = r-1] \cap S_i$ d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X = i]) &= \mathbf{P}([Y = r-1] \cap S_i) \\
&= \mathbf{P}([Y = r-1]) \times \mathbf{P}(S_i) \\
&\quad \text{par } \textit{indépendance des événements} \\
&= \binom{i-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{i-r} p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}_r, \quad \mathbf{P}([X=i]) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}}$$

Remarque hors programme : on dira que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(k,p)$[3]

Pour vérifier la cohérence de ce résultat nous devons introduire *la* **série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x** où $|x|<1$, à savoir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|<1, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

(résultat[4] qui se démontre par récurrence à l'aide de préliminaires guidés).

COMPLÉMENT : calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Les calculs de l'espérance et de la variance sont assez techniques et font appel à la série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x où $|x|<1$[5]. $\boxed{\mho}$ Pour éviter son emploi nous introduirons un vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ de dimension r, constitué de r variables aléatoires indépendantes, défini par X_1 qui est la variable associée au rang d'apparition du premier succès et $\forall i \in [\![2,r]\!]$, X_i est la variable associée au rang d'apparition du $i^{\text{ème}}$ succès sachant que $i-1$ ont déja été obtenus. Nous avons $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$ où $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $X_i \hookrightarrow G(p)$ et par la linéarité de l'espérance que nous démontrerons dans le chapître 7 nous pouvons écrire que :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{E}(X_i) = \frac{r}{p}}$$

Puis par indépendance des variables :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) &= \sum_{i=1}^{r} \mathbf{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{q}{p^2} \\ &= \boxed{\frac{rq}{p^2}} \end{aligned}$$

b

- Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Calculons $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([Y=k])$. Pour cela introduisons une variable Z associée au nombre d'échecs obtenus lors des $k+r-1$ premiers tirages. Il est clair que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k+r-1,p)$. D'autre part introduisons pour $k+r \in \mathbb{N}^*$, S_{k+r} l'événement "obtenir un succès lors du $k+r^{\text{ème}}$ essai". Ainsi nous avons $[Y=k] = [Z=k] \cap S_{k+r}$ d'où

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbf{P}([Y=k]) &= \mathbf{P}([Z=k] \cap S_{k+r}) \\ &= \mathbf{P}([Z=k]) \times \mathbf{P}(S_{k+r}) \ \text{ par } \textit{indépendance des événements} \\ &= \binom{r-1+k}{k} p^{r-1} (1-p)^k p \end{aligned}$$

[3] **Loi de Pascal** de paramètres r et p. C'est la *loi du temps d'attente du* $r^{\text{ème}}$ *succès.* Elle *généralise* la loi géométrique.

[4] Résultat dont le nom est dû à un célèbre résultat d'analyse disant que $(x^n)^{(k)} = \begin{cases} A_n^k x^{n-k} & \text{si } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

[5] $\sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ avec $|x|<1$. Il y a un *moyen mnémotechnique* de s'en rappeler mais absolument PROSCRIT consistant à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|<1$, $\sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k x^{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^{(k)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([Y=k]) = \binom{r-1+k}{k} p^r (1-p)^k}$$

COMPLÉMENT : calculons $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Là encore les calculs de l'espérance et de la variance sont assez techniques et font toujours appel à la *série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x où $|x|<1$*. Pour éviter son emploi nous introduirons un *vecteur aléatoire* $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ *de dimension r*, constitué de r variables aléatoires *indépendantes*, défini par X_1 qui est la variable associée au nombre d'échecs qui précèdent le premier succès et $\forall i \in [\![2, r]\!]$, X_i est la variable associée au nombre d'échecs qui précèdent le $i^{\text{ème}}$ succès sachant que $i-1$ ont déja été obtenus. Nous avons $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$ où $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ et par toujours par la *linéarité de l'espérance* nous pouvons écrire que :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{E}(X_i) = \frac{rq}{p}}$$

Puis par indépendance des variables :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \sum_{i=1}^{r} \mathbf{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{q}{p^2} \\
&= \boxed{\frac{rq}{p^2}}
\end{aligned}$$

26 Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore

- $\mathcal{L}(X)$
  - $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.
  - $\Omega = \mathcal{P}_2([\![1, n]\!])$ et $|\Omega| = \binom{n}{2}$ car les tirages sont caractérisés, par exemple, par l'emplacement des boules blanches puisque toutes les boules sont tirées.

  $$\forall k \in X(\Omega), \quad [X=k] = \left\{(i_1, i_2) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i_1 = k,\ i_2 > k\right\} \Longrightarrow |[X=k]| = 1 \times \binom{n-k}{1} = n-k$$

  Conclusion :

  $$\boxed{\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X=k]) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}}$$

- $\mathcal{L}(Y)$
  - $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
  - Ω reste le même.

  $$\forall k \in Y(\Omega), \quad [Y=k] = \left\{(i_1, i_2) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i_1 < k,\ i_2 = k\right\} \Longrightarrow |[Y=k]| = \binom{k-1}{1} \times 1 = k-1$$

  Conclusion :

  $$\boxed{\forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y=k]) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}}$$

27 Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore

- Tout d'abord $X(\Omega) = [\![x, n-r+x]\!]$.
- $\Omega = \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$ et $|\Omega| = \binom{n}{r}$ car les tirages sont caractérisés, par exemple, par l'emplacement des boules blanches puisque toutes les rouges sont tirées. $\forall k \in X(\Omega)$:

  $$[X=k] = \{(i_1,\dots,i_r) \in [\![1,n]\!]^r \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{x-1} \leq k-1,\ i_x = k,\ k+1 \leq i_{x+1} < \cdots < i_r \leq n\}$$

  et

  $$|[X=k]| = \tbinom{k-1}{x-1} \times 1 \times \tbinom{n-k}{r-x}$$

  Comme les boules sont tirés au hasard, elles sont *équiprobables*, et nous pouvons munir l'univers de la *probabilité uniforme* ce qui nous permet de dire que :

  $$\boxed{\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X=k]) = \frac{\binom{k-1}{x-1}\binom{n-k}{r-x}}{\binom{n}{r}}}$$

28 Tirages simultanés

- Tout d'abord $Y(\Omega) = [\![2, n-1]\!]$.
- $\Omega = \mathcal{P}_3([\![1,n]\!])$ et $|\Omega| = \binom{n}{3}$.

  $$\forall k \in Y(\Omega), \quad [Y=k] = \{\{i_1,i_2,i_3\} \mid 1 \leq i_1 \leq k-1,\ i_2 = k,\ k+1 \leq i_3 \leq n\}$$

  alors

  $$\begin{aligned} |[Y=k]| &= \binom{k-1}{1}\binom{n-k}{1} \\ &= (k-1)(n-k) \end{aligned}$$

  Comme les lots sont tirés au hasard, ils sont *équiprobables*, et nous pouvons munir l'univers de la *probabilité uniforme* ce qui nous permet de dire que :

  $$\boxed{\forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y=k]) = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}} = \frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}}$$

29 Le jeu de Pierre et Marie

a Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\lambda}{n(n+1)} = \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n+1}$$

la série $\sum_n \mathbf{P}([X=n])$ est *télescopique.* Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X=k]) &= \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \lambda \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X=k]) = 1$ donne que :

$$\boxed{\lambda = 1}$$

b.i Notons G_P l'événement "Pierre gagne une partie", alors $G_P = \biguplus_{n\geq 0} [X = 2n+1]$ ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(G_P) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}[(X = 2n+1)] \text{ par } \sigma - \textit{additivité} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k+1} \ \textit{série logarithmique} \text{ (hors programme)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(G_P) = \ln 2}$$

b.ii Nous avons :

$$\boxed{G(\Omega) = 2\mathbb{Z}_-^* \biguplus (2\mathbb{N}+1) = \left\{(-1)^{n-1} n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}}$$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ G(n)\,\mathbf{P}([X = n]) &= \frac{n(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

et nous sommes encore en présence d'une série convergente en tant que *série logarithmique* de paramètre $-1 \in [-1;1[$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} G(n)\,\mathbf{P}([X = n]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^1}{1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} G(n)\,\mathbf{P}([X = n]) = 1 - \ln 2}$$

✠✠✠✠✠