Correction de la fiche 6 bis

La correction comporte 5 pages

1 Séries à termes positifs

Exercice 1
La série double à termes positifs $\sum_{(i,j)} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}}$ converge **si et seulement si** les séries $\sum_{(i,j)} \frac{i}{i!j!2^{i+j}}$ et $\sum_{(i,j)} \frac{j}{i!j!2^{i+j}}$ converg**ent**. Comme i et j jouent clairement des **rôles symétriques**, nous n'étudierons la convergence que de la première série.
Tout d'abord signalons que $\frac{i}{i!j!2^{i+j}}$ est nul pour $i = 0$ par conséquent nous prendrons i dans $\mathbb{N}^*$.

- Pour tout entier j de $\mathbb{N}$, la **série simple** de terme général $\frac{i}{i!j!2^{i+j}} = \frac{1}{j!2^{j+1}} \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ converge par proportionnalité de son terme général avec celui d'une série exponentielle de paramètre $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ et de somme :

$$\begin{aligned} \sum_{i\geq 1} \frac{1}{j!2^{j+1}} \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= \frac{1}{j!2^{j+1}} \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \\ &= \frac{e^{1/2}}{j!2^{j+1}} \end{aligned}$$

- La **série simple** de terme général $\frac{e^{1/2}}{j!2^{j+1}}$ converge aussi, puisque là encore il y a une proportionnalité avec le terme général de la même série exponentielle de paramètre $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ de somme égale à $\frac{1}{2}e$.
Selon le **théorème de Fubini**, la série double $\sum_{(i,j)} \frac{i}{i!j!2^{i+j}}$ converge et par la même occasion, vous savez le problème de symétrie ..., la série double $\sum_{(i,j)} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}}$ converge aussi de somme

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}} &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i}{i!j!2^{i+j}} + \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{j}{i!j!2^{i+j}} \\ &= 2 \times \frac{e}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}} = e}$$

Exercice 2
Un "petit coup" de **Fubini** et cela repart ...

- Pour entier $i \geq 2$, la **série simple** $\sum_{j} \frac{1}{i^j}$ converge en tant série géométrique de raison $\frac{1}{i}$ tel que

$\left|\dfrac{1}{i}\right| < 1$ avec pour somme :

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{i^j} &= \frac{1}{i^2} \times \frac{1}{1-\dfrac{1}{i}} \\ &= \frac{1}{i\,(i-1)} \\ &= \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\end{aligned}$$

- Enfin la **série simple** $\displaystyle\sum_{i\geq 2} \frac{1}{i\,(i-1)}$ converge car pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\,(i-1)} &= \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \text{ par télescopage}\end{aligned}$$

et lorsque l'on fait tendre n vers l'infini :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\,(i-1)} = 1$$

Par le **théorème de Fubini** la série double $\displaystyle\sum_{(i,j)} a_{i,j}$ converge et de somme :

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}_2)^2} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{i^j} = 1}$$

Exercice 3

Notons $(a_{k,n})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ la suite double associée à la série définie par $\forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2$, $a_{k,n} = \dfrac{1}{k!}$. Notons que :

$$\forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2,\quad a_{k,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \dfrac{1}{k!} & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

- $\forall k \geq 0$, la **série simple** $\displaystyle\sum_{n} a_{k,n}$ converge car la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}$ se réduit à la somme d'un **nombre fini** de réels par définition de la suite double avec :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} &= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{k+1}{k!}\end{aligned}$$

- La série de terme simple $\displaystyle\sum_{k} \frac{k+1}{k!}$ converge puisque le terme général s'exprime comme combinaison linéaire de termes généraux de séries exponentielles. En effet pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{k+1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!}$$

Par le **théorème de Fubini** la série double $\displaystyle\sum_{(k,n)} a_{k,n}$ converge et de somme :

$$\begin{aligned}\sum_{(k,n)\in(\mathbb{N})^2} a_{k,n} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{(k,n)\in(\mathbb{N})^2} a_{k,n} = 2e}$$

Exercice 4
Discutons selon les valeurs de n.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Commençons par constater que pour tout couple d'entiers (n,p) tels que $p \neq n$ (où $n \neq 0$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2-p^2} &= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n-p}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{p+n}-\frac{1}{p-n}\right)\end{aligned}$$

Par sommation des égalités sur p allant 0 à N où nous poserons $N > n$ où n est fixé :

$$\begin{aligned}\sum_{p\in[\![0,N]\!]-\{n\}} \frac{1}{n^2-p^2} &= \sum_{p\in[\![0,N]\!]-\{n\}} \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{p+n}-\frac{1}{p-n}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{p\in[\![0,N]\!]-\{n\}}\left(\frac{1}{p+n}-\frac{1}{p-n}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{p\in[\![0,N]\!]-\{n\}}\frac{1}{p+n}-\sum_{p\in[\![0,N]\!]-\{n\}}\frac{1}{p-n}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=n}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{1}{2n}-\sum_{j\in[\![-n,N-n]\!]-\{0\}}\frac{1}{j}\right) \text{ par changement d'indices}\\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=n}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{1}{2n}-\sum_{j\in[\![-n,-1]\!]}\frac{1}{j}-\sum_{j\in[\![1,N-n]\!]}\frac{1}{j}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=n}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{1}{2n}+\sum_{j\in[\![1,n]\!]}\frac{1}{j}-\sum_{j\in[\![1,N-n]\!]}\frac{1}{j}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n+N}\frac{1}{i}\underbrace{-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}-\frac{1}{2n}+\sum_{j\in[\![1,n]\!]}\frac{1}{j}}_{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}}-\sum_{j\in[\![1,N-n]\!]}\frac{1}{j}\Big)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n+N}\frac{1}{i}+\frac{1}{2n}-\sum_{j\in[\![1,N-n]\!]}\frac{1}{j}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{i}+\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

Faisons tendre N vers l'infini, n étant fixé dans $\mathbb{N}^*$:

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{i}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{4n^2}$$

et la série simple $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2}$ est convergente en tant que série proportionnelle à une série de Riemann de paramètre $2 > 1$.
Le **théorème de Fubini** nous permet de dire que la **série double** de terme général $a_{n,p}$ où

$(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ avec $n \neq p$ converge de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}} a_{n,p} &= \sum_{\left\{\substack{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\\ n\neq p}\right.} a_{n,p} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + 0 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

- Pour $n = 0$, nous ne sommes plus en présence d'une série double mais d'une **série simple** de terme général $a_{0,p} = -\dfrac{1}{p^2}$ $(p \geq 1)$ qui converge en tant que série proportionnelle à une série de Riemann de paramètre $2 > 1$ de somme :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_{0,p} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \qquad (2)$$

Selon (1) et (2) la série double converge de somme :

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} a_{n,p} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$$

$$\boxed{\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} a_{n,p} = -\frac{3}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}}$$

2 Série à termes de signe quelconque

Exercice 5
Montrons que la série double de terme général $\dfrac{(i+j)!}{i!j!}\,|x|^{i+j}$ $\left((i,j) \in \mathbb{N}^2\right)$ est convergente.

- Soit $j \in \mathbb{N}$.
  Montrons que la **série simple** $\displaystyle\sum_{i\geq 1} \frac{(i+j)!}{i!j!}\,|x|^{i+j}$ est convergente. Or pour tout entier i nous avons :

$$\frac{(i+j)!}{i!j!}\,|x|^{i+j} = \frac{|x|^j}{j!}\,(i+j)\,(i+j-1)\times\cdots\times(i+1)\,|x|^i$$

en notant que $|x|^i = |x|^{i+j-j}$. Nous reconnaissons donc un terme général, toujours pour j fixé dans $\mathbb{N}$, proprtionnel à celui de la série dérivée d'ordre j de la série géométrique de raison $|x|$ tel que $|x| < 1$. Ainsi la série simple $\displaystyle\sum_{i\geq 1} \frac{(i+j)!}{i!j!}\,|x|^{i+j}$ converge de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(i+j)!}{i!j!}\,|x|^{i+j} &= \frac{|x|^j}{j!}\sum_{i=0}^{+\infty}(i+j)\,(i+j-1)\times\cdots\times(i+1)\,|x|^i \\
&= \frac{|x|^j}{j!}\sum_{i=0}^{+\infty} A_{i+j}^j\,|x|^{(i+j)-j} \\
&= \frac{|x|^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty} A_n^j\,|x|^{n-j} \quad \text{en posant } n = i+j \\
&= \frac{|x|^j}{j!}\,\frac{j!}{(1-|x|)^{j+1}} \\
&= |x|^j\,\frac{1}{(1-|x|)^{j+1}}
\end{aligned}$$

- La **série simple** de terme général $|x|^j \dfrac{1}{(1-|x|)^{j+1}} = \dfrac{1}{1-|x|}\left(\dfrac{|x|}{1-|x|}\right)^j$ est convergente par proportionnalité avec le terme général de la série géométrique de raison $\dfrac{|x|}{1-|x|}$ qui est strictement en valeur absolue inférieure à 1 puisque :

$$\begin{aligned} & \left|\frac{|x|}{1-|x|}\right| < 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{|x|}{1-|x|} < 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & |x| < \frac{1}{2} \text{ ce qui est toujours vrai par hypothèse} \end{aligned}$$

Ainsi d'après le **théorème de Fubini** la **série double** $\displaystyle\sum_{(i,j)} \frac{(i+j)!}{i!j!}|x|^{i+j}$ converge soit que la série $\displaystyle\sum_{(i,j)} \frac{(i+j)!}{i!j!}x^{i+j}$ converge absolument de somme égale à :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{(i+j)!}{i!j!}x^{i+j} &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(i+j)!}{i!j!}x^{i+j} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^j \\ &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^j \\ &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-\dfrac{x}{1-x}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{(i+j)!}{i!j!}x^{i+j} = \frac{1}{1-2x}}$$

Remarque : nous aurions pu utiliser la partition de type **III** pour retrouver le résultat, comme fait en cours, avec $\mathbb{N}^2 = \biguplus_{n=0}^{+\infty} A_n$ où $A_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i+j=n\}$.

✠✠✠✠✠