Correction de la fiche 8

La correction comporte 19 pages

1 Approximations

a Comme on effectue une succession de 400 **épreuves de Bernoulli** (dont le succès est d'obtenir "pile" avec une probabilité de 1/2), indépendantes et de même paramètre 1/2, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(400, 1/2)}$$

b D'après le cours, nous avons que :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = 200 \quad \mathbf{V}(X) = 100 \quad \sigma(X) = 10}$$

c Pour les calculs des probabilités, nous utiliserons le fait que, comme $n = 400 \geq 200$ et $p = 1/2$ nous sommes dans les conditions pour dire que $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(200, 100)$. Nous devrons, alors, introduire $X^* = \frac{X-200}{10}$ la variable centrée et réduite associée à X, dont le théorème fondamental, nous permet de dire que $X^* \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, avec la correction de continuité :

$$\begin{aligned}
\bullet\ \mathbf{P}([X > 200]) &= \mathbf{P}([X \geq 201]) \\
&= \mathbf{P}([X \geq 200,5]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X-200}{10} \geq \frac{200,5-200}{10}\right]\right) \\
&= \mathbf{P}([X^* \geq 0,05]) \\
&= 1 - \mathbf{P}([X^* < 0,05]) \\
&\simeq 1 - \Phi(0,05) \\
&\simeq 1 - 0,51994 \\
&\simeq \boxed{0,48006}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ \mathbf{P}([190 < X < 210]) &= \mathbf{P}([191 \leq X \leq 209]) \\
&= \mathbf{P}([190,5 \leq X \leq 209,5]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[\frac{190,5-200}{10} \leq \frac{X-200}{10} \leq \frac{209,5-200}{10}\right]\right) \\
&= \mathbf{P}([-0,95 \leq X^* \leq 0,95]) \\
&\simeq \Phi(0,95) - \Phi(-0,95) \\
&\simeq 2\Phi(0,95) - 1 \\
&\simeq 2 \times 0,82894 - 1 \\
&\simeq \boxed{0.65788}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ \mathbf{P}([185 < X < 205]) &= \mathbf{P}([186 \leq X \leq 204]) \\
&= \mathbf{P}([185,5 \leq X \leq 204,5]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[\frac{185,5-200}{10} \leq \frac{X-200}{10} \leq \frac{204,5-200}{10}\right]\right) \\
&= \mathbf{P}([-1,45 \leq X^* \leq 0,45]) \\
&\simeq \Phi(0,45) - \Phi(-1,45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\simeq \Phi(0,45) - (1 - \Phi(1,45)) \\ &\simeq \Phi(0,45) + \Phi(1,45) - 1 \\ &\simeq 0,67364 + 0,92647 - 1 \\ &\simeq \boxed{0.60011} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \mathbf{P}([X=201]) &= \mathbf{P}([200,5 \leq X \leq 201,5]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{200,5-200}{10} \leq \frac{X-200}{10} \leq \frac{201,5-200}{10}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([0,05 \leq X^* \leq 0,15]) \\ &\simeq \Phi(0,15) - \Phi(0,05) \\ &\simeq 0.55962 - 0.51994 \\ &\simeq \boxed{0,03968} \end{aligned}$$

2 Approximations

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de personnes sujets de troubles parmi les 200. Comme on effectue une succession de 200 **épreuves de Bernoulli** (dont le succès est que la personne soit sujet de troubles), indépendantes et de même paramètre 0,001, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(2000; 0,001)}$$

Pour les calculs des probabilités, nous utiliserons le fait que, comme $n = 2000 \geq 30$, $p = 0,001 < 0,1$, $np = 2 < 10$ nous sommes dans les conditions pour dire que $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \bullet\ \mathbf{P}([X=3]) &\simeq \frac{e^{-2}2^3}{3!} \\ &\simeq \frac{4}{3}e^{-2} \\ &\simeq \boxed{0.180\,45} \\ \bullet\ \mathbf{P}([X>2]) &= 1 - \mathbf{P}([X \leq 2]) \\ &= 1 - (\mathbf{P}([X=0]) + \mathbf{P}([X=1]) + \mathbf{P}([X=2])) \\ &\simeq 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) \\ &\simeq \boxed{0.32332} \end{aligned}$$

3 Approximations

a Soit X la variable aléatoire associée au nombre de décès par an dus à la maladie dans la population de N personnes. Comme on effectue une succession de N **épreuves de Bernoulli** (dont le succès est que la personne soit décédée, de probabilité $400/1.10^6$), indépendantes et de même paramètre $400/1.10^6$, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{400}{10^6}\right) \iff X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, 4.10^{-4}\right)}$$

D'après le cours, nous avons :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = 4.10^{-4}N \quad \mathbf{V}(X) = 4.10^{-4}\left(1 - 4.10^{-4}\right)N = 3.5263 \times 10^{-3}N}$$

b

- $N = 1000$
  Comme $N = 1000 \geq 30$, $p = 4.10^{-4} < 0,1$, $Np = 0,4 < 10$ alors $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(0,4)$ soit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) \simeq \frac{e^{-0,4}(0,4)^k}{k!}$$

  Cherchons k tel que $\mathbf{P}([X \leq k]) \geq 0,95$. Nous avons :

k	$\mathbf{P}([X = k])$	$\mathbf{P}([X \leq k])$
0	0.67032	0.67032
1	0.26813	0.93845
2	5.3626×10^{-2}	0.99208

$\boxed{\text{Finalement la probabilité de constater au plus deux décès est au moins égale à 95\%}}$

- $N = 10\ 000$
  Comme $N = 10000 \geq 30$, $p = 4.10^{-3} < 0,1$, $Np = 4 < 10$ alors $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(4)$ soit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) \simeq \frac{e^{-4}(4)^k}{k!}$$

  Cherchons k tel que $\mathbf{P}([X \leq k]) \geq 0,95$. Nous avons :

k	$\mathbf{P}([X = k])$	$\mathbf{P}([X \leq k])$
0	$1,8316.10^{-2}$	$1,8316.10^{-2}$
1	$7,3263.10^{-2}$	0,091579
2	0,14653	0,238109
3	0,19537	0,433479
4	0,19537	0,628849
5	0,15629	0,785139
6	0,1042	0,889339
7	0,05954	0,948879
8	0,02977	0,978649

$\boxed{\text{Finalement la probabilité de constater au plus huit décès est au moins égale à 95\%}}$

- $N = 100\ 000$
  Comme $N = 100000 \geq 30$, $Np = 353.89 > 10$, $N(1-p) = 99646 > 10$ nous sommes dans les conditions pour dire que $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(354; 352.63)$. Nous devrons alors introduire $X^* = \frac{X-354}{18.8}$ la variable centrée et réduite associée à X dont le théorème fondamental, nous permet de dire que $X^* \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, avec la correction de continuité :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \leq k]) &= \mathbf{P}([X \leq k + 0,5]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X - 354}{18.8} \leq \frac{k + 0,5 - 354}{18.8}\right]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[X^* \leq 5.3191 \times 10^{-2}k - 18.803\right]\right) \\
&\simeq \Phi\left(5.3191 \times 10^{-2}k - 18.803\right)
\end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \leq k]) \geq 0,95 &\iff \Phi\left(5.3191 \times 10^{-2}k - 18.803\right) \geq 0,95 \\
&\iff 5.3191 \times 10^{-2}k - 18.803 \geq 1,65 \\
&\iff (k \geq 384)
\end{aligned}$$

  D'où :

$$\boxed{X \leq 384 \text{ à } 95\% \text{ près}}$$

4 Approximations

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de clients, parmi les 150, achetant au cours de la journée une boîte d'aspirine dans la pharmacie. Comme on effectue une succession de 150 **épreuves de Bernoulli** (dont le succès est que la personne achete au cours de la journée une boîte d'aspirine, de probabilité 0,02), indépendantes et de même paramètre 0,02, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(150; 0,02)}$$

Comme $n = 150 \geq 30$, $p = 0.02 < 0,1$, $np = 3 < 10$ alors $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(3)$ soit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) \simeq \frac{e^{-3}(3)^k}{k!}$$

Cherchons alors k tel que $\mathbf{P}([X \leq k]) \geq 0,98$. Nous avons :

k	$\mathbf{P}([X = k])$	$\mathbf{P}([X \leq k])$
0	$0,04979$	$0,04979$
1	$0,14936$	$0,19915$
2	$0,22404$	$0,42319$
3	$0,22404$	$0,64723$
4	$0,16803$	$0,81526$
5	$0,10082$	$0,91608$
6	$0,05041$	$0,96649$
7	$0,02160$	$0,98810$

Le stock minimum pour que la pharmacie puisse satisfaire à la demande avec une probabilité de 98%.est de 7 boîtes

5 Convergence en loi

a Par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \mathbf{P}([M_n \leq x])$$

soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x]) \\ &\quad \text{car les variables } X_k \text{ sont indépendantes} \\ &= (F(x))^n \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = F^n}$$

b Introduisons F_{Z_n} la fonction de répartition associée à Z_n qui reste une variable à densité, car obtenue à partir d'un **changement affine** à partir de M_n. Elle est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}([Z_n \leq x])$$

soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= \mathbf{P}([\lambda M_n - \ln n \leq x]) \\ &= \mathbf{P}([\lambda M_n \leq x + \ln n]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[M_n \leq \frac{x + \ln n}{\lambda}\right]\right) \text{ car } \lambda > 0 \\ &= F_n\left(\frac{x + \ln n}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(F\left(\frac{x+\ln n}{\lambda}\right)\right)^n \\
&\quad \text{selon la question précédente} \\
&= \begin{cases} \left(1-\exp\left(-\lambda\left(\dfrac{x+\ln n}{\lambda}\right)\right)\right)^n & \text{si} \quad x+\ln n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+\ln n < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(1-\exp\left(-x-\ln n\right)\right)^n & \text{si} \quad x+\ln n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+\ln n < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si} \quad x+\ln n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+\ln n < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Maintenant sachant que x est fixé dans $\mathbb{R}$, étudions $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$. Pour n **assez grand**, tel qu'il dépasse e^{-x} où x parcourt $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$ car :

$$\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$$

et

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-x}$$

Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(-e^{-x}\right)$$

Notons G la "fonction limite" obtenue, elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$$

Nous avons $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc $G \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ces propriétés nous amènent à dire que G est une fonction de répartition et que :

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z}$$

où Z est une variable à densité, dont une densité f_Z est obtenue par dérivation de G sur $\mathbb{R}$, est définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \exp\left(-\left(x+e^{-x}\right)\right)}$$

c.i Introduisons F_{Z_n} la fonction de répartition associée à Z_n qui reste une variable à densité, car obtenue à partir d'un changement affine à partir de M_n. Elle est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}\left([Z_n \leq x]\right)$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \mathbf{P}\left(\left[n^{\frac{1}{a}}(M_n-1) \leq x\right]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[M_n - 1 \leq n^{-\frac{1}{a}}x\right]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[M_n \leq n^{-\frac{1}{a}}x+1\right]\right) \\
&= F_n\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right) \\
&= \left(F\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right)\right)^n
\end{aligned}$$

Ici quand n est très grand, $n^{-\frac{1}{a}}$ est très petit, dés lors $n^{-\frac{1}{a}}x+1$ est très proche de 1. Mais le problème est que l'on ne sait pas pour x fixé dans $\mathbb{R}$, si $n^{-\frac{1}{a}}x+1$ est supérieur ou inférieur à 1. Tout dépend du signe de x. Donc :

- si $x \geq 0$, alors $n^{-\frac{1}{a}}x + 1 \geq 1$ et :

$$\begin{aligned}\left(F\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right)\right)^n &= 1^n \\ &= 1\end{aligned}$$

- si $x < 0$, alors $n^{-\frac{1}{a}}x + 1 < 1$ et :

$$\begin{aligned}\left(F\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right)\right)^n &= \left(1-\left(-xn^{-\frac{1}{a}}\right)^a\right)^n \\ &= \left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right)\right)\end{aligned}$$

Ces deux résultats étant bien sûr donnés **pour n grand !** Alors :

- si $x \geq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = 1$.
- si $x < 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \exp\left(-(-x)^a\right) \quad \text{car} \quad n\ln\left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right) \underset{+\infty}{\sim} -(-x)^a$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right)\right) = \exp\left(-(-x)^a\right)$$

En notant H la "fonction limite" obtenue, elle est définie par :

$$H(x) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^a\right) & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

H possède clairement toutes les propriétés d'une fonction de répartition associée à une variable à densité, car :

- $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (*à vérifier, c'est évident!*) ;
- $H \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}\right)$ et $H \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$

Conclusion :

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} T}$$

où T est une variable à densité, dont une densité f_T est obtenue par dérivation de H sur $\mathbb{R}^*$, sans oublier de poser que $f_T(0) = 0$. Elle est définie par :

$$\boxed{f_T(x) = \begin{cases} -(-x)^a \frac{a}{x} e^{-(-x)^a} > 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_-^* \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}}$$

c.ii Si $a = 1$, $Z_n = n(M_n - 1)$ et :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et comme :

$$H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

est la fonction de répartition de T, on montrerait sans difficulté que $-T \hookrightarrow \varepsilon(1)$ donc :

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} T \quad \text{où} \quad -T \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

6 Convergence en loi

a Nous avons vu au TD précédent que le min d'un vecteur de VARAD reste une VARAD je ne referai donc pas la démo. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Z_n(\Omega) = [0,1] \implies \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nZ_n(\Omega) = [0,n]$$

Soit F_{nZ_n} la fonction de répartition de Z_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{nZ_n}(x) = \mathbf{P}([nZ_n \le x])$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - Pour tout $x \in [0,n]$:

$$\begin{array}{rcl} F_{nZ_n}(x) & = & 1 - \mathbf{P}([nZ_n > x]) \\ & = & 1 - \mathbf{P}\left(\left[Z_n > \frac{x}{n}\right]\right) \\ & = & 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left[U_k > \frac{x}{n}\right]\right) \\ & = & 1 - \left(\mathbf{P}\left(\left[U > \frac{x}{n}\right]\right)\right)^n \\ & = & 1 - \left(1 - \mathbf{P}\left(\left[U \le \frac{x}{n}\right]\right)\right)^n \\ \text{avec } \frac{x}{n} & \in & [0,1] \\ & = & 1 - \left(1 - F_U\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \\ & = & 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \end{array}$$

  - Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $F_{nZ_n}(x) = 0$.
  - Pour tout $x \in]n, +\infty[$, $F_{nZ_n}(x) = 1$.
    Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{nZ_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0,n] \\ 1 & \text{si} \quad x > n \end{cases}$$

    On doit maintenant étudier $\lim_{n\to+\infty} F_{nZ_n}(x)$, x étant fixé dans $\mathbb{R}$.

- Soit x dans $\mathbb{R}_-$, alors $\lim_{n\to+\infty} F_{nZ_n}(x) = 0$.
- Soit x dans $\mathbb{R}_+$ et pour x suffisamment grand tel que $n \ge x$:

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to+\infty} F_{nZ_n}(x) & = & \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\ & = & \lim_{n\to+\infty} 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\ & = & 1 - e^{-x} \end{array}$$

  car :

$$\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{nx}{n} \underset{+\infty}{\sim} -x$$

  et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(-x)$$

  Moralité :

$$\boxed{(Z_n)_{n\ge1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \text{où} \quad Y \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

b Tout d'abord en notant $Y = \varphi(X)$ où :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\lambda x} \end{array}$$

φ réalisant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, Y reste une variable à densité avec $Y(\Omega) =]0,1]$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

et :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[e^{-\lambda X} \leq x\right]\right) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathbf{P}([-\lambda X \leq \ln x]) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[X \geq -\dfrac{\ln x}{\lambda}\right]\right) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\left[X < -\dfrac{\ln x}{\lambda}\right]\right) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - F_X\left(-\dfrac{\ln x}{\lambda}\right) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \left(1 - \exp\left(-\lambda\left(-\dfrac{\ln x}{\lambda}\right)\right)\right) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&\quad \text{car } -\frac{\ln x}{\lambda} \geq 0 \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - 1 + \exp(\ln x) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1]) \text{ où même } Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \text{ car } \mathbf{P}([Y=0]) = 0}$$

c.i Nous savons d'après la question précédente que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $e^{-\lambda X_k} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ alors comme ces variables sont indépendantes, du fait de l'indépendance des variables X_k, et :

$$\boxed{(A_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

c.ii Nous avons vu au TD précédent que le max d'un vecteur de VARAD reste une VARAD je ne referai donc pas la démo.

Tout d'abord $D_n(\Omega) = [-\ln n, +\infty[$. Soit F_{D_n} la fonction de répartition de D_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{D_n}(x) = \mathbf{P}([D_n \leq x])$$

et :

$$\begin{aligned}
F_{D_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}([\max(X_1, \ldots, X_n) - \ln n \leq x]) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}([\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x + \ln n]) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x + \ln n]\right) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x + \ln n]) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&\quad \text{car les variables } X_k \text{ sont ind}^{\text{tes}} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ (\mathbf{P}([X_1 \leq x + \ln n]))^n & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ (F_{X_1}(x + \ln n))^n & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ (1 - \exp(-x - \ln n))^n & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ (1 - \exp(-x - \ln n))^n & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases}
\end{aligned}$$

Etudions alors $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{D_n}$, pour cela prenons n suffisamment grand tel $n \geq e^{-x}$, x parcourant $\mathbb{R}$. Nous avons pour tout $n \geq 1$, et pour x fixé dans $\mathbb{R}$, $F_{D_n}(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)\right)$ or :

$$n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n\left(-\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-x}$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} F_{D_n}(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$$

Cette fonction limite a déjà été étudiée dans l'exercice 5 et ses propriétés sont celles d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

Moralité :

$$\boxed{\begin{array}{c} (D_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} T \text{ où } T \text{ est une variable à densité de densité } f_T \text{ définie par :} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}) \quad \textbf{Loi de Gumbel} \end{array}}$$

7 Convergence en probabilité

a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $T_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}([T_i = 1]) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N$$

Explication : On a $(n-1)$ possibilités de placer chaque boule dans n'importe quelle urne sauf la $i^{\text{ème}}$, et il y a N boules à placer.

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!] \quad T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right)}$$

et d'après le cours :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{E}(T_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(T_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right)}$$

b L'exercice ne précise rien de spécial concernant i et j, nous supposerons que $i \neq j$. (je vous laisse étudier le cas où $i = j$).

$$\boxed{\forall (i,j) \in ([\![1,n]\!])^2, \quad i \neq j, \quad \mathbf{E}(T_iT_j) = \mathbf{P}([T_iT_j = 1]) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^N}$$

Explication : On a $(n-2)$ possibilités de placer chaque boule dans n'importe quelle urne sauf la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$, et il y a N boules à placer. Alors :

$$\boxed{\forall (i,j) \in ([\![1,n]\!])^2, \quad i \neq j, \quad \mathrm{Cov}(T_iT_j) = \mathbf{E}(T_iT_j) - \mathbf{E}(T_i)\mathbf{E}(T_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^N - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2N}}$$

c Par **linéarité de l'espérance** $\forall n \geq 1$, et sachant qu'on a clairement $Y_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_n) &= \mathbf{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}(Y_n) \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(T_k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^N \\
&= \frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^N \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^N \\
&= \exp\left(N\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$N\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{N}{n} \underset{+\infty}{\sim} -a$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \exp\left(N\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = e^{-a}}$$

d Pour tout entier naturel naturel non nul n :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(S_n) &= \mathbf{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(T_k) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(T_i,T_j)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^N - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2N}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) + 2\binom{n}{2}\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right)
\end{aligned}$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an} = e^{-a}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) = 1-e^{-a}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} = e^{-2a}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an} = e^{-2a}$

Explications :

- $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an} = \exp\left(an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ et $an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim} -a$
- $\frac{n-1}{n}\underset{+\infty}{\sim} 1$
- $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} = \exp\left(an\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)$ et $an\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim} -2a$
- $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an} = \exp\left(2an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ et $2an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim} -2a$

Comme :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbf{V}(S_n) = 0}$$

e.i Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| &= \left|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n) + \mathbf{E}(S_n) - e^{-a}\right| \\ &\leq \boxed{\left|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)\right| + \left|\mathbf{E}(S_n) - e^{-a}\right|} \end{aligned}$$

par l'**inégalité triangulaire.**

e.ii Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(S_n) = -e^{-a}$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} | \quad \forall n \geq n_0, \quad \left|\mathbf{E}(S_n) - e^{-a}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en supposant que $n \geq n_0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left[\left|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \subset \quad \left[\left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| < \varepsilon\right]$$

cela entraine que pour $n \geq n_0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| < \varepsilon\right]\right)$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| \geq \varepsilon\right]\right)$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)}$$

e.iii Selon le résultat précédent et l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - \mathbf{E}(S_n)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \frac{4\mathbf{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

et par le **théorème d'encadrement :**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0}$$

e.iv Par **définition** de la convergence en probabilité :

$$\boxed{(S_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } e^{-a}}$$

8 Convergence en probabilité

- Calculons pour commencer $\mathbf{E}(S_n)$. Comme S_n s'exprime comme somme de variables de Bernoulli, elle admet une espérance (et une variance au passage) égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(Y_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left([X_i X_{i+1} = 1]\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left([X_i = 1]\right)\mathbf{P}\left([X_{i+1} = 1]\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p^2 \\ &= p^2 \end{aligned}$$

- Calculons la variance de S_n. Nous avons :

$$\mathbf{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\right)$$

avec :

- Si $j > i+1$, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ car les variables Y_i, Y_j sont clairement indépendantes[1].
- Si $j = i+1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) &= \mathbf{E}\left(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}\right) - \mathbf{E}(Y_i)\,\mathbf{E}(Y_j)\\ &= \mathbf{P}([X_i = 1]\cap[X_{i+1} = 1]\cap[X_{i+2} = 1]) - p^4\\ &= \mathbf{P}([X_i = 1])\,\mathbf{P}([X_{i+1} = 1])\,\mathbf{P}([X_{i+2} = 1]) - p^4\\ &= p^3 - p^4\end{aligned}$$

Notez que $\forall i \in \mathbb{N}^*, Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}([Y_i = 1]))$ donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}([X_i X_{i+1} = 1]))$, autrement dit $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left((\mathbf{P}([X_i = 1]))^2\right)$, soit $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p^2\right)$ ce qui entraîne que :

$$\mathbf{E}(Y_i) = p^2 \text{ et } \mathbf{V}(Y_i) = p^2\left(1 - p^2\right)$$

Moralité :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} p^2\left(1-p^2\right) + 2\sum_{1\leq i\leq n-1}\left(p^3 - p^4\right)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(np^2\left(1-p^2\right) + 2(n-1)\left(p^3 - p^4\right)\right)\\ &= \frac{(n - 2p + 3np)(1-p)\,p^2}{n^2}\end{aligned}$$

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{V}(S_n) = 0$ du fait que :

$$\frac{(n - 2p + 3np)(1-p)\,p^2}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(1+3p)(1-p)\,p^2}{n}$$

D'après l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \mathbf{P}([|S_n - \mathbf{E}(S_n)| > \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n - p^2\right| > \varepsilon\right]\right) \leq \frac{(n - 2p + 3np)(1-p)\,p^2}{n^2\varepsilon^2}$$

Le passage à la limite donnant $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left[\left|S_n - p^2\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$ ce qui équivaut à dire que :

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} p^2}$$

9 Convergence en probabilité

a Comme $\overline{S_n}$ s'exprime comme somme de variables finies alors S_n admet une espérance (et une variance au passage) égale à :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - 2p^i\right)\end{aligned}$$

[1] Il n'y a pas de "chevauchement" des indices !

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) = 1 - \frac{2p}{n}\left(\frac{1-p^n}{1-p}\right)}$$

et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) = 1}$$

b C'est typiquement le type de question nécessitant l'emploi de l'IBT. Il ne nous manque donc la variance de $\overline{S_n}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(\overline{S_n}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}\left(X_i^2\right) - \left(\mathbf{E}\left(X_i\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \left(1-2p^i\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(4p^i - 4p^{2i}\right)\\
&= \frac{4}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}p^i - \sum_{i=1}^{n}\left(p^2\right)^i\right)\\
&= \frac{4}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}p^i - \sum_{i=1}^{n}\left(p^2\right)^i\right)\\
&= \frac{4}{n^2}\left(p\frac{1-p^n}{1-p} - p^2\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbf{V}\left(\overline{S_n}\right) = \frac{4}{n^2\varepsilon^2}\left(p\frac{1-p^n}{1-p} - p^2\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}\right)$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbf{V}\left(\overline{S_n}\right) = 0$$

C'est là que l'exercice 7 va nous sauver !

$$\begin{aligned}
\forall\omega\in\Omega,\ \left|\overline{S_n}\left(\omega\right) - 1\right| &= \left|\overline{S_n}\left(\omega\right) - \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) + \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) - 1\right|\\
&\leq \left|\overline{S_n}\left(\omega\right) - \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)\right| + \left|\mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) - 1\right|
\end{aligned}$$

par l'**inégalité triangulaire.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) = 1$ alors :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbf{N}\quad|\quad \forall n\geq n_0,\quad \left|\mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en supposant que $n \geq n_0$:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \left[\left|\overline{S_n} - \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad\subset\quad \left[\left|\overline{S_n} - 1\right| < \varepsilon\right]$$

cela entraine que pour $n \geq n_0$:

$$\forall\varepsilon>0,\quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - 1\right| < \varepsilon\right]\right)$$

soit encore :

$$\forall\varepsilon>0,\quad 0 \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right]\right)$$

enfin :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

et selon l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - \mathbf{E}\left(\overline{S_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \frac{4\mathbf{V}\left(\overline{S_n}\right)}{\varepsilon^2}$$

et par le **théorème d'encadrement :**

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

Par **définition** de la convergence en probabilité :

$$\boxed{\left(\overline{S_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } 1}$$

10 Une autre forme de la loi faible des grands nombres

C'est comme d'habitude en notant $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ et :

$$\begin{aligned}\forall \omega \in \Omega, \ \left|\overline{X_n}(\omega) - m\right| &= \left|\overline{X_n}(\omega) - \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) + \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) - m\right| \\ &\leq \left|\overline{X_n}(\omega) - \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| + \left|\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) - m\right|\end{aligned}$$

par l'**inégalité triangulaire.** Comme $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) = m$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, | \quad \forall n \geq n_0, \quad \left|\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) - m\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en supposant que $n \geq n_0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left[\left|\overline{X_n} - \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \subset \quad \left[\left|\overline{X_n} - m\right| < \varepsilon\right]$$

cela entraine que pour $n \geq n_0$, $\forall \varepsilon > 0$:

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| < \varepsilon\right]\right)$$

soit :

$$0 \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right)$$

et encore :

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

et selon l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \frac{4\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2}$$

et par le **théorème d'encadrement :**

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

Par définition de la convergence en probabilité :

$$\boxed{\left(\overline{X_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } m}$$

11 Convergence en probabilité d'une suite de variables suivant une loi bêta

a On vérifie aisément que :

- $f \geq 0$.
- $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (cela dépend des valeurs de n, m).
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1 par la définition de f et de $B(n,m)$.

b Calculons d'abord la valeur de $B(n,m)$. Par une intégration par parties (les fonctions u et v en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$) :

$$\begin{aligned}
\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}_2,\ B(n,m) &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx \\
&= \left[\frac{x^n}{n}(1-x)^{m-1}\right]_0^1 + \frac{m-1}{n}\int_0^1 x^n (1-x)^{m-2}\,dx \\
&= \frac{m-1}{n} B(n+1, m-1)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
B(n,m) &= \frac{m-1}{n} B(n+1, m-1) \\
&= \frac{(m-1)(m-2)}{n(n+1)} B(n+2, m-2) \\
&= \cdots \\
&= \frac{(m-1)!}{n(n+1)\cdots(n+m-2)} B(n+m, 1)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
B(n+m, 1) &= \int_0^1 x^{n+m-2}dx \\
&= \frac{1}{n+m-1}
\end{aligned}$$

et finalement :

$$B(n,m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n,m}) &= \frac{1}{B(n,m)}\int_0^1 x^n (1-x)^{m-1}\,dx \\
&= \frac{B(n+1,m)}{B(n,m)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(X_{n,m}) = \frac{n}{n+m}}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X_{n,m}^2\right) &= \frac{1}{B(n,m)}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}\,dx\\ &= \frac{B(n+2,m)}{B(n,m)}\\ &= \frac{n(n+1)}{(n+m)(n+m+1)}\end{aligned}$$

Finalement selon le théorème de Huygens-Koenig :

$$\boxed{\mathbf{V}(X_{n,m}) = \mathbf{E}\left(X_{n,m}^2\right) - \left(\mathbf{E}(X_{n,m})\right)^2 = \frac{nm}{(n+m)^2(n+m+1)}}$$

c Je vous laisse reprendre, seuls, pour la cinquième fois le raisonnement de l'exercice 7 (c'est du "copier-coller") montrant que :

$$\boxed{(X_{n,m}) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } 0}$$

12 Variables presque sûrement égales

Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l}(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y\\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Z\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0,\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(|X_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)=0\\ \forall\varepsilon>0,\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(|X_n-Z|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0,\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(|X_n-Y|<\frac{\varepsilon}{2}\right)=1\\ \forall\varepsilon>0,\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(|X_n-Z|<\frac{\varepsilon}{2}\right)=1\end{array}\right.$$

Or comme selon l'**inégalité triangulaire :**

$$\begin{aligned}|Y-Z| &= |Y-X_n+X_n-Z|\\ &\leq |Y-X_n|+|X_n-Z|\end{aligned}$$

il existe un rang n à partir duquel :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \left(\left[|X_n-Y|<\frac{\varepsilon}{2}\right]\bigcap\left[|X_n-Z|<\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)\subset[|Y-Z|<\varepsilon]$$

donc :

$$[|Y-Z|\geq\varepsilon]\subset\left(\left[|X_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\bigcup\left[|X_n-Z|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

et croissance de $\mathbf{P}$ et l'inégalité de Boole :

$$\mathbf{P}([|Y-Z|\geq\varepsilon])\leq\mathbf{P}\left(\left[|X_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)+\mathbf{P}\left(\left[|X_n-Z|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}([|Y-Z|\geq\varepsilon])=0$$

soit :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mathbf{P}([|Y-Z|\geq\varepsilon])=0$$

et donc en prenant ε aussi petit que l'on veut il y a une probabilité infiniment petite que les valeurs de Y et de Z diffèrent, donc :

$$\boxed{Y=Z\quad\text{presque sûrement}}$$

13 Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1. Alors d'après le cours :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$$

Le **théorème de la limite centrée** nous donne :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right]\right) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right] &= [S_n \leq n] \\ &= \biguplus_{k=0}^{n} [S_n = k]\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right]\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([S_n = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}}$$

14 Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables indépendantes et de même loi binomiale de paramètres 1 et 1/3. Alors d'après le cours $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)$. Le **théorème de la limite centrée** nous donne :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - n/3}{\sqrt{2n}/3} \leq 0\right]\right) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\left[\frac{S_n - n/3}{\sqrt{2n}/3} \leq 0\right] &= \left[S_n \leq \frac{n}{3}\right] \\ &= \biguplus_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} [S_n = k]\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - n/3}{\sqrt{2n}/3} \leq 0\right]\right) &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \mathbf{P}\left([S_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-n+n} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2 \times 3}{3}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{k} 2^{n-k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}}$$

✠✠✠✠✠