Le 07/05/2013 à 07H55

Les résultats du cours en un clin d'oeil

FORMULES COMBINATOIRES

T Soit n un entier naturel,

▶ $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

▶ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

▶ $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

D ▶ $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $0 \leq p \leq n$.

▶ On pose $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$.

P ▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie).

▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p \leq n,\ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p \leq n,\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (triangle de Pascal).

▶ $\forall (p,d) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq d,\ \sum_{n=p}^{d} \binom{n}{p} = \binom{d+1}{p+1}$ (triangle de Pascal généralisée).

T **Formule du binôme de Newton :** $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^k b^{n-k}$.

P ▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

▶ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1}$.

▶ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

T **Formule multinomiale** (HP mais ...) $\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_p) \in [\![0,n]\!]^p \\ n_1+\dots+n_p=n}} \underbrace{\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}}_{\text{coeff. multinomial}} a_1^{n_1} \times \dots \times a_p^{n_p} = (a_1 + \dots + a_p)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

T **V.D.M.** $\forall (n_1, n_2, n) \in \mathbb{N}^3,\ n \leq n_1 + n_2,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

P $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

T **V.D.M. généralisée** (HP mais ...) $\forall (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{N}^p$,
$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_k) \in [\![0,n]\!]^k \\ n_1+\dots+n_k=n}} \binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2} \times \dots \times \binom{N_k}{n_k} = \binom{N_1+\dots+N_k}{n}$.

T $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} 1 = \binom{n}{p}$.

T $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \geq 1,\ \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n} 1 = \binom{p+n-1}{p}$.

D ▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \forall (a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^p,\ \prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times \dots \times a_n$.

▶ On pose $\prod_{k=p}^{n} a_k = 1$ quand $p > n$.

P Soit n un entier naturel,

▶ $\prod_{k=0}^{n} k = n!$

▶ $\prod_{k=0}^{n} (2k) = 2^n n!$

▶ $\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

DÉNOMBREMENT

T ▶ Soit A et B deux ensembles tels que A est *fini* et $B \subset A$, alors $|B| \leq |A|$ et $|A - B| = |A| - |B|$.

▶ $(|A| = |B|) \Leftrightarrow (A = B)$.

▶ $|A \uplus B| = |A| + |B|$, $\left|\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.

▶ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\prod_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$.

T **Poincaré :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$.

D **Partition d'un ensemble :** On dit que la famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est une *partition* de E : $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset,\ (\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$ et $\biguplus_{i \in I} A_i = E$.

Remarque **:** c'est la même déf. pour un SCE avec $E = \Omega$.

T **Lemme des bergers :** Soit E et F *deux ensembles finis* et f une application *surjective* de E vers F. On suppose $\exists p \in \mathbb{N}^* \mid \forall y \in F,\ \left|f^{-1}(\{y\})\right| = p$, alors $|E| = p|F|$.

T **Nombre d'applications de E vers F** : $|\mathcal{A}(E,F)| = |F|^{|E|}$.

T **Nombre d'injections de E_p vers F_n** avec $p \leq n$: A_n^p.

T **Nombre de permutations de E_n** avec $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n^n = n!$

T **Nombre de $p-$listes de E_n** : n^p.

T **Nombre de combinaisons de p éléments de E_n**, avec $1 \leq p \leq n$: $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.

T **Nombre de parties d'un ensemble E** : $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

T **Problème des anagrammes** :
$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \cdots \times \binom{n-n_1-\cdots-n_{p-1}}{n_p} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_p!}$.

T **Nombre de suites :**
- $\left|\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n\right\}\right| = \binom{n}{p}$.
- $\left|\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p \leq n\right\}\right| = \binom{p+n-1}{p}$.

ESPACES PROBABILISÉS

D **Tribu :** Tout ensemble de parties d'un ensemble Ω, *contenant* Ω, *stable par réunion au plus dénombrable et par passage au complémentaire*, s'appelle une **tribu** ou $\sigma-$algèbre sur Ω, souvent notée $\mathcal{A}$. Autrement dit : $\Omega \in A$, $\forall A \in A$, $\overline{A} \in A$, pour toute suite $(A_n)_{n \geq n_0}$ d'événements de A, $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in A$.

P **:** $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est stable pour $\cap$, $-$, Δ.

P ▶ $\sigma(A) = \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$.

▶ Soit $(A_k)_{k \in K}$ un *SCE* alors $\sigma\left((A_k)_{k \in K}\right) = \left\{\biguplus_{l \in L} A_l \mid L \in \mathcal{P}(K)\right\}$.

▶ Si Ω au plus dénombrable $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

T **Tribu de Borel :** $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, x[\,,\ x \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[x, +\infty[\,,\ x \in \mathbb{R}\}) = \cdots$

D **Axiomatique d'une probabilité :** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbf{P} : A \to [0,1]$ vérifiant : $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\forall (A_k)_{k \in K}$, deux à deux disjoints $\sum_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ et $\mathbf{P}\left(\biguplus_{k \in K} A_k\right) = \sum_{k \in K} \mathbf{P}(A_k)$ ($\sigma-$*additivité de* $\mathbf{P}$).

D On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

T Soit A et B deux évts de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$:
- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbf{P}(A \uplus B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
- $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
- $\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
- $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B))$.
- $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A))$ propriété de croissance de $\mathbf{P}$.
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
- $\mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$.

T **Limite monotone :**
- $\left((A_n)_{n \geq 0} \nearrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$.
- $\left((A_n)_{n \geq 0} \searrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$.

C Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une *suite quelconque d'événements* :
$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$.

T **Inégalité de Boole ou sous-additivité (HP mais ...)**
$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ (où $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$ ou diverge).

T **Relation de Laplace** (cas d'équiprobabilité) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

D **Indépendance d'événements :**
- **2 événements** : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
- ***n* événements 2 à 2 indépendants** :
$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, (i \neq j) \Rightarrow (\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j))$.
- ***n* événements mutuellement indépendants** :
$\forall I \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])\,,\ I \neq \emptyset$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$.
- **Suites d'événements :** on se ramène au cas fini pour toutes sous-suites finies

P Les assertions suivantes sont *équivalentes* :
- $A \perp\!\!\!\perp B$,
- $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$,
- $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$,
- $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

P Soit $(A_n)_n$ une suite d'*événements indépendants* alors $(B_n)_n$ où pour tout entier n, $B_n = A_n$ ou $\overline{A_n}$ *reste* une suite d'événements indépendants.

D **Probabilité conditionnelle** : $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0$, $\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$.

P Toutes les propriétés vues sur les probas inconditionnelles sont encore valable :

T On dit que deux événements A et B où $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :
- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
- $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.
- $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

T **Formule des probabilités composées :** Soit $A_1, \ldots, A_n$, n événements tel que pour tout $n \geq 2$, $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :

$\mathbf{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = \mathbf{P}\left(A_1\right) \mathbf{P}_{A_1}\left(A_2\right) \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \ldots \mathbf{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right).$

$\boxed{\text{T}}$ **Formule des probabilités totales :** Soit $\left(A_k\right)_{k \in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}\left(A_k\right) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A}$, $\sum\limits_k \mathbf{P}_{A_k}(B)\, \mathbf{P}\left(A_k\right) < \infty$ et $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{k \in K} \mathbf{P}_{A_k}(B)\, \mathbf{P}\left(A_k\right).$

$\boxed{\text{T}}$ **Bayes :** Soit $\left(A_k\right)_{k \in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}\left(A_k\right) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(B) \neq 0 : \forall i \in K, \mathbf{P}_B\left(A_i\right) = \frac{\mathbf{P}_{A_i}(B) \mathbf{P}\left(A_i\right)}{\sum\limits_{k \in K} \mathbf{P}_{A_k}(B) \mathbf{P}\left(A_k\right)}.$

V.A.R.

$\boxed{\text{D}}$ ⓈⒸ **:** $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$

$\boxed{\text{D}}$ Ⓢ **:** X v.a.r.d. si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

$\boxed{\text{D}}$ Ⓒ **:** X v.a.r.a.d. si $X(\Omega)$ est ∞ et indénombrable.

$\boxed{\text{D}}$ ⓈⒸ **:** $X = Y$ lorsque $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega).$

$\boxed{\text{D}}$ ⓈⒸ **:** $X = Y$ p.s. lorsque $\mathbf{P}([X = Y]) = 1.$

$\boxed{\text{D}}$ Ⓢ $\mathcal{A}_X = \sigma\left(\left([X = x]\right)_{x \in X(\Omega)}\right) = \left\{ \biguplus\limits_{x \in A} [X = x] \mid A \subset X(\Omega) \right\}.$

$\boxed{\text{D}}$ **Loi de probabilité** Ⓢ **:** $P_X : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall x \in X(\Omega)$, $P_X(x) = \mathbf{P}([X = x]).$

$\boxed{\text{T}}$ **Caractérisation d'une loi**

► Ⓢ **:** On donne les probabilités ponctuelles ou bien la fonction de répartition.

► Ⓒ **:** On donne une densité de X ou la fonction de répartition.

$\boxed{\text{T}}$ ⓈⒸ **:** $(X = Y) \Rightarrow (P_X = P_Y).$

$\boxed{\text{T}}$ ⓈⒸ **:** $(P_{\boldsymbol{X}} = P_{\mathbf{Y}}) \Rightarrow \left(\forall k \geq 0, \mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)\right).$

$\boxed{\text{T}}$ **Caractérisation d'une densité** Ⓒ **:** (caractérisation) (f densité) $\Leftrightarrow$ **(** $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ presque partout, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1)

$\boxed{\text{D}}$ **Fonction de répartition F**

► Ⓢ **:** $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum\limits_{\left\{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x}\right.} \mathbf{P}\left(\left[X = x_i\right]\right).$

► Ⓒ **:** $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du.$

$\boxed{\text{T}}$ Ⓒ **:** $F' = f$ là ou F est dérivable i.e. là où f est continue.

$\boxed{\text{P}}$ ► ⓈⒸ **:** Dans le cas général $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, F $\mathcal{C}^0$ à droite en tout point de $\mathbb{R}$, F non décroissante.

► Ⓒ **:** On rajoute $F : \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - I$ (I ensemble fini éventuellement vide).

$\boxed{\text{P}}$ Ⓢ **:**► $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}([X = a]) = F_X(a) - F_X\left(a^-\right).$

► $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X\left(a^-\right).$

► $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a).$

► $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X < b]) = F_X\left(b^-\right) - F_X\left(a^-\right).$

► $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X < b]) = F_X\left(b^-\right) - F_X(a).$

$\boxed{\text{T}}$ Ⓒ **:** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b]) = \mathbf{P}([a \leq X < b]) = \mathbf{P}([a < X < b]) = \int_a^b f_X(u)\, du.$

$\boxed{\text{T}}$ $\forall B \subset X(\Omega),\ \mathbf{P}(B) = \left\{\begin{array}{l} Ⓢ \sum\limits_{x_i \in B} \mathbf{P}\left(\left[X = x_i\right]\right) \\ Ⓒ \int_{x \in B} f(x)\, dx \end{array}\right..$

$\boxed{\text{D}}$ $\mathbf{E}(X) = \left\{\begin{array}{l} Ⓢ \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}\left(\left[X = x_i\right]\right) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ Ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \text{ ssrc} \end{array}\right..$

$\boxed{\text{P}}$ ► ⓈⒸ **:** $\forall X \in \mathcal{L}^1,\ (X \geq 0) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \geq 0).$

► ⓈⒸ **:** $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{L}^1\right)^2,\ (X \leq Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)).$

► ⓈⒸ **:** $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{L}^1\right)^2,\ (X = Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)).$

► ⓈⒸ **:** $\left(\forall Y \in \mathcal{L}^1 \text{ et } X \text{ tel que } |X| \leq Y\right) \Rightarrow \left(X \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(Y)\right).$

► ⓈⒸ **:** $\forall X \in \mathcal{L}^1,\ |\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|).$

$\boxed{\text{D}}$ **Espérance conditionnelle** Ⓢ **:** $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0$:
$\mathbf{E}(X \mid A) = \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}_A\left(\left[X = x_i\right]\right)$ sr|cv|.

$\boxed{\text{T}}$ **Formule de l'espérance totale** Ⓢ Soit $\left(A_i\right)_{i \in I}$ un *SCE* tq $\forall i \in I$, $\mathbf{P}\left(A_i\right) \neq 0$, $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{i \in I} \mathbf{E}\left(X \mid A_i\right) \mathbf{P}\left(A_i\right)$ ssr|cv|.

$\boxed{\text{T}}$ **Transfert**

$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \left\{\begin{array}{l} Ⓢ \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} \varphi\left(x_i\right) \mathbf{P}\left(\left[X = x_i\right]\right) \text{ ssr } |\text{cv}| \text{ où } \varphi \text{ déf sur } X(\Omega) \\ Ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx \text{ ssr } |\text{cv}| \text{ où } \varphi \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ presque partout} \end{array}\right..$

$\boxed{\text{D}}$ ► $\mathbf{V}(X) = \left\{\begin{array}{l} Ⓢ \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} \left(x_i - \mathbf{E}(X)\right)^2 \mathbf{P}\left(\left[X = x_i\right]\right) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ Ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - \mathbf{E}(X)\right)^2 f(x)\, dx \text{ ssrcv} \end{array}\right..$

► ⓈⒸ **:** $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$

$\boxed{\text{T}}$ **Théorème de Huygens-Koenig** ⓈⒸ **:** $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}(X))^2.$

$\boxed{\text{T}}$ ⓈⒸ **:** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$ et $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X).$

$\boxed{\text{D}}$ **Moment d'ordre $r \geq 0$**

$m_r(X) = \mathbf{E}\left(X^r\right) = \left\{\begin{array}{l} Ⓢ \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} x_i^r \mathbf{P}\left(\left[X = x_i\right]\right) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ Ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx \text{ ssrcv} \end{array}\right..$

$\boxed{\text{D}}$ **Moment centré d'ordre $r \geq 0$**

$$\mu_r(X)=\mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}(X))^r\right)=\begin{cases} \text{Ⓢ} \sum\limits_{x_i\in X(\Omega)}(x_i-\mathbf{E}(X))^r\,\mathbf{P}([X=x_i]) \text{ ssr }|\text{cv}| \\ \text{ⓒ} \int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-\mathbf{E}(X))^r f(x)\,dx \text{ ssr }|\text{cv}| \end{cases}.$$

D Ⓢ **Moment factoriel d'ordre $r \geq 1$**
$\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum\limits_{x_i\in X(\Omega)} x_i(x_1-1)\dots(x_i-r+1)\,\mathbf{P}([X=x_i])$ ssr|cv| .

T ⓈⓒSoit $r\in\mathbb{N}$ alors $(m_{r+1}(X)<\infty)\Rightarrow(\forall k\in[\![0,r]\!], m_k(X))<\infty)$.

T Ⓢⓒ **:** $\left(\mu_{r+1}(X)<\infty\right)\Rightarrow(\forall k\in[\![0,r]\!],\ \mu_k(X)<\infty)$.

T Ⓢⓒ **:** $\forall r\in\mathbb{N}$, $(m_r(X)<\infty)\Leftrightarrow(\mu_r(X)<\infty)$.

VECTEURS ALÉATOIRES

Séries doubles

T Fubini dans le cas positif (F⊕) Soit $u=(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille à deux indices de réels positifs indexée par $I\times J\subset\mathbb{N}^2$. **Si** $\forall i\in I$, $\sum\limits_j u_{i,j}<+\infty$ *puis* $\sum\limits_i\sum\limits_{j\in J}u_{i,j}<+\infty$ **alors** $\sum\limits_{(i,j)}u_{i,j}<+\infty$. On a alors les résultats suivants : $\forall j\in J$, $\sum\limits_i u_{i,j}<+\infty$ *puis* $\sum\limits_j\sum\limits_{i\in I}u_{i,j}<+\infty$ et $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J}u_{i,j}=\sum\limits_{i\in I}\left(\sum\limits_{j\in J}u_{i,j}\right)=\sum\limits_{j\in J}\left(\sum\limits_{i\in I}u_{i,j}\right)$.

T Comparaison pour les séries à termes positifs
▶ Soit $I'\subset I$ et $J'\subset J$ et deux séries $\sum\limits_{(i,j)}u_{i,j}$ et $\sum\limits_{(i,j)}v_{i,j}$ tel que $\forall(i,j)\in I'\times J'$, $0\leq v_{i,j}\leq u_{i,j}$. Alors ($\sum\limits_{(i,j)}u_{i,j}$ cv) $\Rightarrow$ ($\sum\limits_{(i,j)}v_{i,j}$ cv).

▶ Par *contraposée* ($\sum\limits_{(i,j)}v_{i,j}$ div) $\Rightarrow$ ($\sum\limits_{(i,j)}u_{i,j}$ div).

T Sommation par paquets (admis) Soit $\sum\limits_{i,j}|u_{i,j}|<+\infty$ où $(i,j)\in I\times J$, et $(A_k)_{k\in K}$ une partition de $I\times J$, alors on a : $\forall k\in K$, $\sum\limits_{(i,j)}|u_{i,j}|<+\infty$ où $(i,j)\in A_k$ de somme $\sum\limits_{(i,j)\in A_k}u_{i,j}$, et $\sum\limits_k\left(\sum\limits_{(i,j)\in A_k}|u_{i,j}|\right)<+\infty$.

Enfin on a $\sum\limits_{k\in K}\left(\sum\limits_{(i,j)\in A_k}u_{i,j}\right)=\sum\limits_{(i,j)\in I\times J}u_{i,j}$.

Couples discrets

D Loi de probabilité d'un couple Soit $C=(X,Y)$. $P_C: X(\Omega)\times Y(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $P_C(x_i,y_j)=\mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])=p_{i,j}$.

T D Lois marginales
▶ $P_X: X(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall x_i\in X(\Omega)$, $P_X(x_i)=\mathbf{P}([X=x_i])$ et
▶ $P_Y: Y(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall y_j\in Y(\Omega)$, $P_Y(y_j)=\mathbf{P}([Y=y_j])$.

T ▶ $\forall x_i\in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X=x_i])=p_{i\bullet}=\sum\limits_{y_j\in Y(\Omega)}p_{i,j}$ et
▶ $\forall y_j\in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}([Y=y_j])=p_{\bullet j}=\sum\limits_{x_i\in X(\Omega)}p_{i,j}$.

D Lois conditionnelles
▶ $\mathbf{P}_{[X=x_i]}: Y(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall y_j\in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[X=x_i]}([Y=y_j])=\dfrac{p_{i,j}}{p_{i\bullet}}$ et
▶ $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}: X(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall x_i\in X(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X=x_i])=\dfrac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}}$.

T Caractérisation de la loi d'une fonction d'un couple Notons $Z=g(X,Y)$. *Caractériser* la loi de la variable Z, c'est donner $Z(\Omega)=g(X,Y)(\Omega)$ et pour tout z de $Z(\Omega)$: $\mathbf{P}([Z=z])=\sum\limits_{\begin{cases}(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z\end{cases}}\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])$.

T $\forall I\in\mathcal{P}(Z(\Omega))$: $\mathbf{P}([Z\in I])=\sum\limits_{\begin{cases}(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)\in I\end{cases}}\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])$.

T Ⓢ **Théorème de transfert** Soit φ *définie sur* $\mathcal{D}\supset X(\Omega)\times Y(\Omega)$,
$\mathbf{E}(\varphi(X,Y))=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in(X,Y)(\Omega)}h(x_i,y_j)\,\mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ ssr|cv| de la série double en jeu.

T Droite de régression de Y en X notée Δ a pour équation :
$\widehat{Y}=\left(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(X)}\right)(X-\mathbf{E}(X))+\mathbf{E}(Y)$ et en inversant les rôles symétriques de X et Y nous obtenons $\widehat{X}=\left(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(Y)}\right)(Y-\mathbf{E}(Y))+\mathbf{E}(X)$ qui est l'équation de la *droite de régression de X en Y* notée Δ'.

Vecteurs discrets

D Loi d'un vecteur de dimension $n\geq 2$ Soit $V=(X_1,\dots,X_n)$ $P_V: X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, définie par $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\prod\limits_{i=1}^n X_k(\Omega)$,
$P_V(x_1,\dots,x_n)=\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^n[X_i=x_i]\right)$.

D Lois marginales de dimension un : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P_{X_k}: X_k(\Omega)\longrightarrow[0,1]$, déf. par $\forall x_k\in X_k(\Omega)$, $P_{X_k}(x_k)=\mathbf{P}([X_k=x_k])$.

T $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\forall x_k\in X_k(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([X_k = x_k]) = \sum_{(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n)\in \prod\limits_{m\in[\![1,n]\!]-\{k\}} X_m(\Omega)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j = x_j]\right).$$

T **Théorème de transfert** Soit $V = (X_1,\dots,X_n)$ alors $\mathbf{E}(\varphi(X_1,\dots,X_n)) = \sum\limits_{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)} \varphi(x_1,\dots,x_n)\,\mathbf{P}([X_1 = x_1]\cap\dots\cap[X_n = x_n])$ ssr|cv|.

T **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un vecteur** Soit $V = (X_1,\dots,X_n)$ et φ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k(\Omega)$, alors la *loi* de $Z = \varphi(V)$ est *caractérisée* par la donnée de $Z(\Omega) \subset \operatorname{Im}\varphi$ et par celles de $\mathbf{P}([Z = z]) = \sum\limits_{\left\{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)\\ \varphi(x_1,\dots,x_n)=z}\right.} \mathbf{P}([X_1 = x_1]\cap\dots\cap[X_n = x_n])$ pour tout z de $Z(\Omega)$.

Covariance

D ⓈⒸ Soit $X,Y \in \mathcal{L}^2$, $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$.

P ⓈⒸ **:** Soit $X,Y \in \mathcal{L}^2$,

- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (théorème de Huygens).
- ▶ $\operatorname{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X) \geq 0$ (positivité).
- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X)$ (symétrie).
- ▶ Soit $X,Y,Z \in \mathcal{L}^2, \forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{Cov}(X,Z) + b\operatorname{Cov}(Y,Z)$ (linéarité à gauche).
- ▶ $\forall(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\operatorname{Cov}(X,Y)$.
- ▶ $\forall k$, $\forall l$, X_k et $Y_l \in \mathcal{L}_d^2$, λ_k et $\mu_l \in \mathbb{R}$,

$\operatorname{Cov}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i X_i, \sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j Y_j\right) = \sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \lambda_i\mu_j \operatorname{Cov}(X_i,Y_j)$ (bilinéarité).

T ⓈⒸ **:** $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \in \mathcal{L}^2$, $a_i \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i,X_j).$$

T **(Identités de polarisation)** ⓈⒸ **:** Soit $X,Y \in \mathcal{L}_d^2$ alors :

- ▶ $\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X+Y) + \mathbf{V}(X-Y))$.
- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{4}(\mathbf{V}(X+Y) - \mathbf{V}(X-Y))$.
- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X+Y) - \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y))$.
- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - \mathbf{V}(X-Y))$.

T Soit $X_1,\dots,X_n \in \mathcal{L}_d^2$ *indépendantes, alors* $\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{V}(X_i)$. Réciproque *fausse*.

D ⓈⒸ **:** Soit $X,Y \in \mathcal{L}^2 \mid\not\to \delta^1 : \rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}$.

P ▶ ⓈⒸ **:** Soit $X,Y \in \mathcal{L}^2 \mid\not\to \delta : |\rho(X,Y)| \leq 1$ soit $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ **(Inégalité de Cauchy-Schwarz).**

▶ ⓈⒸ **:** $(|\rho(X,Y)| = 1) \Leftrightarrow (Y = aX + b$ p.s.$)$.

D **Matrice de covariance-variance** ⓈⒸ **:** Soit pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $X_k \in \mathcal{L}_d^2$, on appelle *matrice de covariance-variance du vecteur aléatoire* $V = (X_1,\dots,X_n)$ la *matrice symétrique réelle* de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ notée Γ_V définie par : $\Gamma_V = (\operatorname{Cov}(X_i,X_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

T ⓈⒸ **:** $\forall(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = {}^t\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\Gamma_V\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$. La forme quadratique associée à Γ_V qui montre que la matrice Γ_V est positive.

Indépendance

D ▶ Ⓢ **:** $X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n \in \mathcal{L}^1$, lorsque $\forall(x_1,\dots,x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i = x_i]\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i = x_i])$.

▶ ⓈⒸ **:** $X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n$ lorsque $\forall(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i \leq x_i]\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i \leq x_i])$.

T ▶ ⓈⒸ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\forall(\varphi,\psi), \varphi(X) \perp\!\!\!\perp \psi(Y))$.

- ▶ ⓈⒸ **:** $(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{E}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i)\right)$.
- ▶ ⓈⒸ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\operatorname{Cov}(X,Y) = 0)$.
- ▶ ⓈⒸ **:** $(\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbf{0}) \Rightarrow$ **?**
- ▶ ⓈⒸ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\rho(X,Y) = 0)$ Réciproque *fausse*.
- ▶ ⓈⒸ **:** $(\rho(X,Y) = \mathbf{0}) \Rightarrow$ **?** Réciproque *fausse*.
- ▶ Ⓢ **:** $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Longrightarrow \left(\begin{cases}\mathbf{E}(X \mid [Y = y_j]) = \mathbf{E}(X)\\ \mathbf{E}(Y \mid [X = x_i]) = \mathbf{E}(Y)\end{cases}\right)$.
- ▶ ⓈⒸ **:** $\forall(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\mathbf{V}(X_i)\right)$.
- ▶ ⓈⒸ **:** **Lemme des coalitions** $(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_{n+m}) \Rightarrow (\forall \quad (\varphi,\psi),$

[1] Cela veut dire de variances non nulles.

$\varphi(X_1,\dots,X_n) \perp\!\!\!\perp \psi(X_{n+1},\dots,X_{n+m}))$ (on peut "bordéliser" comme on veut les variables aléatoires).

T **Convolution**

► Ⓢ $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow \left(\mathbf{P}([X+Y=z]) = \sum_{x \mid \left\{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}\right.} \mathbf{P}([X=x])\,\mathbf{P}([Y=z-x])\right)$

► Ⓒ $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow \left(f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\,dt\right)$, f_{X+Y} est $\mathcal{C}^0$ presque partout.

INÉGALITÉS PROBABILISTES

D $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{1}_A = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } A \\ 0 & \text{si } \overline{A}\end{array}\right.$. Par définition *une variable indicatrice est donc une variable de Bernoulli.*

P $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(A))$.

T **Inégalité de Markov (I.M.)**

► ⓈⒸ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^1$ à *valeurs positives*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}$.

► Ce qui se généralise pour $\forall r > 0$, $X \in \mathcal{L}^r$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|X| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r}$.

T **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.T.)** ⓈⒸ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^2$ *admettant variance non nulle*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|X-\mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

CONVERGENCES

Convergence en probabilité

D $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| \geq \varepsilon]) = 0$ ou $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| < \varepsilon]) = 1$.

P ► ⓈⒸ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \Leftrightarrow \left((X_n - X)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$.

► ⓈⒸ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \not\Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n - X) = 0\right)$.

T $\left(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = a \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n) = 0\right) \Rightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$.

P (pas vraiment au pgme mais ...)

► ⓈⒸ **:** $\left((|X_n|)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right) \Leftrightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$.

► ⓈⒸ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ et } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y\right) \Rightarrow (X = Y \text{ p.s.})$.

T **Slutsky** (hors programme) ⓈⒸ **:** Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$.

P ► ⓈⒸ **:** Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(aX_n + bY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} aX + bY$.

► $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$.

► $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{X}{Y}$ avec $\mathbf{P}([Y=0]) = 0$.

T **Loi faible des grands nombres**

► ⓈⒸ **:** Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *deux à deux non corrélées, (i.e. les covariances deux à deux sont nulles) d'espérance commune m et de variance commune* σ^2. Soit $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ alors $\left(\overline{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$.

► Ⓢ **:** Si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors en posant $F_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ on a : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|F_n - p| \geq \varepsilon]) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Convergence en loi

D $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point où F_X est $\mathcal{C}^0$ sur une partie de $\mathbb{R}$.

T ⓈⒸ **:** Soit a et b deux réels tel que $a < b$ on a : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([a < X_n \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b])$.

T Ⓢ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n = x_k]) = \mathbf{P}([X = x_k]))$.

T **Théorème de la limite centrée (TCL)**

► ⓈⒸ **:** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **i.i.d.** alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow N(0,1)$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n \leq x]) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}dt$.

► Le TCL existe aussi en version moyenne.

T ⓈⒸ **:** $\forall a \in \mathbb{R}$, $\left((X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} a\right) \Rightarrow \left((X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$.

Approximations

T **(Hypergéométrique par binomiale)** $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{H}(N_k, n, p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$ fixés. Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, pN_k et $N_k(1-p) \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k\to+\infty} N_k = +\infty$ alors $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (condition : $N \geq 10n$).

T **(Binomiale par Poisson)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (conditions : $n \geq 30, p \leq 0,1$).

T **(Binomiale par normale)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ainsi $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (conditions : $n \geq 30, np \geq 5$ et $nq \geq 5$).

T **(Poisson par normale)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (condition : $\lambda \geq 15$).

ESTIMATIONS

Estimation ponctuelle Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et θ un réel de Θ une partie de $\mathbb{R}$ et $g : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$.

D Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n-$éch d'une var X **i.i.d.**, on appelle **statistique** ou **estimateur de** $g(\theta)$, toute suite de variables $(T_n)_n$ où $\forall n$, $T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendante de θ. C'est une variable aléatoire réelle.

D On dit que $(T_n)_n$ est **convergent** ou **consistant** de $\boldsymbol{g(\theta)}$ lorsque $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.

D **Biais d'un estimateur par rapport à $\boldsymbol{g(\theta)}$** : $b_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta(T_n - g(\theta))$.

► Si $b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est sans bias**.

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est asymptotiquement sans bias.**

T ⓈⒸ **:** Si $b_{T_n}(\theta) = 0$ soit si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}_\theta(T_n) = 0$ alors (T_n) est convergent soit $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.

D On appelle **risque quadratique moyen** de T_n : $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta\left((T_n - g(\theta))^2\right)$.

T ⓈⒸ **:** $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{V}_\theta(T_n) + b_{T_n}^2(\theta)^2$.

T ⓈⒸ **:** $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0\right) \Rightarrow \left((T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)\right)$.

Estimateurs de paramètres usuelles sans biais et convergents

Moyenne empirique Soit n un entier naturel non nul, μ un réel inconnu que l'on cherche à estimer et σ strictement positif.

D ⓈⒸ **:** $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ où le $n-$ échantillon est tel que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{E}(X_k) = \mu$ inconnue.

T ⓈⒸ **:** $\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mu$ et $\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$ où μ est un réel et

T ► Ⓒ **:** $\left(\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ où μ est un réel et σ strictement positif.

► ⓈⒸ **:** $\left(\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \not\hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right.$ voire de loi commune ??$)$ $\Rightarrow \left(\overline{X_n} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ par le TCL pour n grand, où μ est un réel et σ strictement positif.

T ⓈⒸ **:** $\left(\overline{X_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$.

Fréquence empirique Soit $n \in \mathbb{N}^*$, p et q deux réels de $]0,1[$ inconnus donc à estimer, tel que $p + q = 1$.

D Ⓢ **:** $F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ où le $n-$ échantillon est tel que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où p est inconnu.

T $\mathbf{E}(F_n) = p$ et $\mathbf{V}(F_n) = \frac{pq}{n}$.

T Ⓢ **:** $\overline{X_n} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ par le **TCL** pour n *grand*, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$.

T Ⓢ **:** $(F_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} p$

Variance empirique Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et θ un réel de Θ une partie de $\mathbb{R}$.

D ⓈⒸ **:** $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X_n}\right)^2$ où le $n-$ échantillon est tel que $\forall k$, $\mathbf{E}(X_k) = m$ *connue* et $\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2$ *inconnue.*

T ⓈⒸ **:** $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \left(\overline{X_n}\right)^2$.

T ⓈⒸ **:** $\mathbf{E}\left(S_n^2\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$.

T ⓈⒸ **:** $\left(\frac{n}{n-1} S_n^2\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$.

Estimation par intervalle de confiance de $\boldsymbol{g(\theta)}$ au risque $\boldsymbol{\alpha}$ ($\mathbf{IC}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{(\theta)}$)

D L'intervalle aléatoire $[U_n, V_n]$ est un **intervalle de confiance de $\boldsymbol{g(\theta)}$ au niveau $\boldsymbol{1-\alpha}$** si $\mathbf{P}([U_n, V_n] \ni g(\theta)) \geq 1 - \alpha$ autrement dit si $\mathbf{P}([U_n \leq g(\theta) \leq V_n]) \geq 1 - \alpha$ (α est appelé le **risque**).

T $IC_\alpha(p) = \left[\ F_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\ ;\ F_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\ \right]$ et $IC_\alpha(p) \subset \left[\ F_n - \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\ ;\ F_n + \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\ \right]$ (condition $\min(nu_n, nv_n, n(1-u_n), n(1-v_n)) \geq 5$).

T ⓈⒸ **:** $IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right]$ (condition $n \geq 30$). Si σ est *inconnu*, l'estimer par la réalisation de $\sqrt{\frac{n}{n-1}} S_n$ noté s ce qui donne : $IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ \right]$.

LOIS

Loi de Bernoulli Ⓢ

► **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

► **Paramètre :** $p \in]0,1[$

► **Epreuve type :** épreuve amenant deux issues seulement : succès ou échec.

► $X(\Omega) = \{0,1\}$

► $\mathbf{P}([X=0]) = 1 - p$; $\mathbf{P}([X=1]) = p$

▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1-p & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = p$
▶ $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longleftrightarrow (1 - X \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p))$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)) \Longleftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$
▶ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longrightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\right)$

Loi binomiale Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
▶ **Paramètres :** $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$
▶ **Epreuve type :** succession de n épreuves de **Bernoulli**[2] **indépendantes** et de **même paramètre** p.
▶ $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
▶ $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
▶ $\mathbf{E}(X) = np$
▶ $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)) \Longleftrightarrow (n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p))$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)) \Longleftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$
▶ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longrightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\right)$
▶ $\mathcal{B}(n_1, p) * \cdots * \mathcal{B}(n_l, p) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum\limits_{k=1}^{l} n_k, p\right)$ (**stabilité** de la loi binomiale pour la **somme** de variables **indépendantes**)

Loi de Dirac Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \delta_c$
▶ **Paramètre :** $c \in \mathbb{R}$
▶ **Epreuve type :** numéro associée à une boule tirée d'une urne ne contenant que des boules ayant le même numéro c.
▶ $X(\Omega) = \{c\}$
▶ $\mathbf{P}([X = c]) = 1$
▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < c \\ 1 & \text{si} \quad x \geq c \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = c$
▶ $\mathbf{V}(X) = 0$
▶ $(\mathbf{V}(X) = 0) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_c)$
▶ $\left(\mathbf{E}\left(X^2\right) = 0\right) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_0)$

[2] Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues seulement.

Loi exponentielle ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$
▶ **Paramètre :** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
▶ **Epreuve type :** temps d'attente entre deux phénomènes indépendants tels que des arrivées à un guichet, ou des appels téléphoniques.
▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
▶ $(X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)) \Leftrightarrow$ **(** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathbf{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbf{P}([X > y])$**)** **(abscence de mémoire)** ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, x]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]x, x+y]$
▶ $\varepsilon(\lambda) = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$
▶ $\underbrace{\varepsilon(\lambda) * \cdots * \varepsilon(\lambda)}_{n \text{ fois}} = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$
▶ Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$
▶ Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\lfloor X \rfloor \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{N}}(p)$ (hors programme mais ...)

Loi grand gamma ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \Gamma(b,t)$
▶ **Paramètres :** $b \in \mathbb{R}_+^*$, $t \in \mathbb{R}_+^*$
▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$
▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{b}} x^{t-1}}{\Gamma(t)\, b^t} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = bt$
▶ $\mathbf{V}(X) = b^2 t$
▶ $\forall (t_1, t_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\int_0^1 v^{t_1 - 1} (1-v)^{t_2 - 1}\, du = \frac{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}{\Gamma(t_1 + t_2)}$
▶ $\Gamma(1,t) = \gamma(t)$
▶ $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right) = \varepsilon(\lambda)$
▶ $(X \hookrightarrow \gamma(t)) \Longleftrightarrow (bX \hookrightarrow \Gamma(b,t))$
▶ $(X \hookrightarrow \Gamma(b,t)) \Longleftrightarrow \left(\frac{X}{b} \hookrightarrow \gamma(t)\right)$
▶ $(X \hookrightarrow \Gamma(b,t)) \Longleftrightarrow \left(b'X \hookrightarrow \Gamma(bb', t) \text{ où } b' \in \mathbb{R}_+^*\right)$
▶ $\Gamma(b, t_1) * \cdots * \Gamma(b, t_n) = \Gamma\left(b, \sum\limits_{k=1}^{n} t_k\right)$

▶ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)\right)$ (loi du chi-deux à n degrés de liberté, hors programme mais ...)

▶ $(X \hookrightarrow \Gamma(b,n)$ et $n \geq 30) \Longrightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(bn, b^2 n\right)\right)$ (hors programme mais ...)

Loi petit gamma ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \gamma(t)$

▶ **Paramètre :** $t \in \mathbb{R}_+^*$

▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

▶ $\mathbf{E}(X) = t$

▶ $\mathbf{V}(X) = t$

▶ $\gamma(t) = \Gamma(1,t)$

▶ $\underbrace{\gamma(t_1) * \cdots * \gamma(t_n)}_{n \text{ fois}} = \gamma\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)$

Loi géométrique Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

▶ **Paramètre :** $p \in]0,1[$

▶ **Epreuve type :** c'est le rang d'apparition du premier succès lors d'une **succession illimitée** d'épreuves de Bernoulli.

▶ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

▶ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([X=k]) = q^{k-1} p$ avec $q = 1-p$

▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^k & \text{si } x \in [k, k+1[, \quad k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ avec $q = 1-p$

▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$

▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}$ avec $q = 1-p$

▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \Leftrightarrow (\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}_{[X>n]}([X > m+n]) = \mathbf{P}([X>m]))$ **(abscence de mémoire)** ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, n]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]n, n+m]$.

▶ $\underbrace{\mathcal{G}(p) * \cdots * \mathcal{G}(p)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{P}(r,p)$ (loi de Pascal) (Hors programme mais ...)

Loi hypergéométrique Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$

▶ **Paramètres :** $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in [\![0,N]\!]$, $p \in]0,1[\mid (Np, N(1-p)) \in \mathbb{N}^2$

▶ **Epreuve type :** c'est le nombre de boules blanches obtenues à partir d'une succession de n tirages effectués sans remise à partir d'une urne bicolore.

▶ $X(\Omega) = [\![\max(0, n - Nq), \min(Np, n)]\!]$

▶ $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}([X=k]) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

▶ $\mathbf{E}(X) = np$

▶ $\mathbf{V}(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ (savoir retrouver)

▶ **Approximation :** $(X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ et $N \geq 10n) \Rightarrow (X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(n,p))$

Loi normale centrée et réduite ou de Laplace-Gauss ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

▶ **Paramètres :** 0 et 1

▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}$

▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

▶ **Intégrale de Gauss**

▶ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

▶ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (intégrale tabulée)

▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (ie $\Phi - \frac{1}{2}$ est impaire)

▶ $\Phi(0) = 1/2$

▶ **Mode :** 0

▶ **Médiane :** 0

▶ $\mathbf{E}(X) = 0$

▶ $\mathbf{V}(X) = 1$

▶ $\mathbf{E}(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1 \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} & \text{si } n = 2m \in 2\mathbb{N} \end{cases}$ (à retrouver !)

▶ $\left(\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right) \Leftrightarrow \left(X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)\right)$

▶ **Stabilité de la loi normale** pour la **somme** de variables **indépendantes**

♦ $\underbrace{\mathcal{N}(0,1) * \cdots * \mathcal{N}(0,1)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}(0,n)$

♦ $\underbrace{\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right) * \cdots * \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$

♦ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)\right)$ (hors programme mais ...)

▶ **Approximations :**

$\left(\left\{\begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{array}\right.\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))\right)$

$\left(\left\{\begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{array}\right.\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$

Loi normale quelconque ou de Laplace-Gauss ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$
▶ **Paramètres :** $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$
▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}$
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$
▶ **Mode :** m
▶ **Médiane :** m
▶ $\mathbf{E}(X) = m$
▶ $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$
▶ $\left(X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)\right) \iff \left(\dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right)$ (théorème fondamental de la loi noramle)
▶ $\mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right) * \cdots * \mathcal{N}\left(m_n, \sigma_n^2\right) = \mathcal{N}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k, \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$ (**stabilité** de la loi normale pour la **somme** de variables **indépendantes**)
▶ **Approximations :**
♦ $\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))\right)$
♦ $\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$
♦ $\left((X_n)_{n\geq 1}\ \boldsymbol{i.i.d.}\right) \Rightarrow \left(\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mathbf{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sigma\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right)$ (**TCL**)

Loi de Poisson Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
▶ **Paramètre :** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
▶ **Epreuve type :** nombre d'apparitions d'un phénomène rare durant un intervalle de temps donné.
▶ $X(\Omega) = \mathbb{N}$
▶ $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([X=k]) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \lambda$
▶ $\mathbf{V}(X) = \lambda$
▶ $\mathcal{P}(\lambda_1) * \cdots * \mathcal{P}(\lambda_n) = \mathcal{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$ (**stabilité** de la loi de Poisson pour la **somme** de variables **indépendantes**)
▶ $\mathbf{P}([X=0]) = 1 - F_Y(1)$ où $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$
▶ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$

▶ **Approximations :**
♦ $\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$
♦ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \text{ et } n \geq 30, p < 0.1) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(np)\right)$

Loi uniforme continue ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$
▶ **Paramètre :** $[a,b]$ où $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ a < b.$
▶ $X(\Omega) = [a,b]$
▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$
▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])) \Leftrightarrow ((b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]))$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])) \Rightarrow \left(-\frac{1}{\lambda}\ln X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)\right)$

Loi uniforme discrète Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $n \geq 1$
▶ **Paramètre :** $[\![1,n]\!]$
▶ **Epreuve type :** numéro d'une boule tirée d'une urne constituée de boules numérotées de 1 à n.
▶ $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$
▶ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}([X=k]) = \frac{1}{n}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
▶ **Si** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ avec $a \leq b$ **alors** $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b-a+1]\!])$ et $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
▶ **Simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.**

```
Function Uniforme(n:integer):integer;
begin
Uniforme:=random(n)+1;
end;
```

Légendes et abréviations

▶ $\boxed{\mathbf{D}}$ Définition.

▶ $\boxed{\mathbf{T}}$ Théorème.

▶ $\boxed{\mathbf{P}}$ Propriété (s).

▶ $\boxed{\mathbf{C}}$ Corollaire.

▶ ⓒ **:** valable en continu.

▶ Ⓢ **:** valable en discret.

▶ $|E|$: cardinal de E.

▶ ssrcv : sous réserve de convergence.

▶ ssr|cv| : sous réserve de convergence absolue.

▶ i.i.d. : variables indépendantes et identiquement distribuées.

▶ SCE : système complet d'événements.

▶ v.a.r.d. : variable aléatoire discrète.

▶ v.a.r.a.d. : variable aléatoire à densité.

▶ $\sum\limits_{i} u_i < +\infty$: série simple convergente

▶ $\sum\limits_{i,j} u_{i,j} < +\infty$: série double convergente

▶ $A \perp\perp B$: A et B indépendants.

▶ $X \perp\perp Y$: X et Y indépendantes.

▶ $X_1 \perp\perp \ldots \perp\perp X_n$: $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes.

▶ $\forall k \geq 1$, $\mathcal{L}^k$ (respectivement $\mathcal{L}_d^k$) espace vectoriel des variables (discrètes) admettant un moments d'ordre k.

▶ P_X : loi de X.