

Correction de la fiche 6

La correction comporte 34 pages

1 Loi conjointe, lois marginales, indépendance

a Nous avons :

$$(U, V)(\Omega) = \{(u, v) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2 \mid u < v\}$$

Et :

$$\forall (u, v) \in (U, V)(\Omega), \quad \mathbf{P}([U = u] \cap [V = v]) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

Explications :

- L'univers Ω est l'ensemble des *lots* de 2 jetons pris parmi 4.
- Chaque couple favorable est *unique*, car dans chaque lot les deux numéros sont forcément différents, ce qui donne l'unicité du min et du max du couple.

Cohérence :

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v) \in (U,V)(\Omega)} \mathbf{P}([U = u] \cap [V = v]) &= \sum_{(u,v) \in (U,V)(\Omega)} \frac{1}{\binom{4}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $(U, V)(\Omega)$ est l'ensemble des suites finies de deux entiers strictement croissantes, et à valeurs dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ (voir le poster des suites).

b Etablissons le tableau à deux entrées, permettant de donner la loi du couple, ainsi que les lois marginales :

$\begin{array}{c} V \rightarrow \\ U \downarrow \end{array}$	2	3	4	$\mathcal{L}(U) \downarrow$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathcal{L}(V) \rightarrow$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

c La présence de zéros dans le coeur du tableau doit de toute urgence vous inciter à "foncer" dessus pour introduire un contre-exemple ravageur !

En effet, comme $\mathbf{P}([U = 2] \cap [V = 2]) = 0$ alors que $\mathbf{P}([U = 2]) \times \mathbf{P}([V = 2]) \neq 0$, cet exemple nous montre clairement que :

U et V sont dépendantes

2 Loi conjointe, indépendance

a Nous avons :

$$(X, Y)(\Omega) = \{(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid j \leq i\}$$

Comme $\forall i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $\mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{6} \neq 0$ selon la *formule des probabilités composées* :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in (X, Y)(\Omega), \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbf{P}([X = i]) \times \mathbf{P}_{[X=i]}([Y = j]) \\ &= \frac{1}{6} \times \binom{i}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{i-j} \end{aligned}$$

donc :

$$\forall (i, j) \in (X, Y)(\Omega), \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \binom{i}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-j}$$

b Comme $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 6]) = 0$ alors que :

$$\mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 6]) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 \neq 0$$

cela nous fait conclure que :

X et Y sont dépendantes

3 Loi d'une somme

a Comme Pierre et Paul effectuent tous deux une suite finie de n *épreuves de Bernoulli* indépendantes et de même paramètre p , alors :

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(n, p)$$

b Cette question est purement culturelle ! En effet tout bon préparateur digne de la Saint-Jean Academy sait parfaitement que :

$$\mathcal{B}(n_1, p) \boxplus \mathcal{B}(n_2, p) = \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

c'est ce que l'on appelle *la stabilité de la loi binomiale pour la somme de deux variables indépendantes*.

Appliqué à l'exercice, cela donne, comme X et Y suivent toutes deux la loi $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{B}(2n, p)$$

4 Egalité de deux variables

Soient X et Y deux variables indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = Y]) &= \mathbf{P}\left([X = Y] \cap \left(\bigoplus_{k=1}^{+\infty} [Y = k]\right)\right) \\ &\text{puisque } ([Y = k])_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est un système complet d'événements} \\ &= \mathbf{P}\left(\bigoplus_{k=1}^{+\infty} ([X = k] \cap [Y = k])\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) \times \mathbf{P}([Y = k]) \\
&\quad \text{par } \sigma\text{-additivité et } \textit{indépendance} \text{ des variables} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{P}([X = k]))^2 \\
&\quad \text{comme } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^2 \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= \frac{p^2}{1 - q^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathbf{P}([X = Y]) = \frac{p}{1 + q}$$

5 Antirépartition du min d'un couple géométrique

- Dans tout l'exercice nous poserons $q = 1 - p$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([U > k]) &= \mathbf{P}([X > k] \cap [Y > k]) \\
&= \mathbf{P}([X > k]) \times \mathbf{P}([Y > k]) \\
&\quad \text{par } \textit{indépendance} \text{ des VAR} \\
&= (\mathbf{P}([X > k]))^2 \\
&\quad \text{car } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \\
&= (q^k)^2
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathbf{P}([U > k]) = (q^2)^k$$

- **Loi de U .**

Nous avons : $U(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([U \geq k]) &= \mathbf{P}([U > k]) + \mathbf{P}([U = k]) \\
&= \mathbf{P}([U \geq k]) - \mathbf{P}([U > k]) \\
&= \mathbf{P}([U > k - 1]) - \mathbf{P}([U > k])
\end{aligned}$$

la formule reste valable pour $k = 0$ car :

$$\mathbf{P}([U = 0]) = \mathbf{P}([U > -1]) - \mathbf{P}([U > 0]) = 1 - 1 = 0$$

ce qui est cohérent puisque $U(\Omega) = \mathbf{N}^*$. Ainsi tout cela entraîne que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([U = k]) = (q^2)^{k-1} - (q^2)^k$$

donc :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([U = k]) = (q^2)^{k-1} (1 - q^2)$$

Conclusion :

$$U \leftrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2)$$

- D'après le cours :

$$\mathbf{E}(U) = \frac{1}{1 - q^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(U) = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2} = \frac{q^2}{p^2(1 + q)^2}$$

6 Somme de variables de Poisson indépendantes

Tout d'abord comme X, Y, Z sont trois variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ, μ, v et que :

$$\mathcal{P}(\lambda_1) \boxplus \mathcal{P}(\lambda_2) = \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

alors :

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu) \implies (X + Y) + Z \hookrightarrow \mathcal{P}((\lambda + \mu) + v)$$

Conclusion :

$$(X + Y + Z) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu + v)$$

Comme $\forall (i, j, k) \in \mathbf{N}^3$, $\mathbf{P}([X + Y + Z = i + j + k]) \neq 0$ en appliquant la *formule de Bayes* :

$$\begin{aligned} & \forall (i, j, k) \in \mathbf{N}^3, \mathbf{P}_{[X+Y+Z=i+j+k]}([X=i] \cap [Y=j] \cap [Z=k]) \\ = & \frac{\mathbf{P}_{([X=i] \cap [Y=j] \cap [Z=k])}([X+Y+Z=i+j+k]) \times \mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j] \cap [Z=k])}{\mathbf{P}([X+Y+Z=i+j+k])} \\ = & \frac{1 \times \mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j] \cap [Z=k])}{\mathbf{P}([X+Y+Z=i+j+k])} \\ = & \frac{\mathbf{P}([X=i]) \times \mathbf{P}([Y=j]) \times \mathbf{P}([Z=k])}{\mathbf{P}([X+Y+Z=i+j+k])} \\ & \text{par indépendance des VAR } X, Y \text{ et } Z \\ = & \frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\right) \left(\frac{e^{-\mu}\mu^j}{j!}\right) \left(\frac{e^{-v}v^k}{k!}\right)}{e^{-(\lambda+\mu+v)} (\lambda + \mu + v)^{i+j+k}} \\ & (i + j + k)! \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall (i, j, k) \in \mathbf{N}^3, \mathbf{P}_{[X+Y+Z=i+j+k]}([X=i] \cap [Y=j] \cap [Z=k]) = \frac{\lambda^i \mu^j v^k (i + j + k)!}{i!j!k! (\lambda + \mu + v)^{i+j+k}}$$

7 Loi d'une somme et variables indépendantes

Tout d'abord comme X et Y sont indépendantes avec $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$, alors :

$$S = X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + p)$$

Cherchons la loi conditionnelle de X sachant que $[S = s]$, $s \in \mathbf{N}$ fixé.

Comme $\forall s \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}([S = s]) \neq 0$, par *définition d'une probabilité conditionnelle*

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, s \rrbracket, \mathbf{P}_{[S=s]}([X=i]) &= \frac{\mathbf{P}([X=i] \cap [S=s])}{\mathbf{P}([S=s])} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X=i] \cap [Y=s-i])}{\mathbf{P}([S=s])} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X=i]) \times \mathbf{P}([Y=s-i])}{\mathbf{P}([S=s])} \\ & \text{par indépendance des VAR } X \text{ et } Y \\ &= \frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\right) \left(\frac{e^{-p}p^{s-i}}{(s-i)!}\right)}{\left(\frac{e^{-(\lambda+p)}(\lambda+p)^s}{s!}\right)} \\ & \text{et comme } (\lambda + p)^s = (\lambda + p)^i (\lambda + p)^{s-i} \\ &= \binom{s}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + p}\right)^i \left(\frac{p}{\lambda + p}\right)^{s-i} \end{aligned}$$

Conclusion :

La loi conditionnelle de X sachant que $[S = s]$ est $\mathcal{B}\left(s, \frac{\lambda}{\lambda + p}\right)$

8 Inégalité probabiliste

Il suffit de remarquer que :

$$\mathbf{P}(|X - Y| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\left[(X - Y)^2 \geq \varepsilon^2\right]\right)$$

(puisque l'application $x \mapsto x^2$ est une bijection croissante sur \mathbf{R}_+) et d'appliquer l'**inégalité de Markov** à la variable $(X - Y)^2$. Au passage n'oubliez pas de justifier l'existence de l'espérance de en disant que :

$$(|X| - |Y|)^2 = |X|^2 + |Y|^2 - 2|X||Y| \geq 0$$

ce qui entraîne que :

$$|XY| \leq \frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X^2 + Y^2$$

et le théorème de comparaison par majoration fait le reste !

9 Loi d'un couple, covariance

a Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-b, -a, a, b\})$ et que $Y = X^2$ alors :

$$Y(\Omega) = \{a^2, b^2\}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = a^2]) &= \mathbf{P}([X = -a] \uplus [X = a]) \\ &= \mathbf{P}([X = -a]) + \mathbf{P}([X = a]) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = b^2]) &= \mathbf{P}([X = -b] \uplus [X = b]) \\ &= \mathbf{P}([X = -b]) + \mathbf{P}([X = b]) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\{a^2, b^2\})$$

b La dépendance des deux variables X et Y va être très vite réglée. En effet par exemple $\mathbf{P}([X = -b] \uplus [Y = a^2]) = 0$ alors que $\mathbf{P}([X = -b]) \times \mathbf{P}([Y = a^2]) = \frac{1}{8} \neq 0$.

Puisque X est *uniforme centrée sur 0 son espérance est nulle* et d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(XY) &= \mathbf{E}(X^3) \\ &= -\frac{b^3}{4} - \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{4} + \frac{b^3}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Enfin comme par théorème :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

alors :

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = 0}$$

Nota bene : voici encore un contre-exemple montrons que la *réciproque* du théorème

$$(X, Y) \text{ indépendantes} \implies \text{Cov}(X, Y) = 0$$

est *fausse*.

10 Coefficient de corrélation

Comme l'urne contient peu de numéros, nous pouvons effectuer tous les calculs "à la main".

Il y a quatre lots de jetons possibles qui sont :

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\} \\ &\{1, 2, 4\} \\ &\{1, 3, 4\} \\ &\{2, 3, 4\} \end{aligned}$$

et le tableau à deux entrées U et V est :

$\begin{array}{c} V \rightarrow \\ U \downarrow \end{array}$	3	4	$\mathcal{L}(U) \downarrow$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathcal{L}(V) \rightarrow$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

De ceci nous tirons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U) &= \frac{5}{4} \\ \mathbf{E}(V) &= \frac{15}{4} \\ \mathbf{V}(U) &= \frac{3}{16} \iff \sigma(U) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \mathbf{V}(V) &= \frac{3}{16} \iff \sigma(V) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \mathbf{E}(UV) &= \left(3 \times \frac{1}{4}\right) + \left(4 \times \frac{2}{4}\right) + \left(8 \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{19}{4} \\ \text{Cov}(U, V) &= \mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V) \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\rho(U, V) = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sigma(U)\sigma(V)} = \frac{1}{3}}$$

11 Loi conjointe, lois marginales, indépendance

a Nous avons :

- Loi du couple (X, Y) .

$$\begin{aligned} (X, Y)(\Omega) &= X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ &= \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \end{aligned}$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2, \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{36}$$

- **Loi de X.**

On rappelle que $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Par théorème :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbf{P}([X = i]) &= \sum_{j=1}^6 \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^6 \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$$

- **Loi de Y.**

Par *symétrie* des rôles joués par les variables X et Y :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2, p_{ij} &= \frac{1}{36} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= p_{i\bullet} \times p_{\bullet j} \end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

b

- Loi du couple (X, U) .

$$(X, U)(\Omega) = \{(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid i \geq j\}$$

Il y a une discussion à mener :

– Si $i = j$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = i] \cap [U = i]) &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y \geq i]) \\ &= \mathbf{P}([X = i]) \times \mathbf{P}([Y \geq i]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des variables} \\ &= \mathbf{P}([X = i]) \times \sum_{k=i}^6 \mathbf{P}([Y = k]) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{6 - i + 1}{6} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([X = i] \cap [U = i]) = \frac{7 - i}{36}$$

– Si $i > j$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = i] \cap [U = j]) &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \mathbf{P}([X = i]) \times \mathbf{P}([Y = j]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des variables} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Si } i > j, \mathbf{P}([X = i] \cap [U = j]) = \frac{1}{36}$$

- **Loi de U .**

Nous avons $U(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Par théorème :

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbf{P}([U = j]) &= \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}([X = i] \cap [U = j]) \\
 &= \sum_{i=1}^{j-1} p_{ij} + p_{jj} + \sum_{i=j+1}^6 p_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^{j-1} 0 + \frac{7-j}{36} + \sum_{i=j+1}^6 \frac{1}{36} \\
 &= \frac{7-j}{36} + \frac{6-(j+1)+1}{36} \\
 &= \frac{7-j+6-j}{36}
 \end{aligned}$$

Après simplification :

$$\forall j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbf{P}([U = j]) = \frac{13-2j}{36}$$

- **Indépendance de X et U .**

Comme $\mathbf{P}([X = 1] \cap [U = 2]) = 0$ tandis que $\mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([U = 2]) \neq 0$:

Les variables X et U sont dépendantes

12 Variable fonction d'autres

Tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbf{N}$ (voir si ce n'est pas mieux d'écrire inclus dans \mathbf{N} vu que l'on a pas plus de précisions sur les valeurs de Y , en effet si ça se trouve $Y(\Omega) = \mathbf{N}_3$ et dans ce cas la différence $X - Y$ n'atteint pas la valeur 1 !... à suivre dans la correction) car Z prend la valeur 0 quand $X \leq Y$ et toute valeur entière non nulle dès que $X > Y$ sachant que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et que $Y(\Omega) \subset \mathbf{N}$.

Introduisons un *système complet d'événements de probabilités a priori non nulles* ($[X > Y]$, $[X \leq Y]$). Alors :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in Z(\Omega) \quad ([Z = k]) &= ([Z = k] \cap [X > Y]) \uplus ([Z = k] \cap [X \leq Y]) \\
 &= ([X - Y = k] \cap [X > Y]) \uplus ([0 = k] \cap [X \leq Y])
 \end{aligned}$$

Or si $k = 0$ alors $([X - Y = k] \cap [X > Y]) = \emptyset$ et si $k \in \mathbf{N}^*$, $([0 = k] \cap [X \leq Y]) = \emptyset$. Ces deux cas engendrent donc une discussion :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Z = 0]) &= \mathbf{P}([Z = 0] \cap [X \leq Y]) \\
 &= \mathbf{P}([X \leq Y]) \times \mathbf{P}_{[X \leq Y]}([Z = 0]) \\
 &\quad \text{selon la formule des probabilités totales} \\
 &= \mathbf{P}([X \leq Y]) \times 1 \\
 &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{\{(i,j) \in \mathbf{N}^* \times Y(\Omega) \mid i \leq j\}} ([X = i] \cap [Y = j])\right) \\
 &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{j \in (\mathbf{N}^* \cap Y(\Omega))} ([X \leq j] \cap [Y = j])\right) \\
 &= \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X \leq j]) \times \mathbf{P}([Y = j]) \\
 &\quad \text{par indépendance des deux VAR} \\
 &= \sum_{j \in Y(\Omega)} (1 - \mathbf{P}([X > j])) \times \mathbf{P}([Y = j])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in Y(\Omega)} \left(1 - (1-a)^j\right) \times \mathbf{P}([Y = j]) \\
&= 1 - \mathbf{E}\left((1-a)^Y\right) \text{ par le théorème de transfert}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}([Z = 0]) = 1 - \alpha}$$

Nota bene : si $Y(\Omega) \subset \mathbf{N}^*$ alors $(\mathbf{N}^* \cap Y(\Omega)) = Y(\Omega)$.

Maintenant si $Y(\Omega) = \mathbf{N}$ alors $(\mathbf{N}^* \cap Y(\Omega)) = \mathbf{N}^*$. Mais comme $[X \leq 0] = \emptyset$ du fait que la variable X suit une loi géométrique, nous pourrions toujours considérer que $(\mathbf{N}^* \cap Y(\Omega)) = Y(\Omega)$ encore une fois.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([Z = k]) &= \mathbf{P}([Z = k] \cap [X > Y]) \\
&= \mathbf{P}([X - Y = k] \cap [X > Y]) \\
&= \mathbf{P}([X - Y = k]) \\
&\quad \text{car } [X - Y = k] \subset [X > Y] \\
&= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{j|j \in Y(\Omega) \text{ et } k+j \in X(\Omega)} ([X = k+j] \cap [Y = j])\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{j \in Y(\Omega)} ([X = k+j] \cap [Y = j])\right) \\
&= \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X = k+j]) \mathbf{P}([Y = j]) \\
&\quad \text{par } \sigma\text{-add. et indépendance des deux VAR} \\
&= \sum_{j \in Y(\Omega)} a(1-a)^{k+j-1} \mathbf{P}([Y = j]) \\
&= (1-a)^{k-1} a \sum_{j \in Y(\Omega)} (1-a)^j \mathbf{P}([Y = j]) \\
&= a(1-a)^{k-1} \mathbf{E}\left((1-a)^Y\right) \text{ par le théorème de transfert}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([Z = k]) = a(1-a)^{k-1} \alpha}$$

13 Variable fonction d'autres

a Tout d'abord il est évident que $Z(\Omega) = \mathbf{N}$.

Introduisons un système complet d'événements de probabilités $([X = 0], [X = 1])$. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall k \in Z(\Omega), [Z = k] &= ([Z = k] \cap [X = 0]) \bigsqcup ([Z = k] \cap [X = 1]) \\
&= ([0 = k] \cap [X = 0]) \bigsqcup ([Y = k] \cap [X = 1])
\end{aligned}$$

Or si $k = 0$ alors $([0 = k] \cap [X = 0]) = [X = 0]$ et si $k \neq 0$, $([0 = k] \cap [X = 0]) = \emptyset$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z = 0]) &= \mathbf{P}([X = 0]) + \mathbf{P}([Y = 0] \cap [X = 1]) \\
&= \mathbf{P}([X = 0]) + \mathbf{P}([Y = 0]) \times \mathbf{P}([X = 1]) \text{ par indépendance des deux VAR}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{P}([Z = 0]) = 1 - p + e^{-\lambda} p = p(e^{-\lambda} - 1) + 1}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Z = k]) &= \mathbf{P}([Y = k] \cap [X = 1]) \\ &= \mathbf{P}([Y = k]) \times \mathbf{P}([X = 1]) \\ &\text{par indépendance des deux VAR} \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([Z = k]) = \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

b

- Calculons $\mathbf{E}(Z)$ en cas d'existence :

$$\begin{aligned} Z \text{ admet une espérance} &\iff \sum_{k \geq 1} k \mathbf{P}([Z = k]) \text{ est convergente} \\ &\iff \sum_{k \geq 1} k \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Or :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda pe^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

et nous reconnaissons le terme général d'une série convergente en tant que série proportionnelle à une *série exponentielle*. Ainsi Z admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda pe^{-\lambda} e^\lambda \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \lambda p}$$

- Calculons $\mathbf{V}(Z)$ en cas d'existence :

Z admet une variance $\iff Z(Z-1)$ admet une espérance

et :

$$\begin{aligned} Z(Z-1) \text{ admet une espérance} &\iff \sum_{k \geq 1} k(k-1) \mathbf{P}([Z = k]) \text{ est convergente} \\ &\iff \sum_{k \geq 1} k(k-1) \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ est convergente} \\ &\iff \sum_{k \geq 2} k(k-1) \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbf{E}(Z(Z-1)) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Or :

$$\forall k \in \mathbb{N}_2, \quad k(k-1) \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda^2 pe^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

et nous reconnaissons le terme général d'une série convergente en tant que série proportionnelle à une *série exponentielle*. Ainsi $Z(Z-1)$ admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(Z(Z-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
 &= \lambda^2 pe^{-\lambda} e^\lambda \\
 &= \lambda^2 p
 \end{aligned}$$

Moralité Z admet une variance qui vaut :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(Z) &= \mathbf{E}(Z(Z-1)) + \mathbf{E}(Z) - (\mathbf{E}(Z))^2 \\
 &= \lambda^2 p + \lambda p - (\lambda p)^2 \\
 &= \lambda^2 p(1-p) + \lambda p
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(Z) = \lambda p(1 + \lambda(1-p))}$$

c Comme $\mathbf{P}([Z=0]) \neq 0$, par définition :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{[Z=0]}([X=1]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1] \cap [Z=0])}{\mathbf{P}([Z=0])} \\
 &= \frac{\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=0])}{\mathbf{P}([Z=0])} \\
 &= \frac{\mathbf{P}([X=1]) \times \mathbf{P}([Y=0])}{\mathbf{P}([Z=0])} \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{P}_{[Z=0]}([X=1]) = \frac{pe^{-\lambda}}{p(e^{-\lambda}-1)+1}}$$

14 Loi d'un vecteur, lois marginales, loi d'une somme, loi d'un produit

a Déterminons $\mathcal{L}(U, V, W)$.

Tout d'abord $(U, V, W)(\Omega) = \{(u, v, w) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \mid u < v < w\}$. Et, clairement :

$$\forall (u, v, w) \in (U, V, W)(\Omega), \quad \mathbf{P}([U=u] \cap [V=v] \cap [W=w]) = \frac{1}{\binom{n}{3}}$$

Explications :

♣ L'univers Ω est l'ensemble des *lots* de 3 jetons pris parmi n .
 ♣ Chaque triplet favorable est *unique*, car dans chaque lot les trois numéros sont forcément différents, ce qui donne l'unicité du min du max et du terme moyen du triplet.

• Loi de U .

Tout d'abord $U(\Omega) = \llbracket 1, n-2 \rrbracket$.

Par théorème :

$$\begin{aligned}
 \forall u \in U(\Omega), \quad \mathbf{P}([U=u]) &= \sum_{u+1 \leq v < w \leq n} \mathbf{P}([U=u] \cap [V=v] \cap [W=w]) \\
 &= \sum_{u+1 \leq v < w \leq n} \frac{1}{\binom{n}{3}} \\
 &= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{u+1 \leq v < w \leq n} 1
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\binom{n-(u+1)+1}{2}}{\binom{n}{3}}$$

$$\forall u \in U(\Omega), \quad \mathbf{P}([U = u]) = \frac{\binom{n-u}{2}}{\binom{n}{3}}$$

• **Loi de V.**

Tout d'abord $V(\Omega) = \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

Par théorème :

$$\begin{aligned} \forall v \in V(\Omega), \quad \mathbf{P}([V = v]) &= \sum_{\{(u,w) | 1 \leq u \leq v-1, v+1 \leq w \leq n\}} \mathbf{P}([U = u] \cap [V = v] \cap [W = w]) \\ &= \sum_{\{(u,w) | 1 \leq u \leq v-1, v+1 \leq w \leq n\}} \frac{1}{\binom{n}{3}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{\{(u,w) | 1 \leq u \leq v-1, v+1 \leq w \leq n\}} 1 \\ &= \frac{\binom{v-1}{1} \times \binom{n-(v+1)+1}{1}}{\binom{n}{3}} \end{aligned}$$

$$\forall v \in V(\Omega), \quad \mathbf{P}([V = v]) = \frac{(v-1)(n-v)}{\binom{n}{3}}$$

Explications :

- $\binom{v-1}{1}$ désigne le nombre de choix de u appartenant à l'intervalle $\llbracket 1, v-1 \rrbracket$.
- $\binom{n-(v+1)+1}{1}$ désigne le nombre de choix de w appartenant à l'intervalle $\llbracket v+1, n \rrbracket$ sans oublier, pour relier le tout, le *lemme des bergers*.

• **Loi de W.**

Tout d'abord $W(\Omega) = \llbracket 3, n \rrbracket$.

Par théorème :

$$\begin{aligned} \forall w \in W(\Omega), \quad \mathbf{P}([W = w]) &= \sum_{1 \leq u < v \leq w-1} \mathbf{P}([U = u] \cap [V = v] \cap [W = w]) \\ &= \sum_{1 \leq u < v \leq w-1} \frac{1}{\binom{n}{3}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{1 \leq u < v \leq w-1} 1 \end{aligned}$$

$$\forall w \in W(\Omega) \quad \mathbf{P}([W = w]) = \frac{\binom{w-1}{2}}{\binom{n}{3}}$$

b

Pour nous fixer les idées, établissons un tableau des différents triplets possibles associés aux différentes sommes et produits générés.

Triplet	S	T
(1, 2, 3)	6	6
(1, 2, 4)	7	8
(1, 2, 5)	8	10
(1, 3, 4)	8	12
(1, 3, 5)	9	15
(1, 4, 5)	10	20
(2, 3, 4)	9	24
(2, 3, 5)	10	30
(2, 4, 5)	11	40
(3, 4, 5)	12	60

Nous avons donc :

s	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S = s])$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

et :

t	6	8	10	12	15	20	24	30	40	60
$\mathbf{P}([T = t])$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

15 Loi conditionnelle et loi inconditionnelle : relativisation

Tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbf{N}$. Introduisons un *système complet d'événements* $([X = i])_{i \in \mathbf{N}}$, afin d'utiliser la *formule des probabilités totales* de manière à **relativiser** le nombre de voitures se présentant au guichet 1 par rapport au nombre total de véhicules traversant le péage durant une journée, sachant qu'il ne peut y avoir plus de voitures au guichet 1 que de voitures traversant le péage.

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([Z = k]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{[X=i]}([Z = k]) \times \mathbf{P}([X = i]) \\
 &= 0 + \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbf{P}_{[X=i]}([Z = k]) \times \mathbf{P}([X = i]) \\
 &= \sum_{i=k}^{+\infty} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(\frac{11}{12}\right)^{i-k} \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\
 &\quad \text{avec } \lambda^i = \lambda^{i-k} \lambda^k \\
 &= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i!}{k!(i-k)!} \left(\frac{\lambda}{12}\right)^k \left(\frac{11\lambda}{12}\right)^{i-k} \frac{e^{-\lambda}}{i!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{12}\right)^k \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{(i-k)!} \left(\frac{11\lambda}{12}\right)^{i-k} \\
 &\quad \text{posons } j = i - k \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{12}\right)^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{11\lambda}{12}\right)^j}{j!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{12}\right)^k \exp\left(\frac{11\lambda}{12}\right) \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{12}\lambda} \left(\frac{\lambda}{12}\right)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$Z \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{12}\right)$$

16 Loi conditionnelle et loi de Poisson

a Introduisons un *système complet d'événements* $([X = k])_{k \in \mathbf{N}}$ de probabilités non nulles, alors selon la *formule des probabilités totales* :

$$\mathbf{P}([Y = 0]) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}_{[X=k]}([Y = 0]) \times \mathbf{P}([X = k])$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-k} k^0}{0!} \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda e^{-1})^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{-1})
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathbf{P}([Y = 0]) = \exp(\lambda(e^{-1} - 1))$$

b Déterminons, pour commencer, la loi de Y .

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbf{N}$.

Toujours d'après la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([Y = i]) &= \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}_{[X=k]}([Y = i]) \times \mathbf{P}([X = k]) \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-k} k^i}{i!} \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda e^{-1})^k k^i}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y \text{ admet une espérance} &\iff \sum_i i \mathbf{P}([Y = i]) \text{ est convergente} \\
&\iff \sum_{(i,k)} \frac{i (\lambda e^{-1})^k k^i e^{-\lambda}}{k! i!}, \text{ est une série double à termes positifs cv}^{\text{te}}
\end{aligned}$$

En cas de convergence :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i (\lambda e^{-1})^k k^i e^{-\lambda}}{k! i!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i (\lambda e^{-1})^k k^i e^{-\lambda}}{k! i!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{-1})^k k^i e^{-\lambda}}{k! (i-1)!} \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{-1})^k k^{i-1} e^{-\lambda}}{(k-1)! (i-1)!}
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i \geq 1} \frac{(\lambda e^{-1})^k k^{i-1} e^{-\lambda}}{(k-1)! (i-1)!}$ converge en tant que série proportionnelle à la *série exponentielle* de paramètre k de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \geq 1} \frac{(\lambda e^{-1})^k k^{i-1} e^{-\lambda}}{(k-1)! (i-1)!} &= \frac{(\lambda e^{-1})^k e^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

Enfin la série $\sum_{k \geq 1} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ converge en tant que série proportionnelle à la série exponentielle de paramètre λ et de somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini la série double $\sum_{(k,i)} \frac{(\lambda e^{-1})^k k^i e^{-\lambda}}{k!(i-1)!}$ avec $(k,i) \in (\mathbb{N}^*)^2$ converge, ainsi Y admet une espérance qui vaut :

$$\mathbf{E}(Y) = \lambda$$

17 Espérance totale

a Introduisons la suite à deux indices $(S_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ définie par $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, S_{m,n} = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n a_{k,j}$.

Par inversion de l'ordre de sommation $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, S_{m,n} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_{k,j}$ or $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m a_{k,j}$

existe et est finie égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ puisque d'après l'énoncé $\sum_k a_{k,j}$ converge $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} S_{m,n} &= \sum_{j=0}^n \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m a_{k,j} \right) \\ &\text{selon l'algèbre des limites} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j} \end{aligned}$$

La limite de $S_{m,n}$ quand m tend vers l'infini, existe et est finie et vaut :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$$

b Comme S est une variable discrète finie, par définition $\mathbf{E}(S) = \sum_{j=0}^n j \mathbf{P}([S=j])$ et selon la *formule des probabilités totales* en utilisant la famille $([X=k])_{k \in \mathbb{N}}$ comme *système complet d'événements de probabilités à priori non nulles* :

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{j=0}^n j \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{[X=k]}([S=j]) \mathbf{P}([X=k])}_{\text{joue le rôle de } \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k,j} \text{ qui cv } \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \in \mathbb{N} \text{ et de somme } \mathbf{P}([S=j])}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n j \mathbf{P}([S = j] / [X = k]) \mathbf{P}([X = k]) \\ &\quad \text{par inversion des sommes selon 1.} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) \left(\sum_{j=0}^n j \mathbf{P}_{[X=k]}([S = j]) \right) \end{aligned}$$

Par définition de $\mathbf{E}_{[X=k]}(S)$:

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) \mathbf{E}_{[X=k]}(S)$$

18 Espérance conditionnelle

a.i

Par le calcul, on trouve :

$X \setminus Y$	1	2	3	4	$\mathcal{L}(X) \downarrow$
1	0.08	0.04	0.16	0.12	0.4
2	0.04	0.02	0.08	0.06	0.2
3	0.08	0.04	0.16	0.12	0.4
$\mathcal{L}(Y) \rightarrow$	0.2	0.1	0.4	0.3	1

a.ii

Nous constatons que :

$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad p_{i,j} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$$

On en déduit que :

Les variables X et Y sont indépendantes

a.iii

Il résulte de l'indépendance que :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

b.i

Les variables étant indépendantes,

La loi de X sachant que $Y = 2$ est la loi marg^{le} de X et la loi de Y sachant que $X \in \{1, 3\}$ est la loi marg^{le} de Y

b.ii

Etant donné que X et Y sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y | X) &= \mathbf{E}(Y) \\ &= (1 \times 0.2) + (2 \times 0.1) + (3 \times 0.4) + (4 \times 0.3) \\ &= 2.8 \end{aligned}$$

La variable aléatoire $\mathbf{E}(Y | X)$ est la variable certaine égale à 2.8

b.iii

Il résulte de la question précédente que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y | X)) = \mathbf{E}(Y) = 2.8$$

19 Espérance conditionnelle

a.i

$X \setminus Y$	1	2	3	4	$\mathcal{L}(X) \downarrow$
1	0	0	0	0.3	0.3
2	0.2	0	0	0	0.2
3	0	0	0.1	0	0.1
4	0.3	0.1	0	0	0.4
$\mathcal{L}(Y) \rightarrow$	0.5	0.1	0.1	0.3	1

a.ii

Nous avons $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0 \neq \mathbf{P}([X = 1]) \mathbf{P}([Y = 1])$.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes

b.i

Par théorème nous avons $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ qui existe puisque toutes les variables en jeu sont finies. D'après les lois marginales de X et Y nous avons après calculs élémentaires :

$$\mathbf{E}(X) = 2.6$$

$$\mathbf{E}(Y) = 2.2$$

et en utilisant le tableau de contingence de la loi conjointe du couple (X, Y) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(XY) &= (4 \times 0.3) + (2 \times 0.2) + (9 \times 0.1) + (4 \times 0.3) + (8 \times 0.1) \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Cov}(X, Y) = 4.5 - 2.6 \times 2.2$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -1.22$$

b.ii

Pour la loi de X sachant que $Y = 2$, on a $\mathbf{P}_{[Y=2]}([X = 4]) = 1$ et $\mathbf{P}_{[Y=2]}([X = k]) = 0$ si $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. En remarquant que :

$$\mathbf{P}_{[X \in \{1,4\}]}([Y = k]) = \frac{\mathbf{P}([Y = k] \cap [X = 1]) + \mathbf{P}([Y = k] \cap [X = 3])}{\mathbf{P}([X \in \{1,4\}])}$$

On obtient la loi de Y sachant que $X \in \{1, 4\}$:

y	1	2	3	4
$\mathbf{P}_{[X \in \{1,4\}]}([Y = k])$	3/7	1/7	0	3/7

b.iii

Nous avons :

$$\mathbf{E}_{[Y=1]}(X) = (2 \times 0.4) + (4 \times 0.6) = 3.2$$

$$\mathbf{E}_{[Y=2]}(X) = 4$$

$$\mathbf{E}_{[Y=3]}(X) = 3$$

$$\mathbf{E}_{[Y=4]}(X) = 1$$

D'après la définition de $\mathbf{E}(X | Y)$, il résulte que :

$\mathbf{E}(X Y) = x$	1	3	3.2	4
$\mathbf{P}(\mathbf{E}(X Y) = x)$	0.3	0.1	0.5	0.1

car :

$$\mathbf{P}([Y = 4]) = 0.3 \quad \mathbf{P}([Y = 3]) = 0.1 \quad \mathbf{P}([Y = 1]) = 0.5 \quad \mathbf{P}([Y = 2]) = 0.1$$

Explications : nous avons vu d'après le cours que $\mathbf{E}(X | Y) = \varphi(Y)$ où :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \varphi(y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x])$$

et l'on fait "tourner" les valeurs de y appartenant à $Y(\Omega)$. Ainsi $\mathbf{E}(X | [Y = 1])$, $\mathbf{E}(X | [Y = 2])$, $\mathbf{E}(X | [Y = 3])$ et $\mathbf{E}(X | [Y = 4])$ donnent les différentes valeurs de la variable aléatoire $\mathbf{E}(X | Y)$, elles sont notées x dans le tableau ci-dessus, la probabilité de ces différentes valeurs étant respectivement $\mathbf{P}([Y = 1])$, $\mathbf{P}([Y = 2])$, $\mathbf{P}([Y = 3])$, $\mathbf{P}([Y = 4])$.

b.iv

La formule de l'*espérance totale* nous donne le résultat bien connu qui est :

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X | Y)) = \mathbf{E}(X)$$

ce qui est parfaitement confirmé par le calcul :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{E}(X | Y)) &= 0.3 + 0.3 + 1.6 + 0.4 \\ &= 2.6 \\ &= \mathbf{E}(X) \end{aligned}$$

20 Espérance conditionnelle

a On nous demande de chercher la première loi marginale du couple (X, Y) ce qui se fait en utilisant la *formule des probabilités totales*.

Nous avons $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x]) &= \sum_{y=0}^{n-x} \binom{n}{x} \binom{n-x}{y} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y} \\ &= \binom{n}{x} p^x \sum_{y=0}^{n-x} \binom{n-x}{y} q^y (1-p-q)^{n-x-y} \\ &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

par la formule du binôme de Newton

Conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

b

• **Loi conditionnelle de Y sachant que $[X = x]$.**

$$\begin{aligned} \forall y \in \llbracket 0, n-x \rrbracket, \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) &= \frac{\binom{n}{x} \binom{n-x}{y} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}}{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}} \\ &= \binom{n-x}{y} \left(\frac{q}{1-p}\right)^y \left(\frac{1-p-q}{1-p}\right)^{n-x-y} \text{ avec } \frac{q}{1-p} + \frac{1-p-q}{1-p} = 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

La loi conditionnelle de Y sachant que $[X = x]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n-x, \frac{q}{1-p}\right)$

• **Loi conditionnelle de X sachant que $[Y = y]$.**

Comme $\binom{n}{x} \binom{n-x}{y} = \binom{n}{y} \binom{n-y}{x}$ après calculs, comme fait en classe, nous obtenons le résultat demandé en inversant les rôles de p et q d'une part et de x et y de l'autre, ce qui donne :

La loi conditionnelle de X sachant que $[Y = y]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n-y, \frac{p}{1-q}\right)$

c D'après le cours :

$$\mathbf{E}(Y | [X = x]) = \frac{(n-x)q}{1-p} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X | [Y = y]) = \frac{(n-y)p}{1-q}$$

d Toujours d'après le cours :

$$\mathbf{E}(Y | X) = \frac{(n-X)q}{1-p} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X | Y) = \frac{(n-Y)p}{1-q}$$

Je profite de cet exercice pour vous dire deux mots sur la **loi multinomiale** :

On considère une épreuve aléatoire ayant r résultats possibles, A_1, A_2, \dots, A_r chacun ayant une probabilité de réalisation $p_j, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

On réalise n fois cette épreuve aléatoire et l'on note X_j le nombre de fois que se réalise le résultat A_j . On a nécessairement :

$$X_1 + \dots + X_r = n$$

On dit qu'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_r) suit une **loi multinomiale de paramètres** n, p_1, \dots, p_r , avec $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, 0 < p_i < 1$ et $p_1 + \dots + p_r = 1$ si :

- $X_1(\Omega) = \dots = X_r(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
- La loi de (X_1, \dots, X_r) est donnée par :

$$\mathbf{P}([X_1 = k_1] \cap \dots \cap [X_r = k_r]) = \begin{cases} \frac{n!}{k_1! \times \dots \times k_r!} p_1^{k_1} \times \dots \times p_r^{k_r} & \text{si } k_1 + \dots + k_r = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces probabilités sont les monômes du développement de $(p_1 + \dots + p_r)^n$ (**formule du binôme généralisée**).

- Chacune des lois marginales X_i est une loi binomiale de paramètre n et p_i . Pour le voir, il suffit d'appeler succès l'événement A_j et échec son contraire.

Exemple : tirage avec remise dans une urne multicolore.

Soit urne contenant des boules de r couleurs différentes c_i . On note p_i la proportion de boules de couleur c_i . On effectue n tirages avec remise, et on note X_i le nombre de boules de couleur c_i tirées. Alors (X_1, \dots, X_r) suit une loi multinomiale de paramètres n, p_1, \dots, p_r .

Pour $r = 2$ on retrouve la loi binomiale.

21 Espérance conditionnelle

a

- $\mathcal{L}(X_2, Z)$

Nous avons $(X_2, Z)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 \mid i \leq j\}$. Et :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in (X_2, Z)(\Omega) \quad \mathbf{P}([X_2 = i] \cap [Z = j]) &= \mathbf{P}([X_2 = i] \cap [X_1 + X_2 = j]) \\ &= \mathbf{P}([X_2 = i] \cap [X_1 = j - i]) \\ &= \mathbf{P}([X_2 = i]) \mathbf{P}([X_1 = j - i]) \\ &\quad \text{par indépendance des variables} \\ &= \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^i}{i!} \times \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{j-i}}{(j-i)!} \end{aligned}$$

$$\forall (i, j) \in (X_2, Z)(\Omega), \quad \mathbf{P}([X_2 = i] \cap [Z = j]) = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \lambda_1^{j-i} \lambda_2^i}{i! (j-i)!}$$

- **Loi conditionnelle de X_2 sachant que $[Z = z]$.**

Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, z \rrbracket, \mathbf{P}_{[Z=z]}([X_2 = i]) &= \frac{\mathbf{P}([X_2 = i] \cap [Z = z])}{\mathbf{P}([Z = z])} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \lambda_1^{z-i} \lambda_2^i}{i! (z-i)!} \times \frac{z!}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^z} \\ &= \binom{z}{i} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{z-i} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^i \end{aligned}$$

Conclusion :

la loi conditionnelle de X_2 sachant que $[Z = z]$ est la loi $\mathcal{B}\left(z, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$

b

D'après le cours :

$\mathbf{E}(X_2 | [Z = z]) = \frac{\lambda_2 z}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X_2 | Z) = \frac{\lambda_2 Z}{\lambda_1 + \lambda_2}$

22 Espérance conditionnelle

D'après le cours $\mathbf{E}(aY_1 + bY_2 | X)$ est la variable aléatoire $\varphi(X)$ où φ est la fonction définie par :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \varphi(x) = \sum_{(y_1, y_2) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)} (ay_1 + by_2) \mathbf{P}_{[X=x]}([Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2])$$

Nous avons $\forall x \in X(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{(y_1, y_2) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)} (ay_1 + by_2) \mathbf{P}_{[X=x]}([Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2]) \\ &= \sum_{(y_1, y_2) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)} ay_1 \mathbf{P}_{[X=x]}([Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2]) + \sum_{(y_1, y_2) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)} by_2 \mathbf{P}_{[X=x]}([Y_1 = y_1] \cap [Y_2 = y_2]) \\ &= \sum_{y_1 \in Y_1(\Omega)} ay_1 \mathbf{P}_{[X=x]}([Y_1 = y_1]) + \sum_{y_2 \in Y_2(\Omega)} by_2 \mathbf{P}_{[X=x]}([Y_2 = y_2]) \\ &= a\mathbf{E}(Y_1 | [X = x]) + b\mathbf{E}(Y_2 | [X = x]) \end{aligned}$$

Conclusion :

$\mathbf{E}(aY_1 + bY_2 | X) = a\mathbf{E}(Y_1 | X) + b\mathbf{E}(Y_2 | X)$

23 Espérance conditionnelle

Cette exercice a fait l'objet d'une démonstration dans le cours que je vous engage vivement à revoir.

24 Loi d'une somme, loi de max, loi de min

a.i

Reprenons la définition de Y .

$$Y = \max(n, X) \iff Y = \begin{cases} n & \text{si } X \leq n \\ X & \text{si } X > n \end{cases}$$

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbf{N}_n$.

Introduisons la famille $([X \leq n], [X > n])$ qui est un *système complet d'événements* alors selon la *formule des probabilités totales* :

$$\forall k \in \mathbf{N}_n, \quad \mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([Y = k] \cap [X \leq n]) + \mathbf{P}([Y = k] \cap [X > n])$$

- Si $k = n$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Y = n]) &= \mathbf{P}([Y = n] \cap [X \leq n]) + \mathbf{P}([Y = n] \cap [X > n]) \\
 &= \mathbf{P}([n = n] \cap [X \leq n]) + \underbrace{\mathbf{P}([X = n] \cap [X > n])}_{\emptyset} \\
 &= \mathbf{P}([X \leq n]) + \mathbf{P}(\emptyset) \\
 &= 1 - \mathbf{P}([X > n]) + 0
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}([Y = n]) = 1 - q^n}$$

- Si $k \geq n + 1$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}([Y = k] \cap [X \leq n]) + \mathbf{P}([Y = k] \cap [X > n]) \\
 &= \underbrace{\mathbf{P}([n = k] \cap [X \leq n])}_{\emptyset} + \mathbf{P}([X = k] \cap [X > n]) \\
 &= \mathbf{P}(\emptyset) + \mathbf{P}([X = k] \cap [X > n]) \\
 &= \mathbf{P}([X = k]) \text{ car } [X = k] \subset [X > n]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geq n + 1, \mathbf{P}([Y = k]) = pq^{k-1}}$$

a.ii

Reprenons la définition de Z :

$$Z = \max(n, X) \iff Z = \begin{cases} n & \text{si } X \geq n \\ X & \text{si } X < n \end{cases}$$

Nous avons $Z(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Reprenons encore la famille $([X \leq n], [X > n])$ qui est un *système complet d'événements de probabilités* alors selon la *formule des probabilités totales* :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}([Z = k]) = \mathbf{P}([Z = k] \cap [X \geq n]) + \mathbf{P}([Z = k] \cap [X < n])$$

- Si $k = n$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Z = n]) &= \mathbf{P}([Z = n] \cap [X \geq n]) + \mathbf{P}([Z = n] \cap [X < n]) \\
 &= \mathbf{P}([n = n] \cap [X \geq n]) + \underbrace{\mathbf{P}([X = n] \cap [X < n])}_{\emptyset} \\
 &= \mathbf{P}([X \geq n]) + \mathbf{P}(\emptyset) \\
 &= \mathbf{P}([X \geq n]) + 0 \\
 &= q^{n-1}
 \end{aligned}$$

- Si $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Z = k]) &= \mathbf{P}([Z = k] \cap [X \geq n]) + \mathbf{P}([Z = k] \cap [X < n]) \\
 &= \underbrace{\mathbf{P}([n = k] \cap [X \geq n])}_{\emptyset} + \mathbf{P}([X = k] \cap [X < n]) \\
 &= \mathbf{P}(\emptyset) + \mathbf{P}([X = k] \cap [X < n]) \\
 &\quad \text{car } [X = k] \subset [X < n] \\
 &= \mathbf{P}([X = k])
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \mathbf{P}([Z = k]) = pq^{k-1}}$$

b.i Soit X_1 une variable indépendante de X et de même loi. Cherchons la loi de $X_1 + X$. Nous avons $(X_1 + X)(\Omega) = \mathbf{N}_2$.

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbf{N}_2, \mathbf{P}([X + X_1 = k]) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X = i] \cap [X_1 = k - i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X = i]) \times \mathbf{P}([X_1 = k - i]) \\
 &\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } X_1 \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1} p * q^{k-i-1} p \\
 &= p^2 \sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} \\
 &= \boxed{(k-1) p^2 q^{k-2}}
 \end{aligned}$$

b.ii Déterminons la loi de $W = \min(X, X_1)$.
Pour commencer $W(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([W = k]) &= \mathbf{P}([W \leq k]) - \mathbf{P}([W \leq k-1]) \\
 &= \mathbf{P}([X \leq k] \cap [X_1 \leq k]) - \mathbf{P}([X \leq k-1] \cap [X_1 \leq k-1]) \\
 &= (\mathbf{P}([X \leq k]))^2 - (\mathbf{P}([X \leq k-1]))^2 \text{ par ind. des VAR et } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_1) \\
 &= (1 - \mathbf{P}([X > k]))^2 - (1 - \mathbf{P}([X > k-1]))^2 \\
 &= (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2 \\
 &= (q^k - 2 + q^{k-1})(q^k - q^{k-1})
 \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([W = k]) = pq^{k-1}(2 - q^{k-1} - q^k)$$

b.iii Déterminons la loi de $T = \min(X, X_1)$.

Pour commencer :

$$T(\Omega) = \mathbf{N}^* \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbf{N}^* \mathbf{P}([T = k]) &= \mathbf{P}([T \geq k]) - \mathbf{P}([T \geq k+1]) \\
 &= \mathbf{P}([X \geq k] \cap [X_1 \geq k]) - \mathbf{P}([X \geq k+1] \cap [X_1 \geq k+1]) \\
 &= (\mathbf{P}([X \geq k]))^2 - (\mathbf{P}([X \geq k+1]))^2 \\
 &\quad \text{par indépendance des variables et } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_1) \\
 &= (q^{k-1})^2 - (q^k)^2 \\
 &= (q^2)^{k-1} - (q^2)^k \\
 &= (q^2)^{k-1} (1 - q^2)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Selon (1) et (2) :

$$T \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2)$$

25 Loi de max, loi de min et fonction de répartition

a Soient X et Y deux variables géométriques de même paramètre p (nous poserons $q = 1 - p$) et indépendantes. Pour commencer déterminons la fonction de répartition associée à X que nous noterons

F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$$

Rappelons que $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ ainsi :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \mathbf{P}([X > x]) = 1 - q^k & \text{si } x \in [k, k+1[, \quad \forall k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

car quand $x \geq k$ alors :

$$[X > x] \subset [X > k] \subset [X \geq k+1]$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}([X > x]) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ q^k & \text{si } x \in [k, k+1[, \quad \forall k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

b.i

Soit $V = \max(X, Y)$, déterminons la fonction de répartition F_V de V sachant que $V(\Omega) = \mathbf{N}^*$. F_V est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_V(x) = \mathbf{P}([V \leq x])$$

et :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ (1 - q^k)^2 & \text{si } x \in [k, k+1[, \quad \forall k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

car $\forall k \in \mathbf{N}^*$ quand $x \in [k, k+1[$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([V \leq x]) &= \mathbf{P}([X \leq x] \cap [Y \leq x]) \\ &= (\mathbf{P}([X \leq x]))^2 \\ &= (1 - \mathbf{P}([X > x]))^2 \\ &= (1 - q^k)^2 \end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.
Loi de V .

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}([V = k]) &= \mathbf{P}([V \leq k]) - \mathbf{P}([V \leq k-1]) \\ &= F_V(k) - F_V(k-1) \\ &= (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2 \\ &= (q^k - 2 + q^{k-1})(q^k - q^{k-1}) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}([V = k]) = pq^{k-1}(2 - q^{k-1} - q^k)$$

b.ii

Pour commencer déterminons la fonction de répartition F_U de U sachant que :

$$U(\Omega) = \mathbf{N}^* \tag{3}$$

F_U est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_U(x) = \mathbf{P}([U \leq x])$$

et :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - (q^k)^2 & \text{si } x \in [k, k+1[\quad \forall k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

car $\forall k \in \mathbf{N}^*$ quand $x \in [k, k+1[$:

$$\begin{aligned} F_U(x) &= 1 - \mathbf{P}([U > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X > x] \cap [Y > x]) \\ &= 1 - (\mathbf{P}([X > x]))^2 \\ &= 1 - (q^k)^2 \end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([U = k]) &= \mathbf{P}([U \leq k]) - \mathbf{P}([U \leq k-1]) \\ &= F_U(k) - F_U(k-1) \\ &= 1 - (q^k)^2 - (1 - (q^{k-1})^2) \\ &= (q^2)^{k-1} - (q^2)^k \\ &= (q^2)^{k-1} (1 - q^2) \end{aligned} \tag{4}$$

et selon (3) et (4) :

$$U \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2)$$



- Déterminons la loi de $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Tout d'abord $U(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([U > k]) &= \mathbf{P}([X_1 > k] \cap \dots \cap [X_n > k]) \\ &= (\mathbf{P}([X_1 > k]))^n = (q^k)^n \end{aligned}$$

et comme :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([U \geq k]) = \mathbf{P}([U = k]) + \mathbf{P}([U > k])$$

alors :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([U = k]) = \mathbf{P}([U > k-1]) - \mathbf{P}([U > k])$$

Conclusion :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([U = k]) = (q^{k-1})^n - (q^k)^n$$

- Pour terminer déterminons la loi de $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Nous avons $V(\Omega) = \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([V \leq k]) &= \mathbf{P}([X_1 \leq k] \cap \dots \cap [X_n \leq k]) \\ &= (\mathbf{P}([X_1 \leq k]))^n \\ &= (1 - \mathbf{P}([X_1 > k]))^n \\ &= (1 - q^k)^n \end{aligned}$$

et comme :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([V \leq k]) = \mathbf{P}([V = k]) + \mathbf{P}([V < k])$$

alors :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([V = k]) = \mathbf{P}([V \leq k]) - \mathbf{P}([V \leq k-1])$$

la formule reste valable pour $k = 1$ puisque $\mathbf{P}([V \leq 0]) = 0$ et $\mathbf{P}([V = 1]) = \mathbf{P}([V \leq 1])$ du fait de $V(\Omega)$.

Conclusion :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([V = k]) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n$$

26 Covariance et inégalité

a Pour commencer $X + Y + Z = 1 \implies X + Z = 1 - Y$ donc :

$$\mathbf{V}(X + Z) = \mathbf{V}(1 - Y)$$

et par propriété élémentaire de la variance :

$$\mathbf{V}(X + Z) = \mathbf{V}(Y)$$

par théorème :

$$\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Z) + 2 \operatorname{Cov}(X, Z) = \mathbf{V}(Y)$$

soit encore :

$$2 \operatorname{Cov}(X, Z) = \underbrace{(\mathbf{V}(Y) - \mathbf{V}(Z))}_{\ominus} - \mathbf{V}(X)$$

et finalement :

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X, Z) \leq 0}$$

De même :

$$\begin{aligned} X + Y + Z = 1 &\implies Y + Z = 1 - X \\ &\implies \mathbf{V}(Y + Z) = \mathbf{V}(1 - X) \\ &\implies \mathbf{V}(Y + Z) = \mathbf{V}(X) \\ &\implies \mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(Z) + 2 \operatorname{Cov}(Y, Z) = \mathbf{V}(X) \\ &\implies 2 \operatorname{Cov}(Y, Z) = \underbrace{(\mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y))}_{\ominus} - \mathbf{V}(Z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(Y, Z) \leq 0}$$

b Encore une fois !

$$\begin{aligned} X + Y + Z = 1 &\implies X + Y = 1 - Z \\ &\implies \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(1 - Z) \\ &\implies \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(Z) \\ &\implies \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{V}(Z) \\ &\implies 2 \operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{V}(Z) - (\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)) \end{aligned}$$

donc nous obtenons facilement l'équivalence :

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X, Y) \geq 0 \iff \mathbf{V}(Z) \geq \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)}$$

c Selon la première question :

$$2 \operatorname{Cov}(X, Z) = -\underbrace{((\mathbf{V}(Z) - \mathbf{V}(Y)) + \mathbf{V}(X))}_{\ominus} \implies |2 \operatorname{Cov}(X, Z)| = \mathbf{V}(Z) \underbrace{-\mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(X)}_{\ominus}$$

d'où :

$$(2 \operatorname{Cov}(Y, Z) = -((\mathbf{V}(Z) - \mathbf{V}(X)) + \mathbf{V}(Y))) \implies (|2 \operatorname{Cov}(Y, Z)| \leq \mathbf{V}(Z))$$

et :

$$2 \operatorname{Cov}(Y, Z) = - \underbrace{((\mathbf{V}(Z) - \mathbf{V}(X)) + \mathbf{V}(Y))}_{\ominus} \implies |2 \operatorname{Cov}(Y, Z)| = \mathbf{V}(Z) \underbrace{-\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)}_{\oplus}$$

donc :

$$2 \operatorname{Cov}(Y, Z) = -((\mathbf{V}(Z) - \mathbf{V}(X)) + \mathbf{V}(Y)) \implies |2 \operatorname{Cov}(Y, Z)| \geq \mathbf{V}(Z)$$

par *transitivité de \leq* nous obtenons que :

$$\boxed{|\operatorname{Cov}(X, Z)| \leq |\operatorname{Cov}(Y, Z)|}$$

27 Coefficient de corrélation

Calculons $\forall (i, j) \in \mathbf{N}^2, i \leq j, \rho(Y_i, Y_j)$ où $\forall i \in \mathbf{N}^*, Y_i = X_i X_{i+1}$ avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, les variables X_i étant indépendantes.

Nota bene : L'inégalité $i \leq j$ s'explique par le fait que le coefficient de corrélation linéaire est *symétrique* en Y_i et Y_j et donc, il est totalement inutile d'effectuer tous les calculs en double ! A bon entendre...

S'impose donc à nous, une discussion.

- Si $j = i$:

$$\begin{aligned} \rho(Y_i, Y_j) &= \rho(Y_i, Y_i) \\ &= \frac{\operatorname{Cov}(Y_i, Y_i)}{\sigma(Y_i) \sigma(Y_i)} \\ &= \frac{\mathbf{V}(Y_i)}{\mathbf{V}(Y_i)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Si $j > i + 1, \rho(Y_i, Y_j) = 0$ car les variables Y_i, Y_j sont clairement indépendantes¹.
- Si $j = i + 1$:

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbf{E}(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) - \mathbf{E}(Y_i) \mathbf{E}(Y_j)$$

avec :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbf{N}^*, Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}([Y_i = 1])) &\implies Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}([X_i X_{i+1} = 1])) \\ &\implies Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}([X_i = 1])^2) \\ &\implies Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2) \\ &\implies \mathbf{E}(Y_i) = p^2 \text{ et } \mathbf{V}(Y_i) = p^2(1 - p^2) \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) &= \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_{i+1}^2) \mathbf{E}(X_{i+2}) \\ &= p^3 \end{aligned}$$

en effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{i+1}^2) &= \mathbf{P}([X_{i+1}^2 = 1]) \\ &= \mathbf{P}([X_{i+1} = 1]) \\ &= p \end{aligned}$$

Finalement si $j = i + 1$:

$$\begin{aligned} \rho(Y_i, Y_j) &= \frac{p^3 - p^4}{p^2(1 - p^2)} \\ &= \frac{p}{1 + p} \end{aligned}$$

¹Il n'y a pas de "chevauchement" des indices !

Conclusion :

$$\rho(Y_i, Y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ \frac{p}{1+p} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j > i + 1 \end{cases}$$

28 Loi d'un quotient de variables indépendantes

a Tout d'abord $U(\Omega) = \left\{ \frac{i}{j}, (i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\} = \mathbb{Q}_+^*$.

$$\begin{aligned} \forall \left(\frac{i}{j} \right) \in U(\Omega), \mathbf{P} \left(\left[U = \frac{i}{j} \right] \right) &= \mathbf{P} \left(\bigsqcup_{k \in \mathbf{N}^*} ([X = ki] \cap [Y = kj]) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \mathbf{P}([X = ki]) \times \mathbf{P}([Y = kj]) \\ &\quad \text{par } \sigma\text{-add. et indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{ki-1} q^{kj-1} p^2 \\ &= \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k(i+j)} \\ &= \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^{i+j})^k \\ &= \frac{p^2}{q^2} \times \frac{q^{i+j}}{1 - q^{i+j}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall \left(\frac{i}{j} \right) \in U(\Omega), \mathbf{P} \left(\left[U = \frac{i}{j} \right] \right) = \frac{p^2 q^{i+j-2}}{1 - q^{i+j}}$$

b Au lieu de vous lancer dans le théorème de transfert, ce qui serait pure folie, vu la "tête" de la série en jeu, voici un moyen infaillible et très classique de vous en sortir.

Comme X et Y sont indépendantes, alors, d'après le cours, X et $\frac{1}{Y}$ le sont aussi, et sous réserve d'existence des espérances de ces variables, alors $\mathbf{E} \left(\frac{X}{Y} \right)$ existe et vaut :

$$\mathbf{E} \left(\frac{X}{Y} \right) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E} \left(\frac{1}{Y} \right)$$

L'espérance de X ne pose aucun problème du fait de la loi géométrique. Voyons celle de $\frac{1}{Y}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y} \text{ admet une espérance} &\iff \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \mathbf{P}([Z = k]) \text{ est convergente} \\ &\iff \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p q^{k-1} \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbf{E} \left(\frac{1}{Y} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p q^{k-1}}{k}$. Or :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{k} p q^{k-1} = \frac{p}{q} \frac{q^k}{k}$$

et sans être connue la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ a été déjà étudiée dans une fiche précédente, et nous avons pu conclure qu'elle convergeait quand $x \in [-1, 1[$ de somme égale à $-\ln(1-x)$ (c'est la *série logarithmique*).

Appliqué ici avec $x = q$, le résultat précédent nous permet de dire que $\frac{1}{Y}$ admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{pq^{k-1}}{k} \\ &= -\frac{p}{q} \ln(1-q) \end{aligned}$$

U admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U) &= \mathbf{E}(X) \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) \\ &= \frac{1}{p} \times -\frac{p}{q} \ln(1-q) \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{E}(U) = \frac{\ln p}{p-1}}$$

Il est de notoriété publique que $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$ en utilisant le fait que la fonction \ln est *concave* sur \mathbf{R}_+^* .

L'interprétation géométrique est que la courbe représentative de \ln est en-dessous de toutes ses tangentes, elle en particulier en-dessous de celle en 1 d'équation $y = x - 1$. C'est pour cela que :

$$\begin{aligned} &\forall p \in]0, 1[, \ln p < p - 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{\ln p}{p-1} > 1 \\ \Leftrightarrow &\boxed{\mathbf{E}(U) > 1} \end{aligned}$$

29 Loi du min d'un couple aléatoire

Voir l'exercice 24 b.ii.

30 Loi d'un couple, loi marginale, loi d'une différence

a Comme d'après l'énoncé $\mathbf{P}_{[Y=n]}([X=k]) = 0$ lorsque $k \geq n+1, n \in \mathbf{N}$ alors $([X=k] \cap [Y=n]) = \emptyset$ quand $k \geq n+1, n \in \mathbf{N}$ cela entraîne directement que $(X, Y)(\Omega) = \{(k, n) \in \mathbf{N}^2 \mid k \leq n\}$. En supposant *a priori* que $\mathbf{P}([Y=n]) \neq 0$ la *formule des probabilités composées* nous permet d'écrire que :

$$\forall (k, n) \in (X, Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}([X=k] \cap [Y=n]) = \mathbf{P}_{[Y=n]}([X=k]) \mathbf{P}([Y=n])$$

d'où :

$$\boxed{\forall (k, n) \in (X, Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}([X=k] \cap [Y=n]) = \frac{1}{n+1} \mathbf{P}([Y=n])}$$

b Nous avons :

$$\mathbf{P}([X \leq Y]) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n \in Y(\Omega)} [X \leq n] \cap [Y = n]\right)$$

par la formule des probabilités totales

associée au système complet $([Y=n])_{n \in Y(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X \leq n] \cap [Y = n]) \\
&\quad \text{par } \sigma\text{-additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \mathbf{P}_{[Y=n]}([X \leq n]) \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) \right) \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \right) \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \boxed{1} \\
&\quad \text{puisque } Y \text{ est une variable aléatoire}
\end{aligned}$$

3 Soit $a \in]0, 1[$, on suppose maintenant que $\mathbf{P}([Y = n]) = (1 - a)^2 (n + 1) a^n$, déterminons la loi de X .

• **Déterminons la loi de X**

Pour commencer, il est clair que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Introduisons le *système complet d'événements à probabilités non nulles* $\{[Y = n], n \in \mathbb{N}\}$, alors selon la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([X = k]) &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) \times \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= 0 + \sum_{n \geq k} \mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) \times \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \sum_{n \geq k} \frac{1}{n+1} (1-a)^2 (n+1) a^n \\
&= (1-a)^2 \sum_{n \geq k} a^n \text{ (somme d'une série géo. de raison } a, |a| < 1 \text{ donc cv)} \\
&= (1-a)^2 a^k \left(\frac{1}{1-a} \right) \\
&= (1-a) a^k
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(1-a)$$

• **Déterminons la loi de $Y - X$**

Comme d'après la remarque déjà utilisée à la première question $\mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) = 0$ lorsque $k \geq n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ alors $(Y - X)(\Omega) = \mathbb{N}$. Puisque $\forall (k, i) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}([Y = k + i]) \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([Y - X = k]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y = k + i] \cap [X = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{[Y=k+i]}([X = i]) \times \mathbf{P}([Y = k + i]) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{k+i+1} \times (1-a)^2 (k+i+1) a^{k+i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-a)^2 a^k \sum_{i=0}^{+\infty} a^i \\
&\quad (\text{somme d'une série géo. de raison } a, |a| < 1 \text{ donc cv}) \\
&= \frac{(1-a)^2 a^k}{1-a} \\
&= (1-a) a^k
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$Y - X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(1-a)$$

31 Somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi : formule de Waldt

Exercice extrêmement technique et à priori déconcertant car il met en jeu une somme aléatoire de longueur aléatoire puisque celle-ci dépend d'une variable aléatoire.

- $\mathbf{E}(Y)$

Le secret de la réussite dans cette question est d'utiliser le résultat qu'en cas d'existence :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(Y | N)) \\
&= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{E}(Y | [N = n]) \mathbf{P}([N = n])
\end{aligned}$$

Il n'y a aucun problème existentiel dans la mesure où N est une variable discrète finie. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y | [N = n]) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= n \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) \\
&= n\mathbf{E}(X)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{n \in N(\Omega)} n\mathbf{E}(X) \mathbf{P}([N = n]) \\
&= \mathbf{E}(X) \sum_{n \in N(\Omega)} n\mathbf{P}([N = n])
\end{aligned}$$

et :

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(N)$$

- $\mathbf{V}(X)$

Ne changeons pas une tactique gagnante et utilisons le résultat qu'en cas d'existence :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y^2) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(Y^2 | N)) \\
&= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{E}(Y^2 | [N = n]) \mathbf{P}([N = n])
\end{aligned}$$

Là encore il n'y a aucun problème existentiel dans la mesure où N est une variable discrète finie. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y^2 | [N = n]) &= \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}(X_i X_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(X) \\
&\quad \text{car } \forall i, \mathcal{L}(X_i) = \mathcal{L}(X) \text{ les variables étant indépendantes} \\
&= n\mathbf{E}(X^2) + 2 \binom{n}{2} (\mathbf{E}(X))^2 \\
&= n\mathbf{E}(X^2) + n(n-1) (\mathbf{E}(X))^2 \\
&= n(\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2) + n(n-1) (\mathbf{E}(X))^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y^2) &= \sum_{n \in N(\Omega)} \left(n(\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2) + n(n-1) (\mathbf{E}(X))^2 \right) \mathbf{P}([N = n]) \\
&= (\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2) \sum_{n \in N(\Omega)} n \mathbf{P}([N = n]) + (\mathbf{E}(X))^2 \sum_{n \in N(\Omega)} n(n-1) \mathbf{P}([N = n]) \\
&= (\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{E}(N(N-1)) \\
&= (\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)) \\
&= (\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{V}(N) + (\mathbf{E}(N))^2 - \mathbf{E}(N)) \\
&= \mathbf{V}(X) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{V}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{E}(N))^2 - (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{E}(N) \\
&= \mathbf{V}(X) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{V}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{E}(N))^2
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 \\
&= \mathbf{V}(X) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{V}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{E}(N))^2 - (\mathbf{E}(X) \mathbf{E}(N))^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{V}(N)}$$

Maintenant laissez-moi vous montrez ce à quoi vous avez échappé ! Ceci dit, il est bon de lire cette autre méthode car elle vous apprend comment chercher la loi de Y et à vivre sans espérance conditionnelle comme nos pauvres bétas, c'est à dire à vivre comme des Mike-Giver.

- Pour commencer, déterminons la loi de Y .

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbf{N}$.

La famille $([N = n])_{n \in N(\Omega)}$ constitue un *Système complet*, et d'après la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n \in N(\Omega)} ([Y = k] \cap [N = n])\right) \\
&= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}([Y = k] \cap [N = n]) \\
&\quad \text{par } \sigma\text{-additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right] \cap [N = n]\right) \\
&= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right] \cap [N = n]\right) \\
&= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right) \mathbf{P}([N = n]) \text{ puisque les variables } X_i \text{ et } N \text{ sont ind.}
\end{aligned}$$

- Espérance de Y .

Y admet une espérance $\iff \sum_k k\mathbf{P}([Y = k])$ est une SATP convergente

En cas de convergence $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k \geq 0} k\mathbf{P}([Y = k])$. Introduisons la suite $(S_m)_{m \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbf{N}, S_m &= \sum_{k=0}^m k\mathbf{P}([Y = k]) \\ &= \sum_{k=0}^m k \left(\sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right) \right) \mathbf{P}([N = n]) \end{aligned}$$

et comme $N(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut sans hésiter inverser l'ordre de sommation, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbf{N}, S_m &= \sum_{n \in N(\Omega)} \sum_{k=0}^m k\mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right) \mathbf{P}([N = n]) \\ &= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}([N = n]) \left(\sum_{k=0}^m k\mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right) \right) \\ &= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}([N = n]) \mathbf{E}_m \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \end{aligned}$$

en introduisant la suite $\left(\mathbf{E}_m \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right)_{m \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall m \in \mathbf{N}, \mathbf{E}_m \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{k=0}^m k\mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right)$$

qui converge vers $\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = n\mathbf{E}(X)$ car selon l'énoncé, X admet une espérance et les variables X_i suivent la même loi que X .

Ainsi $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m$ existe et est finie, de valeur :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m &= \sum_{n \in N(\Omega)} n\mathbf{P}([N = n]) \mathbf{E}(X) \\ &= \mathbf{E}(X) \sum_{n \in N(\Omega)} n\mathbf{P}([N = n]) \\ &= \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(N) \end{aligned}$$

l'existence de $\mathbf{E}(N)$ ne posant aucun problème du fait que N est une variable discrète finie.

Conclusion : Y admet une espérance qui vaut :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(N)}$$

- Variance de Y .

Y admet une variance $\iff Y^2$ admet une espérance

et :

Y^2 admet une espérance $\iff \sum_k k^2\mathbf{P}([Y = k])$ est une SATP convergente

En cas de convergence $\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{k \geq 0} k^2 \mathbf{P}([Y = k])$. Introduisons la suite $(T_m)_{m \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbf{N}, T_m &= \sum_{k=0}^m k^2 \mathbf{P}([Y = k]) \\ &= \sum_{k=0}^m k^2 \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right) \mathbf{P}([N = n]) \end{aligned}$$

et comme $N(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut sans hésiter inverser l'ordre de sommation, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbf{N}, T_m &= \sum_{n \in N(\Omega)} \sum_{k=0}^m k^2 \mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right) \mathbf{P}([N = n]) \\ &= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}([N = n]) \left(\sum_{k=0}^m k^2 \mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right) \right) \\ &= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}([N = n]) \mathbf{E}'_m \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right) \end{aligned}$$

en introduisant la suite $\left(\mathbf{E}'_m \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right) \right)_{m \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall m \in \mathbf{N}, \mathbf{E}'_m \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right) = \sum_{k=0}^m k^2 \mathbf{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] \right)$$

Cette suite converge vers :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right) &= \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j \right) \\ &= n \mathbf{E}(X^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}(X_i X_j) \\ &= n \mathbf{E}(X^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j) \\ &\quad \text{par indépendance des VAR } X_i \\ &= n \mathbf{E}(X^2) + 2 \binom{n}{2} (\mathbf{E}(X))^2 \end{aligned}$$

car selon l'énoncé, X admet une variance et les variables X_i suivent la même loi que X . Ainsi $\lim_{m \rightarrow +\infty} T_m$ existe et est finie, de valeur :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} T_m &= \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbf{P}([N = n]) \left(n \mathbf{E}(X^2) + 2 \binom{n}{2} (\mathbf{E}(X))^2 \right) \\ &= \mathbf{E}(X^2) \sum_{n \in N(\Omega)} n \mathbf{P}([N = n]) + (\mathbf{E}(X))^2 \sum_{n \in N(\Omega)} n(n-1) \mathbf{P}([N = n]) \\ &= \mathbf{E}(X^2) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{E}(N(N-1)) \end{aligned}$$

l'existence de $\mathbf{E}(N(N-1))$, obtenue par le *théorème de transfert*, ne posant aucun problème du fait que N est une variable discrète finie.

Conclusion : Y^2 admet une espérance qui vaut :

$$\mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{E}(X^2) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{E}(N(N-1))$$

et pour finir Y admet une variance qui vaut $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2$ par *Huygens-Koenig*, soit :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}(X^2) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{E}(N(N-1)) - (\mathbf{E}(X) \mathbf{E}(N))^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)) - (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{E}(N))^2 \\ &= \mathbf{E}(N) (\mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2) + (\mathbf{E}(X))^2 (\mathbf{E}(N^2) - (\mathbf{E}(N))^2)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2 \mathbf{E}(N)}$$

