

Correction de la fiche 7

La correction comporte 38 pages

1 Densité de probabilité

f est une densité de probabilité si et seulement si :

- f est continue presque partout ;
 - ici la continuité de f sur $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$ est triviale et comme $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = f(0)$, f est continue sur $\mathbf{R}$;
- f est positive sur $\mathbf{R}$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergente et égale à 1.
 - Ici $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge car par définition de f , l'étude de la convergence se réduit à celle de $\int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} dt$, en effet f coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbf{R}_-^*$. Introduisons :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R}_+^* &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) = \int_0^\alpha te^{-t^2/2} dt \end{aligned}$$

Nous avons pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \int_0^\alpha te^{-t^2/2} dt \\ &= \left[-e^{-t^2/2} \right]_0^\alpha \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \end{aligned}$$

et par passage à la limite de $\varphi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini, il vient $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) = 1$. Comme la limite existe et est finie, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1. A savoir que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha te^{-t^2/2} dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

f est bien une densité de probabilité

2 Recherche d'un paramètre

 Comme f est une densité de probabilité, nous avons en **particulier** :

- $f \geq 0$ sur $\mathbf{R}$ ce qui équivaut à $a \geq 0$ et même $a > 0$ car **la fonction nulle n'est pas une densité de probabilité**. Au passage a s'appelle **constante de normalisation** ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1. En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge si seulement si $\int_0^3 f$ converge, car f coïncide avec la fonction nulle en dehors du segment $[0, 3]$. Or $\int_0^3 f$ converge en tant qu'intégrale d'une fonction polynomiale continue sur le segment $[0, 3]$, et :

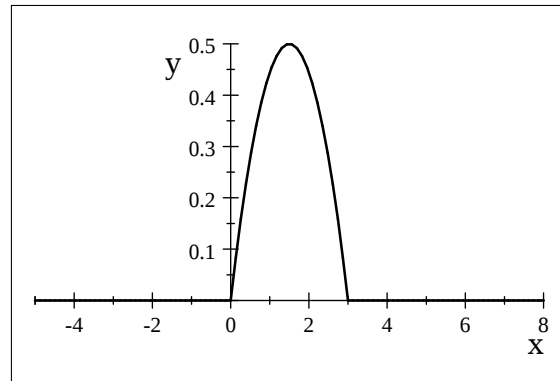
$$\int_0^3 a(3x - x^2) dx = \frac{9a}{2}$$

Conclusion :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1 \iff a = \frac{2}{9}$$

NB : la continuité de f presque partout n'impose rien de particulier à la valeur de a .

b Sans commentaire ...



c Par théorème :

$$\mathbf{P}([1 < X < 2]) = \int_1^2 \frac{2}{9} (3x - x^2) dx = \frac{13}{27}$$

3 Fonction de répartition et calcul de probabilités

Nous avons par théorème :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([1.5 < X < 2.5]) &= F_X(2.5) - F_X(1.5) \\ &= \left(\frac{2.5-1}{2}\right) - \left(\frac{1.5-1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([1.5 < X < 2.5]) = \frac{1}{2}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([2.5 < X < 3.5]) &= F_X(3.5) - F_X(2.5) \\ &= 1 - \left(\frac{2.5-1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([2.5 < X < 3.5]) = \frac{1}{4}$$

4 Changement de variable affine

Comme $\varphi : x \mapsto -x$ est une **application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle** sur $X(\Omega) = [0, 1]$, $Y = \varphi \circ X$ reste une variable à densité. Soit F_Y la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Nous avons $Y(\Omega) = [-1, 0]$ et :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \mathbf{P}([-X \leq x]) = \mathbf{P}([X \geq -x]) = 1 - F_X(-x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \mathbf{P}([X \geq -x]) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 - F_X(-x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 - \left(\frac{-x-0}{1-0} \right) = x+1 = \frac{x+1}{0-(-1)} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{0-(-1)} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

A ce niveau là nous pouvons conclure de suite en disant que :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 0])}$$

Ce résultat est sans surprise comme nous l'a annoncer le cours à la page ****.

5 Changement de variable puissance

- Comme $\varphi : x \mapsto x^2$ est une **application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle** sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $Y = \varphi \circ X$ reste une variable à densité. Soit F_Y la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([X^2 \leq x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
&\quad \text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est une bijection croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Une densité f_Y est obtenue par **dérivation** de F_Y sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons, par exemple, que $f_Y(0) = 0$ pour compléter la définition de f_Y soit :

$$\begin{aligned}
f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \underbrace{f_X(-\sqrt{x})}_{=0} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

- Comme $\varphi : x \mapsto x^3$ est une **application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$** , $Z = \psi \circ X$ reste une variable à densité. Soit F_Z la fonction de répartition de Z définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

Nous avons $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([X^3 \leq x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([X \leq \sqrt[3]{x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &\quad \text{car } t \mapsto \sqrt[3]{t} \text{ est une bijection croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt[3]{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &\quad \text{car } X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Une densité f_Z est obtenue par **dérivation** de F_Z sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons, par exemple, que $f_Z(0) = 0$ pour compléter la définition de f_Z soit :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f_X(\sqrt[3]{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Conclusion :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} e^{-\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

6 Densité paramétrée et changement de variable quadratique

a Comme f est une densité de probabilité, nous avons en particulier :

- $f \geq 0$ sur $\mathbb{R} \iff k \geq 0$ et même $k > 0$ car la fonction nulle n'est pas une densité de probabilité ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1. En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge si, et seulement si $\int_{-1}^{+\infty} f$ converge, car f coïncide avec la fonction nulle en dehors du segment de l'intervalle $[-1, +\infty[$. Introduisons :

$$\begin{aligned} \varphi :]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} k e^{-t} dt \end{aligned}$$

Nous avons pour tout $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \int_{-1}^{\alpha} k e^{-t} dt \\ &= k(-e^{-\alpha} + e) \end{aligned}$$

et par passage à la limite de $\varphi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) = ke$. Comme la limite existe et est finie, nous confirmons bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge de valeur égale à ke et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1 \iff k = \frac{1}{e}$$

NB : la continuité de f presque partout n'impose rien de particulier à la valeur de k .

b

- **Déterminons l'espérance de X** en cas d'existence.

X admet une espérance si, et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente. En cas de convergence $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge si, et seulement si $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{e} xe^{-x}dx$ est convergente car f est nulle sur $]-\infty, -1[$. Introduisons :

$$\begin{aligned} \psi :]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbf{R} \\ \alpha &\longmapsto \psi(\alpha) = \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} te^{-t} dt \end{aligned}$$

Nous avons pour tout $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} te^{-t} dt \\ &= -e^{-\alpha-1}(\alpha + 1) \end{aligned}$$

et par passage à la limite de $\psi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \psi(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -(\alpha + 1)e^{-\alpha-1} = 0$$

car $-(\alpha + 1)e^{-\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha e^{-\alpha}}{e}$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-\alpha e^{-\alpha}}{e} = 0$. Comme la limite existe et est finie :

$\mathbf{E}(X) \text{ existe et est égale à } 0$

- Pour terminer, calculons en cas d'existence, la **variance de X** . Par théorème :

$$\begin{aligned} &X \text{ admet une variance} \\ \iff &X^2 \text{ admet une espérance} \\ \iff &\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ est convergente} \\ \iff &\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{e} x^2 e^{-x} dx \text{ est convergente car } f = 0 \text{ sur }]-\infty, -1[\end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$, et la variance de X est donnée par le **théorème de Huygens-Koenig** :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$$

Introduisons :

$$\begin{aligned} \chi :]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbf{R} \\ \alpha &\longmapsto \zeta(\alpha) = \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} t^2 e^{-t} dt \end{aligned}$$

Procédons par intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u : t &\mapsto t^2 &\implies & u' : t \mapsto 2t \\ v' : t &\mapsto e^{-t} &\iff & v : t \mapsto -e^{-t} \end{aligned}$$

avec $(u, v) \in (\mathcal{C}^1([-1, \alpha], \mathbf{R}))^2$. Ainsi pour tout $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha) &= \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} t^2 e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{e} \left([-t^2 e^{-t}]_{-1}^{\alpha} + 2 \int_{-1}^{\alpha} te^{-t} dt \right) \\ &= -\alpha^2 e^{-\alpha} + e + 2\psi(\alpha) \end{aligned}$$

Par passage à la limite de $\zeta(\alpha)$ quand α tend vers l'infini :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \zeta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -\alpha^2 e^{-\alpha-1} + 1 + 2\psi(\alpha) = 1$$

car $-\alpha^2 e^{-\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha^2 e^{-\alpha}}{e}$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-\alpha^2 e^{-\alpha}}{e} = 0$ et rappelons que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \psi(\alpha) = 0$. Comme la limite existe et est finie, X^2 admet une espérance égale à 1 et donc :

$$\boxed{\mathbf{V}(X) \text{ existe, égale à } 1}$$

[c] Comme la fonction $t \mapsto t^2$ **n'est pas bijective sur** $X(\Omega) = [-1, +\infty[$ nous ne pouvons rien affirmer en ce qui concerne la nature de Y . Commençons donc à montrer que c'est une variable aléatoire.

Pour cela montrons que pour tout réel x , $Y^{-1}([-\infty, x])$ est un **événement** où :

$$Y^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq x\}$$

- Si $x < 0$: $Y^{-1}([-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} Y^{-1}([-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \mid X^2(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid -\sqrt{x} \leq X(\omega) \leq \sqrt{x}\} \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

puisque X est une variable aléatoire

Ainsi selon ces deux points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leq x)$$

En reprenant les deux résultats précédents, cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ car :
 - F_Y est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (fonction nulle) ;
 - F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+$ (différence et composition de $x \mapsto \pm\sqrt{x}$, $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$ et F_X , $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$) ;
 - $\lim_{0^-} F_Y = 0 = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0)$, donc F_Y est continue en 0.
- D'autre part F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 (à cause de la présence de la racine carrée).

La fonction de répartition F_Y a les propriétés requises pour affirmer que Y est une **variable à densité** dont une densité f_Y est obtenue par **dérivation** de F_Y sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons que $f_Y(0) = 0$, par exemple. L'expression de f_X , quand $x \geq 0$, va générer une discussion selon que $x \in [0, 1]$ ou bien que $x > 1$. Cela donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \cup \{1\} \\ \frac{1}{2e\sqrt{x}} (e^{-\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}) & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{1}{2e\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7 Changement de variable exponentiel

Comme $\varphi : x \mapsto \exp(x^2 - 1)$ est une **application bijective** (croissante) **de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle** sur $X(\Omega) = [1, 2]$, $Y = \varphi \circ X$ reste une **variable à densité**. Soit F_Y la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Nous avons $Y(\Omega) = [\varphi(1), \varphi(2)] = [1, e^3]$.

- Si $x < 1$:

$$F_Y(x) = 0$$

- Si $x \in [1, e^3]$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([X^2 - 1 \leq \ln x]) \\ &= \mathbf{P}([X^2 \leq \ln x + 1]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[-\sqrt{\ln x + 1} \leq X \leq \sqrt{\ln x + 1}\right]\right) \\ &= F_X(\sqrt{\ln x + 1}) - F_X(-\sqrt{\ln x + 1}) \end{aligned}$$

- Si $x > e^3$:

$$F_Y(x) = 1$$

En faisant le bilan :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ F_X(\sqrt{\ln x + 1}) - F_X(-\sqrt{\ln x + 1}) & \text{si } x \in [1, e^3] \\ 1 & \text{si } x > e^3 \end{cases}$$

Une densité f_Y de Y est obtenue par **dérivation** de F_Y sur $\mathbb{R} - \{1, e^3\}$ et nous poserons, par exemple, que $f_Y(1) = f_Y(e^3) = 0$. Cela donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]1, e^3[\\ \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} (f_X(\sqrt{\ln x + 1}) + f_X(-\sqrt{\ln x + 1})) & \text{si } x \in]1, e^3[\end{cases}$$

Notons que lorsque $x \in]1, e^3[$, $-\sqrt{\ln x + 1} \notin [1, 2]$ et :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-1} & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [1, 2] \end{cases}$$

Donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]1, e^3[\\ \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} & \text{si } x \in]1, e^3[\end{cases}$$

8 Valeur absolue d'une variable à densité

Comme la fonction $t \mapsto |t|$ **n'est pas bijective** sur $X(\Omega) = [-1, 1]$ nous ne pouvons rien affirmer en ce qui concerne la nature de Y . Commençons donc à montrer que c'est une variable aléatoire. Pour cela montrons que pour tout réel x , $Y^{-1}([-\infty, x])$ est un événement où :

$$Y^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq x\}$$

Nous avons d'évidence $Y(\Omega) = [0, 1]$.

- Si $x < 0$: $Y^{-1}([-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

- Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} Y^{-1}([-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \mid |X|(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid -x \leq X(\omega) \leq x\} \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ &\text{puisque } X \text{ est une variable aléatoire} \end{aligned}$$

- Si $x > 1$, $Y^{-1}([-\infty, x]) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ainsi selon ces trois points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-x \leq X \leq x]) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(x) - F_X(-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ car :
 - F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) ;
 - F_Y est continue sur $]1, +\infty[$ (fonction constante égale à 1) ;
 - F_Y est continue sur $[0, 1]$ (différence et composition de $x \mapsto \pm x$, $\mathcal{C}^0$ sur $[0, 1]$ et F_X $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$) ;
 - $\lim_{1^-} F_Y = 1 = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1)$ donc F_Y est continue en 1 ;
 - $\lim_{0^-} F_Y = 0 = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0)$, donc F_Y est continue en 0.
- D'autre part F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et 1 (à détailler ...)

Tout ceci fait que F_Y possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une **variable à densité** dont une densité f_Y est obtenue par **dérivation** de F_Y sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ et nous poserons que $f_Y(0) = f_Y(1) = 0$, par exemple. Cela donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ f_X(x) + f_X(-x) & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

Quand $x \in]0, 1[$, $f_X(x) = 1 - x$ et $f_X(-x) = 1 - x$ alors :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ 2 - 2x & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

9 Changement polynomial

Comme la fonction $t \mapsto t^2 + 1$ n'est pas bijective sur $X(\Omega) = [-1, 1]$ nous ne pouvons rien affirmer en ce qui concerne la nature de Y . Commençons donc à montrer que c'est une variable aléatoire. Pour cela montrons que pour tout réel x , $Y^{-1}([-\infty, x])$ est un événement où :

$$Y^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq x\}$$

Nous avons d'évidence $Y(\Omega) = [1, 2]$.

- Si $x < 1$, $Y^{-1}([-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \in [1, 2]$:

$$\begin{aligned} Y^{-1}([-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \mid (X^2 + 1)(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid -\sqrt{x-1} \leq X(\omega) \leq \sqrt{x-1}\} \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ &\text{puisque } X \text{ est une variable aléatoire} \end{aligned}$$

- Si $x > 2$, $Y^{-1}([-\infty, x]) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ainsi selon ces trois points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{x-1} \leq X \leq \sqrt{x-1}]) & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ F_X(\sqrt{x-1}) - F_X(-\sqrt{x-1}) & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ car :
 - F_Y est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) ;
 - F_Y est continue sur $]2, +\infty[$ (fonction constante égale à 1) ;
 - F_Y est continue sur $[1, 2]$ (différence et composition de $x \mapsto \pm\sqrt{x-1}$, $\mathcal{C}^0$ sur $[1, 2]$ et F_X , $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$) ;
 - $\lim_{1^-} F_Y = 0 = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1)$ donc F_Y est continue en 1 ;
 - $\lim_{2^-} F_Y = 1 = \lim_{2^+} F_Y = F_Y(2)$ donc F_Y est continue en 2.
- D'autre part F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 1 et 2 (à cause de la présence de la racine carrée).

La fonction F_Y possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons que $f_Y(1) = f_Y(2) = 0$, par exemple. Cela donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} (f_X(\sqrt{x-1}) + f_X(-\sqrt{x-1})) & \text{si } x \in]1, 2[\end{cases}$$

En rappelant que :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ 1/2 & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

quand $x \in]1, 2[$, $\sqrt{x-1} \in]0, 1[$ et $-\sqrt{x-1} \in]-1, 0[$ alors :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) & \text{si } x \in]1, 2[\end{cases}$$

Finalement :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x \in]1, 2[\end{cases}$$

10 Variable à densité et antirépartition

Par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

où f est une densité de X . Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

Comme X est à valeur dans $\mathbb{R}_+$, l'espérance qui existe vaut $\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} tf(t) dt$. Nous avons alors :

$$0 \leq x(1 - F(x)) \leq x \int_x^{+\infty} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt$$

avec :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} tf(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt - \int_{-\infty}^x tf(t) dt \right) \\ &= \mathbf{E}(X) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x tf(t) dt \\ &= \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le théorème d'encadrement nous permet alors de dire que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0}$$

MontrONS pour terminer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t]) dt$ converge et vaut $\mathbf{E}(X)$. Pour cela introduisons :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^\alpha \mathbf{P}([X > t]) dt = \int_0^\alpha (1 - F_X(t)) dt$$

Procédons par intégration par parties en posant :

$$u : t \mapsto 1 - F_X(t) \implies u' : t \mapsto -f(t) \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto 1 \iff v : t \mapsto t$$

avec $(u, v) \in (\mathcal{C}^1([0, \alpha], \mathbb{R}))^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \alpha > 0, \quad \int_0^\alpha \mathbf{P}([X > t]) dt &= \left([t(1 - F_X(t))]_0^\alpha + \int_0^\alpha tf(t) dt \right) \\ &= \alpha(1 - F_X(\alpha)) + \int_0^\alpha tf(t) dt \end{aligned}$$

par passage à la limite quand α tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \mathbf{P}([X > t]) dt &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\alpha(1 - F_X(\alpha)) + \int_0^\alpha tf(t) dt \right) \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} tf(t) dt \\ &= \mathbf{E}(X) \end{aligned}$$

Comme la limite existe et est finie :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t]) dt \text{ converge et vaut } \mathbf{E}(X)}$$

11 Vecteur aléatoire exponentiel

a Montrons pour commencer que Y_n est une variable aléatoire. Cela revient de **manière équivalente** à démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Y_n^{-1}([x, +\infty[) \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$$

Or pour tout réel x :

$$\begin{aligned} Y_n^{-1}([x, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) \geq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \geq x, \dots, X_n(\omega) \geq x\} \\ &= \bigcap_{k=1}^n \{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \geq x\} \\ &= \bigcap_{k=1}^n \underbrace{X_k^{-1}([x, +\infty[)}_{\in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}} \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \end{aligned}$$

par stabilité de $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ pour l'intersection

Ainsi Y_n est bien une variable aléatoire. Déterminons F_{Y_n} définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_{Y_n}(x) = \mathbf{P}([Y_n \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathbf{P}([Y_n > x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^n \mathbf{P}([X_k > x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

par indépendance des variables X_k

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^n (1 - F_{X_k}(x)) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &\quad \text{car toutes les variables } X_k \text{ suivent la même loi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda x}))^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$Y_n \hookrightarrow \varepsilon(n\lambda)$$

D'après le cours :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{(n\lambda)^2}$$

b C'est une question de cours "ultra-classique". A savoir, la **stabilité de la loi gamma pour la somme de variables indépendantes**, nous permet de dire que :

$$\bigoplus_{k=1}^n \Gamma(b, \tau_k) = \Gamma\left(b, \sum_{k=1}^n \tau_k\right)$$

et comme $\Gamma(b, 1) = \varepsilon \left(\frac{1}{b} \right)$ alors :

$$S \hookrightarrow \Gamma \left(\frac{1}{\lambda}, n \right)$$

12 Variable à densité et partie entière

- **Précisons la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$** puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ où pour tout $\omega \in \Omega$, $\lfloor X(\omega) \rfloor$ désigne la partie entière de $X(\omega)$.

Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et Y est une variable discrète. Nous avons pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor = k) \\ &= \mathbf{P}([k \leq X < k+1]) \\ &\quad \text{par définition de la partie entière} \\ &= F_X(k+1) - F_X(k) \\ &= 1 - e^{-\lambda(k+1)} - (1 - e^{-\lambda k}) \\ &= e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\ &= e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

En conclusion $Y \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(1 - e^{-\lambda})$, ce qui ne s'écrit pas ! On dira plutôt que :

$$Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$$

- **Déterminons la loi de $Z = X - Y$ (partie décimale ou mantisse de X).**

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ (partie décimale de x), par suite $Z(\Omega) = [0, 1[$.

- Si $x < 0$, $Z^{-1}([-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si $x \geq 1$, $Z^{-1}([-\infty, x]) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} Z^{-1}([-\infty, x]) &= (X - Y)^{-1}([-\infty, x]) \\ &= \{\omega \in \Omega \mid (X - Y)(\omega) \in]-\infty, x]\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) - Y(\omega) \in]-\infty, x]\} \cap \underbrace{\left(\biguplus_{k=0}^{+\infty} \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = k\} \right)}_{=\Omega} \\ &= \biguplus_{k=0}^{+\infty} (\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) - Y(\omega) \in]-\infty, x]\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = k\}) \\ &\quad \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\ &= \biguplus_{k=0}^{+\infty} (\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in]-\infty, x+k]\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [k, k+1[\}) \\ &= \biguplus_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [k, k+1[\}}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ puisque } X \text{ est une variable aléatoire}} \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ par stabilité de } \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ pour l'union} \end{aligned}$$

Ainsi selon ces trois points Z est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Z définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

Cela donne pour tout réel $x \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Z \leq x]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([k \leq X \leq x+k]) \\
 &\quad \text{par } \sigma\text{-additivité de } \mathbf{P} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(x+k) - F_X(k)) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - e^{-\lambda(x+k)} - (1 - e^{-\lambda k})) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda x}) \\
 &= (1 - e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^k \\
 &\quad \text{somme d'une série géométrique de raison } e^{-\lambda} \text{ avec } |e^{-\lambda}| < 1 \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- F_Z est continue sur $\mathbf{R}$ car :

- F_Z est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) ;
- F_Z est continue sur $[1, +\infty[$ (fonction constante égale à 1) ;
- F_Z est continue sur $[0, 1[$ (composition de $x \mapsto -\lambda x$, $\mathcal{C}^0$ sur $[0, 1[$ et $\exp \mathcal{C}^0$ sur $\mathbf{R}$) ;
- $\lim_{0^-} F_Z = 0 = \lim_{0^+} F_Z = F_Z(0)$ donc F_Z est continue en 0 ;
- $\lim_{1^-} F_Z = 1 = \lim_{1^+} F_Z = F_Z(1)$ donc F_Z est continue en 1.

- D'autre part F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf peut être en 0 et 1 (à détailler)

F_Z possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Z est une variable à densité dont une densité f_Z est obtenue par dérivation de F_Z sur $\mathbf{R}^*$ et nous poserons, par exemple, que $f_Z(0) = f_Z(1) = 0$. Cela donne :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \frac{\lambda e^{-x\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

13 Vecteur aléatoire à densité

a Déterminons l'espérance de S_n .

- Pour commencer, déterminons pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'espérance de X_i :

$$X_i \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ est convergente}$$

En cas de convergence $\mathbf{E}(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$. Or $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ est convergente si et seulement si $\int_0^\theta 3\left(\frac{x}{\theta}\right)^3 dx$ est convergente car f coïncide avec la fonction nulle en dehors de $[0, \theta]$. La convergence de $\int_0^\theta 3\left(\frac{x}{\theta}\right)^3 dx$ ne pose aucun problème en tant qu'intégrale d'une fonction monôme continue sur un segment, et :

$$\begin{aligned} \int_0^\theta 3\left(\frac{x}{\theta}\right)^3 dx &= \left[\frac{3x^4}{4\theta^3} \right]_0^\theta \\ &= \frac{3\theta}{4} \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{E}(X_i) = \frac{3\theta}{4}$.

Enfin S admet une espérance en tant que somme de n variables admettant chacune une espérance, qui vaut par **linéarité de l'espérance** :

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = \frac{3n\theta}{4}$$

• **Déterminons la variance de S_n .**

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par théorème :

$$\begin{aligned} X_i \text{ admet une variance} &\iff X_i^2 \text{ admet une espérance} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbf{E}(X_i^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ et par le théorème de **théorème de Huygens-Koenig** $\mathbf{V}(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) - (\mathbf{E}(X_i))^2$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ est convergente si, et seulement si l'intégrale $\int_0^\theta \frac{3x^4}{\theta^3} dx$ est convergente car f coïncide avec la fonction nulle en dehors de $[0, \theta]$. La convergence de $\int_0^\theta \frac{3x^4}{\theta^3} dx$ ne pose aucun problème en tant qu'intégrale d'une fonction polynomiale continue sur un segment, et :

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^4 dx &= \left[\frac{3x^5}{5\theta^3} \right]_0^\theta \\ &= \frac{3\theta^2}{5} \end{aligned}$$

En conclusion $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{E}(X_i^2) = \frac{3\theta^2}{5}$ et :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X_i) &= \frac{3\theta^2}{5} - \left(\frac{3\theta}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3\theta^2}{80} \end{aligned}$$

Enfin S_n admet une variance en tant que **somme** de n variables admettant chacune une variance, qui vaut par **indépendance** des n variables X_i :

$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \frac{3n\theta^2}{80}$$

b Montrons pour commencer que T_n est une variable aléatoire. Cela revient de manière équivalente à démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad T_n^{-1}([-\infty, x]) \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$$

Or pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 T_n^{-1}]-\infty, x] &= \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) \leq x\} \\
 &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq x, \dots, X_n(\omega) \leq x\} \\
 &= \bigcap_{k=1}^n \{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \leq x\} \\
 &= \bigcap_{k=1}^n \underbrace{X_k^{-1}]-\infty, x]}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \\
 &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\
 &\text{par stabilité de } \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ pour l'intersection}
 \end{aligned}$$

Ainsi T_n est bien une variable aléatoire. Déterminons F_{T_n} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_n}(x) = \mathbf{P}([T_n \leq x])$$

Nous avons $T_n(\Omega) = [0, \theta]$.

- Si $x < 0$:

$$F_{T_n}(x) = 0$$

- Si $x > \theta$:

$$F_{T_n}(x) = 1$$

- Si $x \in [0, \theta]$:

$$\begin{aligned}
 F_{T_n}(x) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) \\
 &= \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x) \\
 &\quad \text{par indépendance des variables } X_k \\
 &= (F_{X_1}(x))^n \\
 &\quad \text{car les variables } X_k \text{ suivent la même loi} \\
 &= \left(\int_0^x \frac{3t^2}{\theta^3} dt\right)^n \\
 &= \left(\frac{x}{\theta}\right)^{3n}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^{3n} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$ car :

- F_{T_n} est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) ;
- F_{T_n} est continue sur $]\theta, +\infty[$ (fonction constante égale à 1) ;
- F_{T_n} est continue sur $[0, \theta]$ (monôme) ;
- $\lim_{0^-} F_{T_n} = 0 = \lim_{0^+} F_{T_n} = F_{T_n}(0)$ donc F_{T_n} est continue en 0 ;
- $\lim_{\theta^-} F_{T_n} = 1 = \lim_{\theta^+} F_{T_n} = F_{T_n}(\theta)$ donc F_{T_n} est continue en θ .

- D'autre part F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et θ (je vous laisse détailler).

La fonction F_{T_n} possède toutes les propriétés requises pour affirmer que T_n est une variable à densité dont une densité f_{T_n} est obtenue par dérivation de F_{T_n} sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons que $f_{T_n}(0) = f_{T_n}(\theta) = 0$, par exemple. Cela donne :

$$f_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [\theta, +\infty[\\ \frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}} & \text{si } x \in]0, \theta[\end{cases}$$

14 Variables exponentielles et loi d'une différence, loi d'un min, loi d'un écart

• Loi de U .

Pour commencer déterminons la loi de $-Y$ qui reste une variable à densité car obtenue par un changement affine à partir de Y . Pour obtenir une de ses densité f_{-Y} nous utiliserons le fameux résultat suivant :

Il est très important de retenir le résultat suivant, que vous pouvez "claquer" pour un changement affine. Si $Y = aX + b$ et si f_X une densité de X continue sur $\mathbb{R} - I$ où $I = \{x_1, \dots, x_n\}$ ensemble fini de points éventuellement vide. Alors :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{ax_k + b \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela nous donne en posant que $f_{-Y}(0) = 0$:

$$\begin{aligned} f_{-Y}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{|-1|} f_X\left(\frac{x}{-1}\right) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme X et Y sont indépendantes, X et $-Y$ le restent et dans ce cas une densité f_{X-Y} de $X - Y$ (avec $(X - Y)(\Omega) = \mathbb{R}$) sera obtenue par le **théorème de convolution** de f_X et f_{-Y} . Soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t) dt$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} &f_X(t) f_{-Y}(x-t) \neq 0 \\ \iff &f_X(t) \neq 0 \text{ et } f_{-Y}(x-t) \neq 0 \\ \iff &t \geq 0 \text{ et } x-t < 0 \\ \iff &t > \max(0, x) \end{aligned}$$

ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X-Y}(x) = \int_{\max(0, x)}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t) dt$$

– Si $x \geq 0$, alors $\max(0, x) = x$ et :

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(x) &= \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt \\ &= \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{\lambda x - 2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} \left[-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t} \right]_x^{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 e^{\lambda x} \left(\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} \right) \\
&= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}
\end{aligned} \tag{1}$$

– Si $x < 0$, alors $\max(0, x) = 0$ et :

$$\begin{aligned}
f_{X-Y}(x) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{\lambda x - 2\lambda t} dt \\
&= \lambda^2 e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \\
&= \lambda^2 e^{\lambda x} \left[-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t} \right]_0^{+\infty} \\
&= \lambda^2 e^{\lambda x} \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \\
&= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x}
\end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi selon (1) et (2) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X-Y}(x) = f_U(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

On dira que U suit la **loi de Laplace** de paramètre λ ou **loi exponentielle bilatérale**.

- **Loi de V .**

Pour obtenir la loi de V nous nous servirons de l'**exercice 11** dont celui-ci n'est qu'un cas particulier, pour conclure que :

$$V \hookrightarrow \varepsilon(2\lambda)$$

- **Loi de Z .**

Pour terminer, déterminons la loi de $Z = |U|$ dont nous savons parfaitement d'après l'**exercice 8**, qu'elle reste une **variable à densité** d'ensemble image $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit F_Z la fonction de répartition de Z définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-x \leq U \leq x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_U(x) - F_U(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par **dérivation** de F_Z sur $\mathbb{R}^*$ on obtient une densité de Z notée f_Z , sans oublier de poser, par exemple, que $f_Z(0) = 0$:

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

car quand $x > 0$, $|-x| = |x| = x$. Finalement :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ce qui permet de dire que :

$$Z \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$$

15 Produit d'une variable normale et d'une variable à deux états, covariance

a Soit F_Z la fonction de répartition de Z , d'ensemble image $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

La famille $([Y = 1], [Y = -1])$ forme un **système complet d'événements**, et selon la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \quad F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([Z \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([XY \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([XY \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X \leq x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]), \\ &\quad \text{car les variables } X, Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \mathbf{P}([X \geq -x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\ &= (1 - \mathbf{P}([X < -x])) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\ &= \frac{1}{2}((1 - \Phi(-x)) + \Phi(x)) \\ &= \frac{1}{2}(\Phi(x) + \Phi(x)) \\ &= \Phi(x) \end{aligned}$$

Moralité :

$$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

b Nous **admettrons** que, comme dans le cas discret :

$$\text{Cov}(X, Z) = \mathbf{E}(XZ) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Z)$$

Tout d'abord, de par les lois suivies par X et Z , nous pouvons écrire que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Z) = 0$. La recherche de $\mathbf{E}(XZ)$ va nécessiter la recherche de la loi de XZ soit celle de X^2Y . Pour commencer $(XZ)(\Omega) = \mathbf{R}$. Soit F_{XZ} la fonction de répartition de XZ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_{XZ}(x) = \mathbf{P}([XZ \leq x])$$

En reprenant le **même** système complet d'événements $([Y = 1], [Y = -1])$ selon la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \quad F_{XZ}(x) &= \mathbf{P}([XZ \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([XZ \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([X^2Y \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2Y \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X^2 \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]), \\ &\quad \text{car les deux variables } X^2, Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \mathbf{P}([X^2 \geq -x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\ &= (1 - \mathbf{P}([X^2 < -x])) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \end{aligned}$$

- Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}
 F_{XZ}(x) &= (1 - \mathbf{P}([X^2 < -x])) \mathbf{P}([Y = -1]) + 0 \times \mathbf{P}([Y = 1]) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \mathbf{P}([- \sqrt{-x} < X < \sqrt{-x}])) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - (\Phi(\sqrt{-x}) - \Phi(-\sqrt{-x}))) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - (\Phi(\sqrt{-x}) - (1 - \Phi(\sqrt{-x})))) \\
 &= \frac{1}{2} (2 - 2\Phi(\sqrt{-x})) \\
 &= 1 - \Phi(\sqrt{-x})
 \end{aligned}$$

- Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 F_{XZ}(x) &= 1 \times \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \mathbf{P}([- \sqrt{x} < X < \sqrt{x}])) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + (\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}))) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + (\Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})))) \\
 &= \Phi(\sqrt{x})
 \end{aligned}$$

On pourrait démontrer comme d'habitude que F_{XZ} possède les fameuses propriétés de classe permettant d'affirmer que XZ est une variable à densité, mais pour changer un peu de méthode, dérivons **directement** F_{XZ} sur $\mathbf{R}^*$, nous obtenons ainsi f_{XZ} une fonction dont on démontrera sans mal que c'est une densité de probabilité, et nous poserons que $f_{XZ}(0) = 0$ soit :

$$\begin{aligned}
 f_{XZ}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} f_X(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Démontrons, rapidement que f_{XZ} représente une densité de probabilité.

La parité de cette fonction nous permet d'aller plus vite en étudiant simplement la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx$. En prenant la peine de réécrire l'intégrande, nous allons découvrir que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/2} e^{-\frac{x}{2}}}{2 \times 2^{1/2} \sqrt{\pi}} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2 \times 2^{1/2} \Gamma(1/2)} dx \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

car $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/2} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{1/2} \sqrt{\pi}} dx$ représente **l'intégrale de la densité d'une variable suivant la loi** $\Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$ qui vaut 1. En conclusion l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ converge et vaut 1/2, ce qui

entraîne $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XZ}$ converge et vaut 1 (par Chasles).

La variable XZ admet une **espérance** si, et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XZ}(x) dx$ converge, soit si, et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ converge, par imparité de l'intégrande. Rappelons à cet effet que $\int_{-\infty}^0 x f_{XZ}(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} x f_{XZ}(x) dx$ **sont de même nature, opposée en cas de convergence**. Or :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{3/2} \sqrt{\pi}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{3/2} \Gamma(3/2)} dx \\ &\quad \text{car } \Gamma(3/2) = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car $\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{3/2} \Gamma(3/2)} dx$ représente **l'intégrale de la densité d'une variable suivant la loi** $\Gamma\left(2, \frac{3}{2}\right)$ qui vaut 1. En conclusion l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ converge et vaut 1/2, ce qui entraîne $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XZ}(x) dx$ converge et vaut 0 (par Chasles). Ainsi XZ admet une espérance qui est nulle. Moralité :

$$\boxed{\text{Cov}(X, Z) = 0}$$

16 Loi gamma et loi de Poisson

Pour $\alpha \in \mathbf{N}^*$ on définit la prédicat :

$$\mathcal{P}(\alpha) : " \mathbf{P}([Y < \alpha]) = \mathbf{P}([X > \lambda]) "$$

- L'initialisation pour $\alpha = 1$ ne pose aucun problème, car :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < 1]) &= \mathbf{P}([Y = 0]) \\ &= e^{-\lambda} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} dt &= [-e^{-t}]_{\lambda}^{+\infty} \\ &= e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- **Hérédité.**

- **(H)** Supposons que pour α fixé dans $\mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(\alpha)$ soit vraie. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < \alpha + 1]) &= \mathbf{P}([Y < \alpha]) + \mathbf{P}([Y = \alpha]) \\ &= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} dt + \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\alpha}}{\alpha!} \text{ selon (H)} \end{aligned} \quad (3)$$

Introduisons :

$$\begin{aligned} \varphi :]\lambda, +\infty[&\longrightarrow \mathbf{R} \\ \beta &\longmapsto \varphi(\beta) = \int_{\lambda}^{\beta} \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} dt \end{aligned}$$

Procédons par intégration par parties en posant :

$$u : t \mapsto e^{-t} \implies u' : t \mapsto -e^{-t} \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \iff v : t \mapsto \frac{t^{\alpha}}{\alpha!}$$

avec $(u, v) \in (\mathcal{C}^1([\lambda, \beta], \mathbb{R}))^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \beta > \lambda, \varphi(\beta) &= \left[\frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} \right]_\lambda^\beta + \int_\lambda^\beta \frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} dt \\ &= \frac{e^{-\beta} \beta^\alpha}{\alpha!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^\alpha}{\alpha!} + \int_\lambda^\beta \frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} dt \end{aligned}$$

Enfin par passage à la limite, quand β tend vers l'infini, nous obtenons, du fait de la convergence de l'intégrale en jeu :

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-\beta} \beta^\alpha}{\alpha!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^\alpha}{\alpha!} + \int_\lambda^\beta \frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} dt \right) = -\frac{e^{-\lambda} \lambda^\alpha}{\alpha!} + \int_\lambda^{+\infty} \frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} dt$$

donc

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \varphi(\beta) = -\frac{e^{-\lambda} \lambda^\alpha}{\alpha!} + \int_\lambda^{+\infty} \frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} dt \quad (4)$$

D'où selon (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < \alpha + 1]) &= -\frac{e^{-\lambda} \lambda^\alpha}{\alpha!} + \int_\lambda^{+\infty} \frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} dt + \frac{e^{-\lambda} \lambda^\alpha}{\alpha!} \\ &= \int_\lambda^{+\infty} \frac{e^{-t} t^\alpha}{\alpha!} dt \\ &= \mathbf{P}([X > \lambda]) \end{aligned}$$

Ainsi la proposition est transmissible ($\mathcal{P}(\alpha) \implies \mathcal{P}(\alpha + 1)$), ce qui la rend héréditaire pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$:

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([Y < \alpha]) = \mathbf{P}([X > \lambda])$

17 Produit de convolution

a Pour commencer déterminons une densité de $-tX$ qui **reste** une variable aléatoire à densité car obtenue par **transformation affine à partir de** X qui est une variable à densité. En nous servant encore une fois du résultat de l'**exercice 14** il vient :

$$f_{-tX}(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} \exp\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Les variables X et Y étant **indépendantes**, les variables $-tX$ et Y le restent. C'est la raison pour laquelle une densité de $-tX + Y$ sera obtenue par le **produit de convolution** des densités de $-tX$ et de Y . Notons-là h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-u) f_{-tX}(u) du$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} &f_Y(x-u) f_{-tX}(u) \neq 0 \\ \iff &f_Y(x-u) \neq 0 \text{ et } f_{-tX}(u) \neq 0 \\ \iff &x-u \geq 0 \text{ et } u < 0 \\ \iff &u < \min(0, x) \end{aligned}$$

ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\min(0, x)} f_Y(x-u) f_{-tX}(u) du$$

- Si $x \leq 0$, alors $\min(0, x) = x$ et :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{t} e^{-(x-u)} e^{\frac{u}{t}} du \\
 &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{t} e^{-x+u+\frac{u}{t}} du \\
 &= \frac{1}{t} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{u(1+\frac{1}{t})} du \\
 &= \frac{1}{t} e^{-x} \frac{t}{t+1} \left[e^{u(1+\frac{1}{t})} \right]_{-\infty}^x \\
 &= \frac{e^{-x}}{t+1} \exp\left(\frac{x(t+1)}{t}\right) \\
 &= \frac{\exp\left(\frac{x}{t}\right)}{t+1}
 \end{aligned} \tag{5}$$

- Si $x > 0$, alors $\min(0, x) = 0$ et :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t} e^{-(x-u)} e^{\frac{u}{t}} du \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t} e^{-x+u+\frac{u}{t}} du \\
 &= \frac{1}{t} e^{-x} \int_{-\infty}^0 e^{u(1+\frac{1}{t})} du \\
 &= \frac{1}{t} e^{-x} \frac{t}{t+1} \left[e^{u(1+\frac{1}{t})} \right]_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{e^{-x}}{t+1} (1 - 0) \\
 &= \frac{e^{-x}}{t+1}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Selon (5) et (6) :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b

Notons f_Z une densité de Z et F_Z la fonction de répartition associée à Z , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

avec $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y}{X} \leq x\right]\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([Y - xX \leq 0]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
 &\quad \text{car } X > 0 \text{ p.s.} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^0 h(u) du & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{u}{t}}}{x+1} du & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left[\frac{xe^{\frac{x}{x+1}}}{x+1} \right]_{-\infty}^0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les propriétés de F_Z permettent de dire que Z est une **variable à densité** dont une densité f_Z est obtenue par dérivation de F_Z sur $\mathbf{R}^*$ et nous poserons, par exemple, que $f_Z(0) = 0$, soit :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

 Notons que :

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{\frac{X+Y}{X}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{Y}{X}} \\
&= \frac{1}{1 + Z}
\end{aligned}$$

et que $U(\Omega) =]0, 1]$ car $Z(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$. Notons F_U la fonction de répartition associée de U , définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_U(x) = \mathbf{P}([U \leq x])$$

alors :

$$\begin{aligned}
F_U(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{1+Z} \leq x\right]\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[1+Z \geq \frac{1}{x}\right]\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[Z \geq \frac{1}{x} - 1\right]\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\left[Z < \frac{1}{x} - 1\right]\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - F_Z\left(\frac{1}{x} - 1\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{\frac{1}{x}-1}{(\frac{1}{x}-1)+1} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&\quad \text{car quand } x \in]0, 1[, \quad \left(\frac{1}{x} - 1\right) \in \mathbf{R}_+^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1-x}{\frac{1}{x}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$$

18 Loi log-normale.

a Tout d'abord $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}_+^*)$. Examinons donc les problèmes de convergence en 0 et en $+\infty$. Pour cela introduisons le changement de variable $u = \psi(t) = \frac{\ln t}{a}$ ce qui entraîne que $du = \frac{dt}{at}$ où ψ réalise une bijection (croissante) de dérivée non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ vers $\mathbf{R}$. Par conséquent et les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ sont de **même nature, égales en cas de convergence**. Or il est de notoriété publique que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ converge, c'est l'**intégrale de Gauss**, (égale à 1).

Conclusion :

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt \text{ converge et vaut 1}$$

b La continuité de h sur $\mathbf{R}_-$ étant triviale puisqu'elle y coïncide avec la fonction nulle, ainsi que sa continuité sur $\mathbf{R}_+^*$ (en tant que produit, quotient et composée de fonctions continues ... à détailler), sa positivité sur $\mathbf{R}$ et le résultat de la question précédente concernant la convergence et la valeur de $\int_{\mathbf{R}} f$, permettent de dire que :

$$h \text{ est une densité de probabilité}$$

c X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} th(t) dt$ est convergente soit si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt$ est convergente. En appliquant le même changement de variable qu'à la première question $u = \frac{\ln t}{a}$, nous pouvons dire que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ua}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ sont de **même nature et égales en cas de convergence**. Or avec un peu de manipulations élémentaires nous obtenons, sous réserve de convergence, que :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ua}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2 - 2ua}{2}\right) du \\
&\quad \text{par propriété de exp} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}((u-a)^2 - a^2)\right) du \\
&= \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(u-a)^2\right) du \\
&\quad \text{par propriété de exp}
\end{aligned}$$

Or en introduisant une variable N suivant la loi normale de paramètres a (espérance) et 1 (variance), l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(u-a)^2\right) du$ représente celle d'une densité de N . Ainsi l'intégrale converge et vaut 1.

Par théorème, l'intégrale $\frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(u-a)^2\right) du$ converge et vaut $e^{\frac{a^2}{2}}$ ce qui entraîne que la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ua}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ qui vaut $e^{\frac{a^2}{2}}$ et :

$$\mathbf{E}(X) = e^{\frac{a^2}{2}}$$

d

Tout d'abord, nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.

Comme la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{a}$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, nous pouvons dire que la fonction $\varphi \circ X$ notée Y est une variable à densité.

Déterminons la fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) &= \mathbf{P}([X \leq e^{ax}]) \\ &\text{car } \exp \text{ est une bijection croissante sur } \mathbb{R} \\ &= F_X(e^{ax}) \\ &= \int_0^{e^{ax}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt \end{aligned}$$

La fonction F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de $x \mapsto e^{ax}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de F_X dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}$ nous obtenons f_Y une densité de Y définie par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) &= ae^{ax} h(e^{ax}) \\ &= ae^{ax} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ae^{ax}} \exp\left(-\frac{(\ln(e^{ax}))^2}{2a^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

et nous pouvons conclure que :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

e

Comme la fonction $\psi : x \mapsto \frac{1}{x}$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, nous pouvons dire que la fonction $\psi \circ X$, notée Z , est une variable à densité.

Déterminons la fonction de répartition F_Z définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

où $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$. Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[X \geq \frac{1}{x}\right]\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

F_Z est de classe sur $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf peut être en 0. Par dérivation de F_Z sur $\mathbf{R}^*$ nous obtenons f_Z une densité de Z et nous poserons que $f_Z(0) = 0$, soit :

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -\left(-\frac{1}{x^2}\right) h\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{(\ln \frac{1}{x})^2}{2a^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{ax\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2a^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

Z suit une loi log-normale de paramètre $a > 0$

19 Loi d'un produit et loi d'un quotient

a C'est immédiat..., l'intégrale en jeu étant une **intégrale de Riemann** de paramètre $2 > 1$, donc convergente.

b Notons que Y et $-Y$ sont obtenues par des changements de variables dont les propriétés nous permettent de dire qu'elles restent des variables à densité (voir les exercices précédents).

• Loi de Y .

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$. Notons F_Y la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}([\ln X \leq x]) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}([X \leq e^x]) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_X(e^x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par dérivation de F_Y sur $\mathbf{R}^*$ on obtient une densité de Y notée f_Y , sans oublier de poser que $f_Y(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x f(e^x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x}{e^{2x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et :

$$Y \hookrightarrow \varepsilon(1)$$

• Loi de $-Y$.

Nous avons $(-Y)(\Omega) = \mathbf{R}_-^*$ et en reprenant le résultat du cours (transformation affine) :

$$f_Z(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



• **Loi de U .**

Nous avons :

$$\begin{aligned} U &= X_1 X_2 \\ \iff U &= e^{Y_1 + Y_2} \\ \iff Y_1 + Y_2 &= \ln U \end{aligned}$$

où les deux variables Y_1 et Y_2 sont **indépendantes** (du fait de l'indépendance de X_1 et X_2) et de même loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $Y_1 + Y_2 \hookrightarrow \Gamma(1, 2)$ et une densité de $Y_1 + Y_2$ notée $f_{Y_1+Y_2}$ sera donnée par :

$$f_{Y_1+Y_2}(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Soit F_U la fonction de répartition de U définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_U(x) = \mathbf{P}([U \leq x])$$

et comme $U(\Omega) =]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \mathbf{P}([e^{Y_1+Y_2} \leq x]) & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \mathbf{P}([Y_1 + Y_2 \leq \ln x]) & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ F_{Y_1+Y_2}(\ln x) & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Par dérivation de F_U sur $\mathbf{R} - \{1\}$ on obtient une densité de U notée f_U , sans oublier de poser que $f_U(1) = 0$, par exemple.

$$\begin{aligned} f_U(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} f_{Y_1+Y_2}(\ln x) & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} e^{-\ln x} \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

soit :

$$f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• **Loi de V .**

Nous avons $V(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned} V &= \frac{X_1}{X_2} \\ &= \frac{e^{Y_1}}{e^{Y_2}} \\ &= e^{Y_1 - Y_2} \end{aligned}$$

Cherchons une densité $f_{Y_1 - Y_2}$ de $Y_1 - Y_2$ avec Y_1 et $-Y_2$ indépendantes du fait celle de Y_1 et Y_2 . Cela fait que nous allons utiliser le **théorème de convolution** pour l'obtenir. $f_{Y_1 - Y_2}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_{Y_1 - Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(x - t) f_{-Y_2}(t) dt$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 & f_{Y_1}(x-t) f_{-Y_2}(t) \neq 0 \\
 \iff & f_{Y_1}(x-t) \neq 0 \text{ et } f_{-Y_2}(t) \neq 0 \\
 \iff & x-t \geq 0 \text{ et } t < 0 \\
 \iff & t < \min(0, x)
 \end{aligned}$$

ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Y_1-Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{\min(0, x)} f_{Y_1}(x-t) f_{-Y_2}(t) dt$$

– Si $x \leq 0$, alors $\min(0, x) = x$ et :

$$\begin{aligned}
 f_{Y_1-Y_2}(x) &= \int_{-\infty}^x e^{-(x-t)} e^t dt \\
 &= \int_{-\infty}^x e^{2t-x} dt \\
 &= e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{2t} dt \\
 &= e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{-\infty}^x \\
 &= e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \\
 &= \frac{e^x}{2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

– Si $x > 0$, alors $\min(0, x) = 0$ et :

$$\begin{aligned}
 f_{Y_1-Y_2}(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt \\
 &= e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{e^{-x}}{2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Selon (7) et (8) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Y_1-Y_2}(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Soit F_V la fonction de répartition de V définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_V(x) = \mathbf{P}([V \leq x])$$

et comme $V(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
 F_V(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}([e^{Y_1-Y_2} \leq x]) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}([Y_1 - Y_2 \leq \ln x]) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 &\quad \text{car } \ln \text{ est une bijection croissante} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_{Y_1-Y_2}(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par dérivation de F_V sur $\mathbb{R}^*$ on obtient une densité de V notée f_V , sans oublier de poser que $f_V(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
 f_V(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} f_{Y_1-Y_2}(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \frac{e^{-|\ln x|}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2x} e^{\ln x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{2x} e^{-\ln x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

c.ii

• **Espérance de $\sqrt[3]{U}$.**

Selon le **théorème de transfert** $\sqrt[3]{U}$ admet une espérance si, et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_U(x) dx$ est convergente. En cas de convergence $\mathbf{E}(\sqrt[3]{U}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_U(x) dx$. Or :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_U(x) dx \text{ converge} \\ \iff & \int_1^{+\infty} \sqrt[3]{x} \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) dx \text{ converge car } f = 0 \text{ sur }]-\infty, 1] \\ \iff & \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5/3}} dx \text{ converge} \end{aligned}$$

Or comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1,1} \frac{\ln x}{x^{5/3}} = 0$ par **croissance comparée** (puissance-log). Donc $\frac{\ln x}{x^{5/3}} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^{1,1}} \right)$ avec $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,1}}$ convergente en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $1.1 > 1$. Le **théorème de négligeabilité appliqué aux fonctions positives** permet de conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5/3}} dx$ converge, et donc $\sqrt[3]{U}$ admet une espérance. Voyons rapidement le calcul :

$$\begin{aligned} \forall \alpha > 1, \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^{5/3}} dx &= -\frac{3}{2} \frac{\ln \alpha}{(\sqrt[3]{\alpha})^2} - \int_1^\alpha \left(-\frac{3}{2(\sqrt[3]{x})^5} \right) dx \\ &\quad \text{par IPP en dérivant } \ln \dots \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{\ln \alpha}{(\sqrt[3]{\alpha})^2} \right) + \frac{9}{4} \left(\frac{-1 + (\sqrt[3]{\alpha})^2}{(\sqrt[3]{\alpha})^2} \right) \end{aligned}$$

Après passage à la limite quand α tend vers l'infini, nous obtenons que :

$$\mathbf{E}(\sqrt[3]{U}) = \frac{9}{4}$$

• **Espérance de $\sqrt[3]{V}$.**

Selon le **théorème de transfert** $\sqrt[3]{V}$ admet une espérance si, et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_V(x) dx$ est convergente. En cas de convergence $\mathbf{E}(\sqrt[3]{V}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_V(x) dx$. Or :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_V(x) dx \text{ converge} \\ \iff & \int_0^1 \sqrt[3]{x} \frac{1}{2} dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \sqrt[3]{x} \frac{1}{2x^2} dx \text{ convergent car } f = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_-^* \\ \iff & \int_0^1 \frac{1}{2x^{-1/3}} dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{2(\sqrt[3]{x})^5} dx \text{ convergent} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{2x^{-1/3}} dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^{5/3}} dx \text{ convergent}$$

Ces deux intégrales sont convergentes en tant qu'**intégrales de Riemann de paramètres** respectifs $-1/3 < 1$ et $5/3 > 1$. Donc $\sqrt[3]{V}$ admet une espérance. Voyons rapidement le calcul :

$$\forall \alpha > 1, \quad \int_\alpha^1 \frac{1}{2x^{-1/3}} dx = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} (\sqrt[3]{\alpha})^4 \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 \frac{1}{2x^{-1/3}} dx = \frac{3}{8} \quad (9)$$

et :

$$\forall \beta > 1, \quad \int_1^\beta \frac{1}{2(\sqrt[3]{x})^5} dx = \frac{3-1+(\sqrt[3]{\beta})^2}{4(\sqrt[3]{\beta})^2} \Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{2(\sqrt[3]{x})^5} dx = \frac{3}{4} \quad (10)$$

Ainsi selon (9) et (10) :

$$\mathbf{E}(\sqrt[3]{V}) = \int_\alpha^1 \frac{1}{2x^{-1/3}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2(\sqrt[3]{x})^5} dx = \frac{9}{8}$$

• **Espérance de $\sqrt[3]{UV}$.**

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{UV} &= \sqrt[3]{X_1 X_2 \times \frac{X_1}{X_2}} \\ &= \sqrt[3]{X_1^2} \end{aligned}$$

Selon le **théorème de transfert** $\sqrt[3]{X_1^2}$ admet une espérance si, et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x^2} f(x) dx$ est convergente. En cas de convergence $\mathbf{E}(\sqrt[3]{UV}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x^2} f(x) dx$. Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f(x) dx \text{ converge}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \sqrt[3]{x^2} \frac{1}{x^2} dx &\text{ converge car } f = 0 \text{ sur }]-\infty, 1] \\ \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^4} dx &\text{ converge} \\ \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4/3}} dx &\text{ converge} \end{aligned}$$

Cette intégrale est convergente en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $4/3 > 1$. Donc $\sqrt[3]{UV}$ admet une espérance. Voyons rapidement le calcul :

$$\forall \alpha > 1, \quad \int_1^\alpha \frac{1}{x^{4/3}} dx = 3 \left(\frac{-1 + \sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha}} \right) \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^\alpha \frac{1}{x^{4/3}} dx = 3$$

Ainsi :

$$\mathbf{E}(\sqrt[3]{UV}) = 3$$

Enfin comme :

$$\mathbf{E}(\sqrt[3]{U}) \mathbf{E}(\sqrt[3]{V}) \neq \mathbf{E}(\sqrt[3]{UV})$$

les variables $\sqrt[3]{U}$ et $\sqrt[3]{V}$ **ne sont pas indépendantes** ce qui entraîne que les variables U et V **ne sont pas indépendantes**.

20 Loi normale et loi du chi-deux

a.i Nous avons $\left(\frac{X^2}{2}\right)(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Introduisons :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Comme g n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ nous ne pouvons pas dire pour le moment que $\frac{X^2}{2}$ reste une variable à densité. Montrons alors pour commencer que $X^2/2$ est une variable aléatoire. Nous avons $\left(\frac{X^2}{2}\right)(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

- Si $x < 0$:

$$\left(\frac{X^2}{2}\right)^{-1}([-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

- Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{X^2}{2}\right)^{-1}([-\infty, x]) &= \left\{ \omega \in \Omega \mid \left(\frac{X^2}{2}\right)(\omega) \leq x \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega \mid -\sqrt{2x} \leq X(\omega) \leq \sqrt{2x} \right\} \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

puisque X est une variable aléatoire

Ainsi selon ces deux points $\frac{X^2}{2}$ est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition $F_{\frac{X^2}{2}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{\frac{X^2}{2}}(x) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{X^2}{2} \leq x\right]\right)$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_{\frac{X^2}{2}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{2x} \leq X \leq \sqrt{2x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $F_{\frac{X^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :
 - $F_{\frac{X^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction nulle) ;
 - $F_{\frac{X^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (différence et composition de $x \mapsto \sqrt{2x}$, $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\Phi \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$) ;
 - $\lim_{0^-} F_{\frac{X^2}{2}} = 0 = \lim_{0^+} F_{\frac{X^2}{2}} = F_Y(0)$, donc $F_{\frac{X^2}{2}}$ est continue en 0.
- D'autre part $F_{\frac{X^2}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 (à cause de la présence de la racine carrée).

Par suite $F_{\frac{X^2}{2}}$ possède toutes les propriétés requises pour affirmer que $X^2/2$ est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de $F_{\frac{X^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons, par exemple, que

$f_{\frac{X^2}{2}}(0) = 0$, soit :

$$\begin{aligned} f_{\frac{X^2}{2}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma(\frac{1}{2}) 1^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{X^2}{2} \hookrightarrow \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right)}$$

a.ii

Tout d'abord rappelons que :

$$\boxed{\heartsuit\heartsuit} \begin{cases} \Gamma(b, \tau_1) \boxplus \Gamma(b, \tau_2) = \Gamma(b, \tau_1 + \tau_2) \\ \Gamma(b, 1) = \varepsilon\left(\frac{1}{b}\right) \end{cases}$$

Comme l'énoncé suppose que les variables X^2 et Y^2 sont indépendantes, par **stabilité de la gamma pour la somme de variables indépendantes** :

$$\boxed{\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} \hookrightarrow \Gamma(1, 1) = \varepsilon(1)}$$

b.i

• **Loi de $\overline{X}$.**

Pour commencer rappelons que :

$$\boxed{\heartsuit\heartsuit} \boxplus_{k=1}^n \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$$

Comme $\forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $\frac{X_k}{3} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{9}\right)$ du fait que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \begin{cases} \mathbf{E}\left(\frac{X_k}{3}\right) = \frac{1}{3} \mathbf{E}(X_k) = 0 \\ \mathbf{V}\left(\frac{X_k}{3}\right) = \frac{1}{9} \mathbf{V}(X_k) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

alors par **stabilité de la normale pour la somme de variables indépendantes** :

$$\boxed{\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3}\right)}$$

• **Loi de U_1 .**

Pour commencer vous devez savoir que :

$$\boxed{\heartsuit\heartsuit} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \iff -X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

car $-X(\Omega) = \mathbb{R}$ et il suffit d'appliquer la formule du changement de variable affine. Alors comme $\frac{X_1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X_2}{\sqrt{2}}$ sont **indépendantes**, par **stabilité de la normale pour la somme de variables indépendantes** :

$$U_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

car :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(U_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{E}(X_1) - \mathbf{E}(X_2)) = 0 \\ \mathbf{V}(U_1) = \frac{1}{2} (\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)) = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

De même par **indépendance** des trois variables X_k , pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, par **stabilité de la normale pour la somme de variables indépendantes** :

$$U_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

car :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(U_2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) - 2\mathbf{E}(X_3)) = 0 \\ \mathbf{V}(U_2) = \frac{1}{6} (\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 4\mathbf{V}(X_3)) = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

b.ii

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (U_1^2 + U_2^2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (X_1 - X_2)^2 + \frac{1}{6} (X_1 + X_2 - 2X_3)^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} X_1^2 - \frac{1}{3} X_1 X_2 + \frac{1}{3} X_2^2 - \frac{1}{3} X_1 X_3 - \frac{1}{3} X_2 X_3 + \frac{1}{3} X_3^2 \end{aligned} \quad (11)$$

et :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(X_k - \left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \right) \right)^2 \\ &= -\frac{1}{3} X_2 X_1 - \frac{1}{3} X_2^2 - \frac{1}{3} X_2 X_3 + \frac{1}{2} X_3^2 - \frac{1}{3} X_3 X_1 - \frac{1}{3} X_3 X_2 \\ &\quad - \frac{1}{3} X_3^2 + \frac{1}{2} X_1^2 - \frac{1}{3} X_1 X_2 - \frac{1}{3} X_1 X_3 - \frac{1}{3} X_1^2 + \frac{1}{2} X_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} X_1^2 + \frac{1}{3} X_1 X_2 + \frac{1}{6} X_2^2 + \frac{1}{3} X_1 X_3 + \frac{1}{3} X_2 X_3 + \frac{1}{6} X_3^2 \\ &= \frac{1}{3} X_1^2 - \frac{1}{3} X_1 X_2 + \frac{1}{3} X_2^2 - \frac{1}{3} X_1 X_3 - \frac{1}{3} X_2 X_3 + \frac{1}{3} X_3^2 \end{aligned}$$

Selon (11) et (??), nous avons bien :

$$V = \frac{1}{2} (U_1^2 + U_2^2)$$

b.iii

Selon le **a.ii**, $\forall k \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ donc $\frac{U_k^2}{2} \hookrightarrow \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et par **stabilité de la loi gamma pour la somme de variables indépendantes** :

$$V \hookrightarrow \varepsilon(1)$$

c

Pour commencer vous devez savoir que :

$$\heartsuit \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies -X \hookrightarrow \mathcal{N}(-\mu, \sigma^2)$$

car $(-X)(\Omega) = \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F_{-X}(x) &= \mathbf{P}([-X \leq x]) \\ &= \mathbf{P}([X \geq -x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X < -x]) \\ &= 1 - F_X(-x) \\ &= 1 - (1 - F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

Alors comme $X_1/\sqrt{2}$ et $X_2/\sqrt{2}$ sont **indépendantes**, par **stabilité de la normale pour la somme de variables indépendantes** :

$$U_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

car :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(U_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{E}(X_1) - \mathbf{E}(X_2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mu - \mu) = 0 \\ \mathbf{V}(U_1) = \frac{1}{2} (\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)) = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{2} = \sigma^2 \end{cases}$$

De même par **indépendance** des trois variables X_k , pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et toujours **stabilité de la normale pour la somme de variables indépendantes** :

$$U_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

car :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(U_2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) - 2\mathbf{E}(X_3)) = \frac{1}{\sqrt{6}} (0 + 0 - 0) = 0 \\ \mathbf{V}(U_2) = \frac{1}{6} (\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 4\mathbf{V}(X_3)) = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + 4\sigma^2}{6} = \sigma^2 \end{cases}$$

Soit $k \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Déterminons la loi de $U_k^2/2$, avec $(U_k^2/2)(\Omega) = \mathbb{R}_+$. En cette fin de correction ne soyez pas choqués que je "zappe" la démo montrant que $U_k^2/2$ reste une variable à densité. Allons-y !

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\frac{U_k^2}{2}}(x) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{U_k^2}{2} \leq x\right]\right)$$

soit :

$$\begin{aligned} F_{\frac{U_k^2}{2}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([U_k^2 \leq 2x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{2x} \leq U_k \leq \sqrt{2x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[-\frac{\sqrt{2x}}{\sigma} \leq \frac{U_k - 0}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{2x}}{\sigma}\right]\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[-\frac{\sqrt{2x}}{\sigma} \leq U_k^* \leq \frac{\sqrt{2x}}{\sigma}\right]\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &\quad \text{où } U_k^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \Phi\left(\frac{\sqrt{2x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{2x}}{\sigma}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi\left(\frac{\sqrt{2x}}{\sigma}\right) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Par **dérivation** de $F_{\frac{U_k^2}{2}}$ sur $\mathbf{R}^*$ on obtient une fonction notée $f_{\frac{U_k^2}{2}}$ dont on montrera qu'elle représente une densité de probabilité, sans oublier de poser, par exemple, que $f_{\frac{U_k^2}{2}}(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f_{\frac{U_k^2}{2}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\sqrt{2} \frac{1}{2\sigma\sqrt{x}} f_{U_k}\left(\frac{\sqrt{2x}}{\sigma}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2x}}{\sigma}\right)^2\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}) (\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\forall k \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, $\frac{U_k^2}{2} \hookrightarrow \Gamma\left(\sigma^2, \frac{1}{2}\right)$ et par **indépendance** des variables $\frac{U_k^2}{2}$:

$$V \hookrightarrow \Gamma(\sigma^2, 1) = \varepsilon\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

21 Loi de Laplace et loi de min sur max

a Notons que U et V sont obtenues par des changements de variables dont les propriétés nous permettent de dire qu'elles **restent** des variables à densité (voir les exercices précédents).

- **Loi de U .**

Soit F_U la fonction de répartition de U définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_U(x) = \mathbf{P}([U \leq x])$$

et comme $U(\Omega) = \mathbf{R}_+$ il vient :

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \begin{cases} \mathbf{P}([\ln X \leq x]) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbf{P}([X \leq e^x]) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(e^x) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par **dérivation** de F_U sur $\mathbf{R}^*$ on obtient une densité de U notée f_U , sans oublier de poser que $f_U(0) = 0$, par exemple, elle définie par :

$$f_U(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- **Loi de V.**

Comme X et Y suivent la même loi, nous pouvons directement utiliser la formule donnant l'expression d'une densité d'une variable obtenue par **transformation affine**. Ce qui donne immédiatement que :

$$f_V(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et :

$$V \hookrightarrow \varepsilon(1)$$

b

Nous avons :

$$\begin{aligned} Z &= \ln\left(\frac{X}{Y}\right) \\ &= \ln X - \ln Y \\ &= U + V \end{aligned}$$

avec U et V indépendantes

Notons f_{U+V} une densité de $U + V$ obtenue par le **théorème de convolution** des densités de U et de V . Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} &f_U(t) f_V(x-t) \neq 0 \\ \iff &f_U(t) \neq 0 \text{ et } f_V(x-t) \neq 0 \\ \iff &t < 0 \text{ et } x-t \geq 0 \\ \iff &t < \min(0, x) \end{aligned}$$

ainsi :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{\min(0, x)} f_U(t) f_V(x-t) dt$$

- si $x < 0$, alors $\min(0, x) = x$ et :

$$\begin{aligned} f_{U+V}(x) &= \int_{-\infty}^x e^t e^{-(x-t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^x e^{2t-x} dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{2t} dt \\ &= e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{-\infty}^x \\ &= e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \\ &= \frac{e^x}{2} \end{aligned} \tag{12}$$

- si $x \geq 0$, alors $\min(0, x) = 0$ et :

$$\begin{aligned} f_{U+V}(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt \\ &= e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

Selon (12) et (13) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{U+V}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

On dit que $U + V$ suit la **loi de Laplace** (déjà vue) et Z est donc une variable symétrique puisque "sa" densité est **paire**.

c.i

Tout d'abord :

$$\frac{I}{S} = \begin{cases} \frac{X}{Y} & \text{si } X \leq Y \\ \frac{Y}{X} & \text{si } X > Y \end{cases}$$

Introduisons alors le **système complet d'événements** $([X \leq Y], [X > Y]) = ([X < Y], [X > Y])$ car $[X = Y] = \emptyset$ "en continu" ! Selon la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1], \quad \mathbf{P}\left(\left[\frac{I}{S} \leq x\right]\right) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{I}{S} \leq x\right] \cap [X < Y]\right) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{I}{S} \leq x\right] \cap [X > Y]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{Y} \leq x\right] \cap [X < Y]\right) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y}{X} \leq x\right] \cap [X > Y]\right) \\ &= \mathbf{P}([X \leq xY] \cap [X < Y]) + \mathbf{P}([Y \leq xX] \cap [Y < X]) \\ &= \mathbf{P}([X \leq xY]) + \mathbf{P}([Y \leq xX]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{Y} \leq x\right]\right) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y}{X} \leq x\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([\ln X - \ln Y \leq \ln x]) + \mathbf{P}([\ln Y - \ln X \leq \ln x]) \\ &= \mathbf{P}([\ln X - \ln Y \leq \ln x]) + \mathbf{P}([\ln X - \ln Y \geq -\ln x]) \\ &= \mathbf{P}([Z \leq \ln x]) + \mathbf{P}([Z \geq -\ln x]) \\ &\quad \text{car } Z \text{ est une variable symétrique} \\ &= 2\mathbf{P}([Z \leq \ln x]) \end{aligned}$$

soit donc :

$$\forall x \in]0, 1], \quad \mathbf{P}\left(\left[\frac{I}{S} \leq x\right]\right) = 2\mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{Y} \leq x\right]\right)$$

Explications : $\mathbf{P}([Z \leq \ln x]) = \mathbf{P}([Z \geq -\ln x])$ car fonction f_{U+V} est **paire**.

c.ii

Tout d'abord $\left(\frac{I}{S}\right)(\Omega) =]0, 1[$ en observant que $[I = S] = \emptyset$ "en continu" !

Notons $F_{\frac{I}{S}}$ la fonction de répartition associée de $\frac{I}{S}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{\frac{I}{S}}(x) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{I}{S} \leq x\right]\right)$$

alors :

$$\begin{aligned} F_{\frac{I}{S}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{Y} \leq x\right]\right) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\mathbf{P}\left(\left[\ln\left(\frac{X}{Y}\right) \leq \ln x\right]\right) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\mathbf{P}([Z \leq \ln x]) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2F_Z(\ln x) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Les propriétés de $F_{\frac{I}{S}}$ (que je vous laisse vérifier) nous font affirmer que $\frac{I}{S}$ reste une variable à densité. Par dérivation de $F_{\frac{I}{S}}$ sur $\mathbf{R}^* - \{1\}$ on obtient une densité de $\frac{I}{S}$ notée $f_{\frac{I}{S}}$, sans oublier de poser que $f_{\frac{I}{S}}(0) = f_{\frac{I}{S}}(1) = 0$, par exemple. Elle définie par :

$$\begin{aligned} f_{\frac{I}{S}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \frac{2}{x} f_Z(\ln x) & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \frac{2}{x} \frac{1}{2} e^{-|\ln x|} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \frac{1}{x} e^{-(-\ln x)} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \frac{1}{x} e^{\ln x} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ 1 & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{I}{S} \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)}$$

