

Probabilités

Polycopié d'exercices

Sommaire

I Travaux dirigés	2
1 Outils mathématiques	2
2 Ensembles	5
3 Dénombrement	6
4 Espaces probabilisés	8
5 Variables aléatoires discrètes (dimension 1)	12
6 Vecteurs aléatoires discrets	15
7 Variables aléatoires à densité	19
8 Convergences et approximations	22
9 Estimations	25
II Quelques grands thèmes probabilistes	28
10 Indice de Theil et inégalité de convexité	28
11 Variables à densités définies par une intégrale	28
12 Statistique d'ordre : étude de la loi de médiane d'un échantillon de variables aléatoires	29
13 Recherche d'un équivalent simple d'une espérance	30
14 Etude d'une distance entre des lois de probabilité	30
15 Variables aléatoires symétriques - Variables indicatrices	31
16 Indicatrices d'événements et inégalités probabilistes	32
17 Sommes aléatoires de longueur aléatoire	32
18 La méthode du maximum de vraisemblance	33
III Questions courtes type "QSP"	35

Le poly comporte 56 pages d'énoncés de 290 exercices.

Partie I

Travaux dirigés

Voici en quelques 147 opus, choisis avec beaucoup de soin et d'amour, l'intégralité des exercices constituant les travaux dirigés que nous ferons ensemble tout au long de l'année et qui formeront le socle de votre formation de futurs probabilistes de haut niveau prêts à être confrontés aux concours parisiens.

L'ensemble est divisé en neuf sections correspondant aux chapitres qui constituent l'ensemble de votre programme des deux années option scientifique. Il contient la quasi-totalité des thèmes qu'ils soient intellectuels ou calculatoires véritablement incontournables, même si l'exhaustivité est difficilement accessible en prépa¹. Je vous préciserez en cours à chaque fois les points essentiels à retenir pour chaque exercice de manière à ce que vous en tiriez un profit maximal. Je rappelle qu'il est bon de ficher un exercice si celui-ci peut vous apporter des réflexes mécaniques à appliquer dans des situations similaires, même si je ne manquerai pas de vous donner mes propres "posters".

Je rappellerai aussi le conseil trivial précisant que vous devrez absolument passer de longues minutes **en amont** de la correction à préparer ces exercices, voire souffrir dessus, cela est indispensable pour que les notions abordées en cours vous marquent l'esprit. Je rappellerai aussi que contrairement à d'anciennes éventuelles mauvaises habitudes, il faut remettre les choses dans le bon sens à savoir maîtriser le cours avant d'aborder les exercices

1 Outils mathématiques

1. **Calcul de sommes simples finies** Reformer les sommes suivantes :

$$(a) \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ i \neq j}} 1 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } j \text{ un entier non nul fixé.}$$

$$(b) \sum_{k=p}^n a \quad \text{pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } p \leq n.$$

$$(c) \sum_{k=p}^n k \quad \text{où } (p, n) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } p \leq n.$$

2. **La somme des cubes** (BCPST1_1.05) Déterminer une fonction polynomiale

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

de degré 4 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $P(x) - P(x-1) = x^3$. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. **Fractions rationnelles et télescopage** (BCPST1_1.06)

(a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x réel strictement positif, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S(n) = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

En utilisant (a) exprimer $S(n)$ en fonction de n . Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)$?

¹Cela vous changera beaucoup du secondaire !!!

4. **Fractions rationnelles et télescopage** (WARUS27.126) Démontrer que, pour tout entier non nul n , on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

5. **La formule du triangle de Pascal généralisée** (BCPST1_1.03) Soient n et p deux entiers naturels. On suppose $p \geq 1$ et $n \geq p$.

- (a) En utilisant la relation de Pascal, montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq p$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{k}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

- (b) En utilisant (a) vérifier que si $n \geq 2$, alors :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1) \times n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

- (c) Si $n \geq 3$, donner une formule analogue pour la somme suivante :

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + (n-2)(n-1)n$$

6. **Le calcul différentiel au secours d'une sommation** (BCPST1_1.13) Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

- (a) Donner une expression "simple" de $f(x)$. En déduire que la dérivée f' de f est :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx - (n+1)}{(1-x)^2} x^n$$

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$. Remarquer que $S(n) = xf'(x)$ pour une valeur de x bien choisie. Donner la valeur de la somme $S(n)$. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$?

7. **Le calcul différentiel au secours d'une sommation** (BCPST1_1.14) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, développer par la formule du binôme de l'expression $f(x) = (1+x)^n$. Intégrer entre 0 et 1 les deux expressions de f . En déduire une expression simple de :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Retrouver le résultat précédent en utilisant une propriété des coefficients binomiaux.

8. **Le calcul différentiel au secours d'une sommation** (BCPST1_1.15)

- (a) Développer par la formule du binôme de Newton $f(x) = (1+x)^n$.

- (b) En calculant de deux manières différentes $\int_0^{-1} f(x) dx$, calculer la somme :

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k}$$

- (c) En calculant $f'(x)$ pour des valeurs bien choisies de x , calculer :

$$V_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad W_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \binom{n}{k}$$

9. **Des "sommées orphelines"** (BCPST1_1.16_Type HEC 86)

- (a) Soient $p = 2k$ un entier pair et $i = 2k + 1$ un entier impair. Vérifier que $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = k$ et $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = k$.
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, développer par la formule du binôme $X = (1 + 1)^n$ et $Y = (1 - 1)^n$. En étudiant $X + Y$ et $X - Y$, donner la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et de} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$$

10. Sommes de produits de coefficients binomiaux

- (a) Calculer pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$.
- (b) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$.

11. Calcul de sommes doubles finies

- (a) (BCPST1_1.10) Soit $n \in \mathbb{N}_2$. Vérifier que $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$. En déduire les sommes

$$U_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j j$$

en fonction de n .

- (b) (BCPST1_1.11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer en fonction de n la somme $u_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$.
- (c) (BCPST1_1.12) Soient n et m deux entiers naturels non nuls calculer en fonction de m et n les sommes :

$$S_{n,m} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n 2^{i+j} \quad \text{et} \quad T_{n,m} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=j}^n 2^{i-j}$$

- (d) (WARUS 2.123) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{k}{j}$.

12. Calcul de sommes doubles finies (PHAREPSCI_2.22)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $A_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$ et $B_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$.

13. Calcul de produits

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}_2$. Calculer $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
- (b) (PHAREPSCI 2.17) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer pour $n \geq 1$:

- i. $V_n = \prod_{k=1}^n \alpha^k$.
- ii. $W_n = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^2}{k}$.
- iii. $Z_n = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha}{k^2}$.

14. Calcul d'un produit à deux indices (WARUS 27.127)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

2 Ensembles

- Ensemble des parties d'un ensemble (W3.80)** Soient E et F deux ensembles.
 - Prouver que $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$
 - Montrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. A-t-on l'égalité ?
- Une condition nécessaire et suffisante (W4.80)** Soit E un ensemble, et A et B des sous-ensembles de E . Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $A = B$ est que :

$$A \cup B = A \cap B$$

- Egalités d'ensembles (W5.80)** Soit E un ensemble. Montrer que, quels que soient les sous-ensembles A, B et C de E , si $A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$, alors $A = B = C$.
- Egalités d'ensembles (W6.80)** Soit E un ensemble. Prouver que, quels que soient les sous-ensembles A et B de E , s'il existe un sous-ensemble X de E tel que $A \cup X = B \cup X$ et $A \cap X = B \cap X$, alors $A = B$.
- Egalités d'ensembles (W8.80)** Soit E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E .
 - Prouver que $A \setminus B = A$ équivaut à $B \setminus A = B$.
 - Prouver que $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
 - Prouver que $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
 - Prouver que $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
- Simplification d'expressions ensemblistes (W9.80)** Soient E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E .
 - Calculer $(X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y})$.
 - Calculer $(X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y})$.
 - Calculer $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})$.
 - Calculer $B = (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) \cap (\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})$.
- L'opération $|$ (W11.81)** Soient E un ensemble. Pour tous les sous-ensembles A et B de E , on pose $A | B = \overline{A \cup B}$.
 - Exprimer \bar{A} à l'aide de A et de l'opération " $|$ ".
 - Calculer $(A | A) | (B | B)$.
 - Exprimer $A \cup B$, $A \setminus B$ et $A \Delta B$ à l'aide seulement de A , de B et de l'opération " $|$ ".
- Fonction indicatrice (W25.83)** Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E .
 - Déterminer la fonction indicatrice (ou fonction caractéristique) de l'ensemble $A \setminus B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et de B .
 - Déterminer la fonction indicatrice de l'ensemble $A \Delta B$ (différence symétrique de A et B) à l'aide des fonctions indicatrices de A et de B .
 - Utiliser les résultats des questions précédentes pour montrer que, quels que soient les parties A, B et C de E :
 - $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
 - $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;
 - $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
 - Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$.
 - Prouver que, pour que $A = \emptyset$, il faut et il suffit qu'il existe une partie B telle que $A \Delta B = B$.

3 Dénombrement

1. Le problème des anagrammes (W21.219)

- Une urne contient a_1 boules numérotées 1, a_2 boules numérotées 2, a_3 boules numérotées 3, ..., a_p boules numérotées p . L'urne contient donc $N = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p$ boules. On tire les N boules successivement et sans remise en notant le numéro à chaque tirage. De combien de façons les entiers présents dans l'urne peuvent-ils être répartis au cours des N tirages ?
- On considère le mot "ABRACADABRANTESQUE". Trouver le nombre d'anagrammes de ce mot.
- Quel rapport existe-t-il entre la question (a) et la question (b) ?

2. On passe tout au crible ! (W12.217) Dans une classe de 26 élèves étudiant tous au moins une langue, 10 élèves étudient l'espagnol, 16 l'allemand, 22 l'anglais, 8 l'espagnol et l'anglais, 4 l'espagnol et l'allemand, 12 l'anglais et l'allemand. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

3. Des équipes de foot (W13.218) Un club de football est composé de 31 joueurs, dont 4 gardiens de but. Combien d'équipes différentes de 11 joueurs dont un gardien peut-on former ? (on ne tient pas compte de la place des joueurs, sauf pour les gardiens qui ne peuvent pas jouer à une autre place).

4. Jeu de cartes (W14.218)

- De combien de façons peut-on tirer une main de 8 cartes d'un jeu de 32 cartes ?
- Combien de ces mains contiendront 4 coeurs ?
- Combien de ces mains contiendront 4 coeurs et 3 valets (attention au cas du valet de coeur) ?

5. Construction de p – listes sous contraintes (W20.219) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

- On suppose que $p \geq 2$. Trouver le nombre de p – listes d'éléments distincts de $[1, n]$ telles que le plus petit soit en premier et le plus grand en dernier.
- On suppose que $p \geq 3$. Trouver le nombre de p – listes d'éléments distincts de $[1, n]$ telles que les trois plus grands soient aux trois premières places (dans l'ordre ou non).
- On suppose que $p \geq 3$. Trouver le nombre de p – listes d'éléments distincts de $[1, n]$ telles que les trois plus grands soient aux trois dernières places (dans l'ordre ou non), et les trois plus petits aux trois premières places (dans l'ordre ou non).

6. Construction de p – listes sous contraintes (W24.220) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

- Déterminer combien existe-t-il de listes (x_1, x_2, \dots, x_p) de p entiers naturels tels que :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$$

- Déterminer combien existe-t-il de listes (x_1, x_2, \dots, x_p) de p entiers naturels non nuls tels que :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$$

- Soient $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$ des entiers naturels tels que $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_p \leq n$. Déterminer combien il existe de listes $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)$ de p entiers naturels non nuls tels que $x_1 \geq r_1$, $x_2 \geq r_2$, $x_3 \geq r_3, \dots, x_p \geq r_p$ et $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = n$.

7. Partitions par paires et tournoi de tennis (W26.221) Soit E un ensemble de cardinal $2n$. On appelle partition par paires tout ensemble $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ où les p_i sont des paires d'éléments de E deux à deux disjointes.

- Déterminer le nombre de partitions par paires de l'ensemble E .
- Un tournoi de tennis (en simple) réunit 64 joueurs². De combien de façons peut-on organiser le premier tour ? Combien l'organisateur du tournoi devra-t-il prévoir de rencontre ?

²Taille d'un tournoi type Masters Series dont le recordman des victoires est André Agassi avec 17 réalisations. La dernière ayant eu lieu contre toute attente à Cincinnati en août 2004 en battant au passage Andy Roddick 75 67 76 en demi à l'occasion d'un match mythique et Hewitt en finale 63 36 62, ce qui mettait fin à 16 mois de disette, sa dernière victoire datant d'avril 1984 à Houston !

(c) Même questions pour un tournoi en double réunissant 64 joueurs (les équipes sont tirés au sort).

8. **Partitions** (W27.221) Soit E_n un ensemble non vide de cardinal n . Une partition \mathfrak{A} de A est un ensemble $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ de parties de E_n non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E_n . On note $\bar{\omega}_n$ le nombre de partitions de E_n .

(a) Calculer $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$.

(b) On fixe un élément a de E_n . En considérant la partie qui contient a , établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \bar{\omega}_n = \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} \bar{\omega}_{n-p} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \bar{\omega}_k$$

(c) Calculer $\bar{\omega}_k$ pour $k \leq 7$.

9. **Points fixes** (W28.222/Type ESSEC 2004) Soit n un entier naturel non nul. On note \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de $[[1, n]]$ (c'est-à-dire des bijections de $[[1, n]]$ sur lui-même). Soit σ un élément de \mathfrak{S}_n . On dit que l'élément i de $[[1, n]]$ est un **point fixe** de σ si, et seulement si, il est invariant par σ (c'est-à-dire si, et seulement si, $\sigma(i) = i$). On dit que σ est un dérangement lorsqu'elle n'admet pas de point fixe.

(a) Pour tout élément i de $[[1, n]]$, on note A_i l'ensemble des éléments de \mathfrak{S}_n admettant i comme point fixe.

Exprimer l'ensemble D_n des dérangements de $[[1, n]]$ à l'aide des A_i .

En utilisant la formule de Poincaré, calculer le cardinal du complémentaire de D_n dans \mathfrak{S}_n .

En déduire le cardinal $d(n)$ de l'ensemble D_n .

(b) On note φ_n^p le nombre des permutations de $[[1, n]]$ admettant p points fixes.

Exprimer φ_n^p à l'aide de $d(n-p)$.

En déduire une expression de φ_n^p sous forme de somme.

10. **Réunion d'ensembles** (W18.218) Soit E un ensemble de cardinal n .

(a) Calculer le nombre de paires (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$. Combien de telles paires satisfont-elles en plus à la condition $A \neq B$?

(b) Combien existe-t-il de couples de parties de E dont la réunion soit égale à E ? Combien existe-t-il de recouvrements de E à l'aide de deux parties ?

(c) Combien existe-t-il de triplets de parties dont la réunion soit égale à E ? Généraliser à k parties.

4 Espaces probabilisés

1. **Langage ensembliste-langage probabiliste** (Foata 1.5) Soient A, B, C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations ensemblistes les événements ci-après :

- A seul se produit.
- A et C se produisent, mais non B .
- Les trois événements se produisent.
- L'un au moins des événements se produit.
- Deux événements au moins se produisent.
- Un événement au plus se produit.
- Aucun des trois événements ne se produit.
- Deux événements exactement se produisent.
- Pas plus de deux événements ne se produisent.

2. **Manipulations de probabilités** (Guégand18.71) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A et B dans \mathcal{A} tels que $\mathbf{P}(A \cap B) \neq 0$. Calculer $\mathbf{P}_B(A)$, $\mathbf{P}_A(B)$, $\mathbf{P}_{A \cap B}(A \cup B)$, $\mathbf{P}_B(\overline{A})$ et $\mathbf{P}_B(\overline{A \cup B})$ en fonction de $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$.

3. **Manipulations de probabilités** (Cassini2.19) Si $\mathbf{P}(C) > 0$, montrer que :

$$\mathbf{P}_C(A \cup B) = \mathbf{P}_C(A) + \mathbf{P}_C(B) - \mathbf{P}_C(A \cap B)$$

4. **Manipulations de probabilités** (Cassini9.20) Si A, B, C sont indépendants et $\mathbf{P}(A \cap B) \neq 0$, montrer que :

$$\mathbf{P}_{A \cap B}(C) = \mathbf{P}(C)$$

5. **Manipulations de probabilités** (Guégand11.71) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff \mathbf{P}(A \cap B) \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) \mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$$

6. **Inégalité probabiliste** (Guégand22.71) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, montrer que :

$$[\mathbf{P}(A \cap B)]^2 \leq \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$$

7. **Inégalité probabiliste** (Cassini18.21) Si $\mathbf{P}(A) > 0$, montrer que :

$$\mathbf{P}_{A \cup B}(A \cap B) \leq \mathbf{P}_A(A \cap B)$$

8. **Inégalité probabiliste** Soient A et B deux événements tels que $\mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) \neq 0$. Montrer que :

$$\mathbf{P}_B(A) > \mathbf{P}(A) \implies \mathbf{P}_A(B) > \mathbf{P}(B)$$

9. **Inégalités probabilistes** (Guégand8.71) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Montrer que :

- $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, $\mathbf{P}(A \cap B) \geq \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(\overline{B})$.
- $\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$, $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^n \mathbf{P}(\overline{A}_k)$.
- $(\overline{B} \cap \overline{C}) \subset \overline{A} \implies \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$.

10. **Inégalité probabiliste** (Guégand20.71) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A, B, C dans \mathcal{A} .

- Calculer $\mathbf{P}(A \Delta C)$.
- Montrer que $\mathbf{P}(A \Delta C) \leq \mathbf{P}(A \Delta B) + \mathbf{P}(B \Delta C)$.

11. **Inégalités de Bonferroni** (Cassini16.14) Montrer que :

$$(a) \mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j).$$

$$(b) \mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

12. **La formule de Poincaré "customisée"** (Foata 4.22) Montrer que la formule de Poincaré est encore vraie en échangeant les signes " \cup " et " \cap "; en d'autres termes, montrer que l'on a :

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k})$$

13. **Majoration d'une probabilité** (Cassini17.21) Soient (A_1, \dots, A_n) n événements indépendants d'un espace probabilisé, montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $\exp \left(- \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \right)$.

14. **Application de la sous-additivité** (Quebec 19) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(A_n) = 1$. Montrer que :

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{n \geq 1} A_n \right) = 1$$

15. **Le lemme de Borel-Cantelli** (MazliakB3.26) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements défini sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Montrer que la probabilité qu'une infinité d'événements A_i se produisent simultanément est nulle.

16. **Une chaîne de Markov³** (e=mc²13) Trois enfants A,B,C jouent à la balle.

- Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à B est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- Lorsque B a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à A est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- C envoie toujours la balle à B.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "A (resp. B,C) a la balle à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer".

On pose $a_n = p(A_n), b_n = p(B_n), c_n = p(C_n)$.

Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs; c'est par convention le lancer numéro 0. Donc on pose $a_0 = p(A_0), b_0 = p(B_0), c_0 = p(C_0)$ avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

(a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Montrer en la déterminant, qu'il existe une matrice

$D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = D^n X_0.$$

(b) En admettant⁴ que :

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{5}{14} \left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & \frac{3}{10} \left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{9}{14} \left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} & -\frac{6}{5} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{6}{7} \left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{12}{35} \\ -\frac{1}{10} \left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{5}{14} \left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & -\frac{1}{10} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{9}{14} \left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} & \frac{2}{5} \left(\frac{-1}{4}\right)^n - \frac{6}{7} \left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{16}{35} \\ -\frac{1}{5} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

calculer X_n en fonction de n .

³Mathématicien russe (1856 – 1922)

⁴pour de très peu de temps encore tant que vous n'avez pas étudié la diagonalisabilité d'une matrice en algèbre linéaire...

- (c) Calculer les limites de a_n, b_n, c_n quand n tend vers $+\infty$.
17. **Jeu de pile ou face** (Oral ESCP 3.8.02) On considère deux pièces truquées A et B ; A donne pile avec la probabilité a ($0 < a < 1$), et B donne Pile avec la probabilité b ($0 < b < 1$). On choisit une pièce au hasard et on la lance : si on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois ($k \geq 2$).
- Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au k -ième lancer.
 - Déterminer la probabilité d'obtenir pile au k -ième lancer.
 - Déterminer la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini. Interpréter le résultat obtenu si l'on suppose maintenant $a = 1$ et $0 < b < 1$.
18. **Autour de la formule du crible** (Oral ESCP 3.13.02) Soient n et r deux entiers strictement positifs. Lors de la kermesse d'une association, n personnes sont présentes. On tire r fois au sort une personne (avec remise) pour offrir r lots aux personnes présentes.
- Calculer, en fonction de n et de r , la probabilité qu'une personne donnée P_1 ne reçoive aucun lot.
 - Soit k un entier inférieur strictement à n . Calculer, en fonction de n et de r , la probabilité que les personnes P_1, P_2, \dots, P_k ne reçoivent aucun lot.
 - Rappeler la formule du crible.
 - Calculer, en fonction de n et de r , la probabilité que chaque personne ait reçu au moins un lot.
 - Soit m un entier strictement inférieur à n . Déduire de la question précédente le calcul, en fonction de n, r et m , de la probabilité p_m qu'exactement m personnes, parmi les n personnes présentes, n'aient rien reçu.
 - Comment calculer la probabilité q_m qu'au moins m personnes n'aient rien reçu ?
19. **Jeu de dés** On lance deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.
- Soit E_n l'événement "une somme de 5 apparaît au $n^{\text{ème}}$ double jet et sur les $n - 1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît". Calculer $\mathbf{P}(E_n)$.
 - Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.
 - Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.
 - Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?
20. **Tirages dans une urne bicolore** (Cassini10.20) Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard (chaque boule a la même probabilité d'être tirée), et une seconde boule est ensuite choisie au hasard parmi les $r + n - 1$ boules restantes. Trouver la probabilité pour que :
- Les deux boules soient rouges.
 - La première boule soit rouge et la seconde noire.
21. **Urne de Pôlya** (Cassini11.20) Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard, on note sa couleur, et on la remet avec d boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire. Trouver la probabilité pour que :
- La seconde boule tirée soit noire.
 - La première boule est noire, sachant que la seconde est noire.
22. **Le théorème de Bayes** Une matière étant enseignée par 3 professeurs A, B, C le sujet d'examen est susceptible d'être donné par l'un des 3 enseignants. D'après les statistiques des années précédentes et aussi d'après les charges d'examens prévues, les étudiants évaluent à :
- 0,35 la probabilité que ce soit l'enseignant A qui pose le sujet.
 - 0,40 la probabilité que ce soit l'enseignant B qui pose le sujet.

- 0,25 la probabilité que ce soit l'enseignant C qui pose le sujet.

Par ailleurs, ils redoutent qu'un certain chapitre R fasse l'objet d'une question à l'examen. Par des déductions psychologiques, ils évaluent à 10% la probabilité que le chapitre R soit choisi si c'est l'enseignant A qui pose le sujet, 40% si c'est l'enseignant B, 80% si c'est l'enseignant C. Le jour J arrive et l'événement tant redouté se produit. Quelles sont les probabilités que le sujet ait été posé par :

- (a) L'enseignant A ?
- (b) L'enseignant B ?
- (c) L'enseignant C ?

23. **Jeu de pile ou face** Soit p un réel de l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Une personne joue à un jeu de pile ou face. A chaque lancer, elle a une probabilité p d'obtenir "pile" et une probabilité $1 - p$ d'obtenir "face". La personne est déclarée gagnante dès qu'elle a obtenu deux "piles" de plus que de "faces", et est déclarée perdante dès qu'elle a obtenu deux "faces" de plus que de "piles".

- (a) Quelle est la probabilité pour que la partie dure plus de $2n$ lancers ?
- (b) Quelle est la probabilité pour que la personne gagne ?

24. **Indépendance mutuelle (Oral ESCP 3.17.03)** On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geq 2$). Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_k désigne l'événement "on obtient pile au k -ème lancer". Soit A_{n+1} l'événement "le nombre de piles obtenus au cours des n lancers est pair".

- (a) Déterminer les probabilités des événements A_k , pour $k = 1, 2, \dots, n + 1$.
 - i. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})$.
 - ii. En déduire que les événements A_1, \dots, A_{n+1} ne sont pas mutuellement indépendants (i.e. $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) \neq \mathbf{P}(A_1) \dots \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}(A_{n+1})$).
 - iii. Montrer que toute sous famille de n événements choisis parmi A_1, \dots, A_n, A_{n+1} est formée d'événements mutuellement indépendants.

5 Variables aléatoires discrètes (dimension 1)

1. **Recherche d'un paramètre** (WARUS1.812) Soit a un réel non nul. On considère la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{8} \left(\frac{2 + a^n}{n!} \right)$. Pour quelle valeur de a , la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ définit-elle une loi de probabilité ?

2. **Inégalité probabiliste de Laplace**⁵ On considère une variable aléatoire réelle sur un certain espace probabilisé. On suppose que pour tout réel $t \geq 0$, la variable $\exp(-tX)$ possède une espérance. Montrer alors que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}([X \leq 0]) \leq \mathbb{E}(e^{-tX})$$

3. **Inégalité probabiliste** (Cassini12.35) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que :

$$\forall (\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbf{P}([X - np > \varepsilon]) \leq \mathbb{E}[\exp(\lambda(X - np - \varepsilon))]$$

4. **IBT** (WARUS25.819) On lance n fois un dé et soit F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition du six. $F_n = \frac{X_n}{n}$ où X_n est la variable aléatoire égale au nombre d'apparition du six. Trouver n tel que $\mathbf{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < 0.99\right) \geq 0.99$.

5. **Moment factoriel d'ordre r d'une variable de Poisson** (Cassini21.36) Soit X une variable de Poisson de paramètre λ . Montrer que pour $r \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \lambda^r$$

6. **Moment factoriel d'ordre r d'une variable géométrique sur \mathbb{N}** (Cassini22.36) Soit X une variable géométrique sur \mathbb{N} de paramètre p . Montrer que pour $r \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \frac{q^r r!}{p^r}$$

7. **Loi d'une variable fonction d'une autre** (WARUS8.813) Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = 4 \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Déterminer la loi de Y .

8. **Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence** (WARUS4.812) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = n]) = \frac{4}{n} \mathbf{P}([X = n-1])$$

Calculer $\mathbf{P}([X = 0])$ et en déduire la loi de X son espérance et sa variance.

9. **Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence** (WARUS5.812) Soit X une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de X son espérance et sa variance sachant que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbf{P}([X = n+2]) = 5\mathbf{P}([X = n+1]) - \mathbf{P}([X = n])$$

10. **Recherche d'une loi à partir d'une relation probabiliste** (WARUS5.812) Soit X une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de X sachant que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \exists p \in]0, 1[\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = n]) = p\mathbf{P}([X \geq n])$$

11. **Loi et série logarithmique** (WARUS7.813) Soit $p \in]0, 1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_k = \frac{-p^{k+1}}{(k+1) \ln(1-p)}$$

Vérifier que $(p_n)_{n \geq 0}$ est la loi d'une variable X c'est-à-dire telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([X = k]) = p_k$.

⁵Laplace Pierre-Simon (Marquis De) (1749 – 1827)

12. **Loi d'une variable fonction d'une autre** (WARUS9.813) Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est impaire} \\ \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est paire} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y son espérance et sa variance.

13. **Loi d'une variable fonction d'une autre** (PHAREE11.29) Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p . On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \text{ est impaire} \\ \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est paire} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y .

14. **Une inégalité probabiliste** (Cassini1.34) Si $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est strictement croissante, montrer que pour $a > 0$,

$$\mathbf{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(|X|))}{g(a)}$$

15. **Une inégalité probabiliste** (Cassini2.35) Si $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \alpha]$ montrer que pour $0 \leq a < \alpha$ on a:

$$\mathbf{P}(h(X) \geq a) \geq \frac{\mathbb{E}(h(X)) - a}{\alpha - a}$$

16. **Théorème de transfert** (Cassini17.36) Soit X une variable géométrique sur \mathbb{N} de paramètre p . Montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = (\ln p)^{\frac{p}{p-1}}$$

17. **Théorème de transfert** (PHAREE11.27) Soit X variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ et soit α un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance et la calculer.

18. **Espérance et antirépartition** (ROQUEIII.67) Soit X une variable aléatoire à valeurs entières positives.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) + (n+1) \mathbf{P}(X > n)$$

(b) En déduire :

i. X admet une espérance si et seulement si $\sum_k \mathbf{P}(X > k)$ est convergente.

ii. Si l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessus est vérifiée, on a l'égalité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$$

19. **Mode(s) d'une distribution**

(a) (Cassini 6.34) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Quelle valeur de k maximise l'expression $\mathbf{P}([X = k])$.

(b) (Cassini 9.34) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Quelle valeur de k maximise l'expression $\mathbf{P}([X = k])$.

20. **Loi et antirépartition** (PHAREE11.14) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n . On tire les boules une à une et sans remise. On s'arrête dès que le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer $\mathbf{P}([X > k])$ et en déduire la loi de X .

21. **Tirages sans remise** (PHAREe11.08) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . Soit n un entier compris entre 1 et N . On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne (donc sans remise). On note Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré.
- Combien y a-t-il de poignées de n boules possibles ?
 - Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ?
 - Combien y a-t-il de poignées telles que $[Y \geq k]$? En déduire $\mathbf{P}([Y \geq k])$.
 - Déterminer la loi de Y .
22. **Loi géométrique sur \mathbb{N}^* , loi géométrique sur \mathbb{N}** (PHAREe11.07) Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées avant la boule noire.
- Quelle est la loi de X ?
 - Quelle est la loi de Y ? Calculer l'espérance de Y .
23. **Loi du plus grand des numéros** (PHAREe11.04) On lance deux fois de suite un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de X .
24. **Loi du plus grand et du plus petit des numéros tirés** (PHAREb16.07) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément deux boules.
- On note Y le plus grand des numéros des deux boules. Déterminer la fonction de répartition puis la loi de Y . Déterminer l'espérance de Y .
 - On note X le plus petit des deux numéros tirés. Déterminer la loi de X .
25. **Loi de Pascal, loi binomiale négative** Supposons qu'on réalise des expériences indépendantes de Bernoulli avec le paramètre p .
- Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'essais nécessaires à l'obtention du $r^{\text{ième}}$ succès ($r \geq 1$). Déterminer la loi de X .
 - Soit Y la variable aléatoire associée au nombre d'échecs avant l'obtention du $r^{\text{ième}}$ succès ($r \geq 1$). Déterminer la loi de Y .
26. **Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore** (PHAREb16.06) Une urne contient $n - 2$ boules blanches et deux boules rouges ($n \in \mathbb{N}_2$). On tire successivement et sans remise toutes les boules. On désigne par X le rang d'apparition de la première boule rouge et par Y celui de la seconde. Déterminer la loi de X et celle de Y .
27. **Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore** (PHAREb16.08) Une urne contient $n \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $x \in [1, r]$. On appelle X le rang d'apparition de la $x^{\text{ème}}$ boule rouge. Trouver la loi de X .
28. **Tirages simultanés** (PHAREb16.11) Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$). On extrait 3 jetons simultanément, on note X, Y, Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$. Déterminer la loi de Y .
29. **Le jeu de Pierre et Marie** (POLYTECHIII.122) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que, pour $n > 0$:

$$\mathbf{P}([X = n]) = \frac{\lambda}{n(n+1)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

- Calculer λ .
- Pierre et Marie jouent selon la règle suivante : une partie consiste à tirer un entier $n > 0$ suivant la loi de X . Si n est impair, Marie donne n francs à Pierre. Si n pair, Pierre donne n francs à Marie. On note G le gain de Pierre sur une partie : $G(n) = +n$ si Pierre gagne et $G(n) = -n$ si Marie gagne.
 - Calculer la probabilité que Pierre gagne une partie.
 - Préciser l'ensemble des valeurs de G et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} G(n) \mathbf{P}([X = n])$.

6 Vecteurs aléatoires discrets

1. **Loi conjointe, lois marginales, indépendance** [ENS17.1] On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant 4 jetons numérotés de 1 à 4. Soit U le plus petit et V le plus grand des numéros obtenus.

- Déterminer la loi conjointe de U et V .
- Déterminer les lois marginales de U et V .
- Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

2. **Loi conjointe, indépendance** [ENS17.5] On lance un dé honnête et on note X le numéro obtenu. Puis on relance X fois le dé et on note Y le nombre d'as obtenus lors de la deuxième série de tirage.

- Déterminer la loi conjointe de X et Y .
- X et Y sont-elles indépendantes ?

3. **Loi d'une somme** [ENS18.3] Pierre et Paul lancent chacun n fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$). Soient X et Y les nombres de pile obtenus respectivement par Pierre et Paul.

- Déterminer la loi de X et de Y .
- Déterminer la loi de $S = X + Y$.

4. **Egalité de deux variables** [CAPES06.2.96] Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, quelle est la probabilité de l'événement $[X = Y]$?

5. **Antirépartition du min d'un couple géométrique** [ENS14.3] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, et soit $U = \min(X, Y)$. Calculer $\mathbf{P}(U > k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de U , son espérance et sa variance.

6. **Somme de variables de Poisson indépendantes** [ENS15.4] Soient X, Y et Z trois variables mutuellement indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson de paramètre λ, μ et ν . Calculer, pour tout $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbf{P}_{[X+Y+Z=i+j+k]}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k])$$

7. **Loi d'une somme et variables indépendantes** [CAPES06.1.96] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson respectivement de paramètre λ et p . On note $S = X + Y$.

Si s est un entier fixé, quelle est la loi de probabilité conditionnelle de X sachant $[S = s]$? (On donnera explicitement le nom de cette loi).

8. **Inégalité probabiliste** [TtesLesProbab135] Soit X et Y deux variables $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et ayant un moment d'ordre deux. Montrer que pour tout réel strictement positif ε , on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}(|X - Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(|X - Y|^2)$$

9. **Loi d'un couple, covariance** [CAPES5.3.79] On considère la variable aléatoire X prenant ses valeurs avec équiprobabilité dans l'ensemble $\{-a, -b, b, a\}$ (où a et b sont des réels $0 < a < b$) et l'on pose $Y = X^2$.

- Ecrire la loi de la variable aléatoire Y et celle du couple (X, Y) .
- Montrer que $\text{cov}(X, Y) = 0$ alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

10. **Coefficient de corrélation** [ENS27.3] On pioche simultanément 3 jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4 et on note U et V le plus petit et le plus grand des numéros obtenus. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de U et V .

11. **Loi conjointe, lois marginales, indépendance** [ENS17.2] On lance deux fois de suite un dé. Soient X et Y le premier et le second numéro obtenus et soit $U = \min(X, Y)$.

- (a) Donner la loi du couple (X, Y) , la loi de X et la loi de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- (b) Déterminer la loi du couple (X, U) et la loi de U . Les variables X et U sont-elles indépendantes ?

12. **Variable fonction d'autres** [GUEI-42] Soient X et Y deux variables indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} , X suivant une loi géométrique de paramètre a ($a \in]0, 1[$). On considère la variable aléatoire définie par :

$$Z = \begin{cases} X - Y & \text{si } X > Y \\ 0 & \text{si } X \leq Y \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z en fonction de celle de Y et montrer qu'elle ne dépend que de $\alpha = \mathbb{E}((1 - a)^Y)$.

13. **Variable fonction d'autres** [GUEI-53] Soient X et Y deux variables entières et indépendantes, X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p , Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Soit Z la variable telle que :

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 0 \\ Y & \text{si } X = 1 \end{cases}$$

Déterminer :

- (a) La loi de Z .
- (b) $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.
- (c) $\mathbf{P}_{[Z=0]}([X = 1])$.

14. **Loi d'un vecteur, lois marginales, loi d'une somme, loi d'un produit** [ENS17.4] On tire simultanément 3 jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n . On note U, V, W les numéros tirés, rangés dans l'ordre croissant $U < V < W$.

- (a) Déterminer la loi du vecteur aléatoire (U, V, W) et les lois marginales de U, V et W .
- (b) Dans le cas où $n = 5$, déterminer les lois de la somme $S = U + V + W$ et du produit $T = U \times V \times W$.

15. **Loi conditionnelle et loi inconditionnelle : relativisation** [ENS15.2] On suppose que le nombre de voitures traversant par jour le péage d'une autoroute est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et que le péage comprend 12 guichets.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance Z du nombre de voitures se présentant par jour au guichet numéro 1.

16. **Loi conditionnelle et loi de Poisson** [ENS15.3] Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et Y une variable aléatoire dont la loi sachant $[X = k]$ est la loi de Poisson $\mathcal{P}(k)$.

- (a) Calculer $\mathbf{P}([Y = 0])$.
- (b) Calculer l'espérance de Y .

17. **Espérance totale** [Pagdom06.58] Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et λ un réel strictement positif.

- (a) j et k désignant deux entiers naturels, $a_{k,j}$ des réels tels que la série $\sum_k a_{k,j}$, $k \in \mathbb{N}$ soit convergente pour tout j appartenant à $[[0, n]]$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$$

- (b) Soient X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans \mathbb{N} et S une variable aléatoire à valeurs dans $[[0, n]]$. Pour tout k élément de \mathbb{N} , on définit l'espérance conditionnelle de S sachant que $X = k$ par :

$$\mathbb{E}_{[X=k]}(S) = \sum_{j=0}^n j \mathbf{P}_{[X=k]}([S = j])$$

C'est donc l'espérance de la loi conditionnelle de S sachant $[X = k]$.
Montrer que :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X=k]}(S) \mathbf{P}([X = k])$$

Cette formule s'appelle **formule de l'espérance totale**.

18. Loi d'une somme, loi de max, loi de min [Lapres2.29]

- (a) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ donné. Trouver les lois suivies par les variables :
- i. $Y = \max(n, X)$.
 - ii. $Z = \min(n, X)$.
- (b) Soit X_1 une variable aléatoire réelle indépendante de X qui suit elle aussi une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Trouver les lois suivies par :
- i. $X + X_1$.
 - ii. $\max(X, X_1)$.
 - iii. $\min(X, X_1)$.

19. Loi de max, loi de min et fonction de répartition Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p ($0 < p < 1$), c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{P}([Y = k]) = (1 - p)^{k-1} p$$

- (a) Quelle est la fonction de répartition de X et la valeur, pour tout réel x , de $\mathbf{P}[X > x]$?
- (b) Notons U (resp. V) la variable aléatoire égale au minimum (resp. maximum) des deux variables X et Y : $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$.
- i. Quelle est la fonction de répartition de V ; en déduire la probabilité que $[V = k]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
 - ii. De façon semblable, quelle est la loi de probabilité de U ?
- (c) Plus généralement, si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes, toutes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, quelle est la loi de probabilité des variables aléatoires : $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

20. Covariance et inégalité [Agreg10.97] Soient (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires vérifiant $X + Y + Z = 1$. On suppose que l'on a $\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{V}(Y) \leq \mathbb{V}(Z) < +\infty$. Montrer que :

- (a) La variable Z est en corrélation négative avec X ainsi qu'avec Y .
- (b) L'on a $\text{cov}(X, Y) \geq 0$ si et seulement si $\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) \leq \mathbb{V}(Z)$.
- (c) L'on a $|\text{cov}(X, Z)| \leq |\text{cov}(Y, Z)|$.

21. Coefficient de corrélation [ENS27.2] Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p et $Y_i = X_i X_{i+1}$. Calculer $\rho(Y_i, Y_j)$ pour $i \leq j$.

22. Loi d'un quotient de variables indépendantes [ENS22.4] Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p , $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

- (a) Déterminer la loi du quotient $U = \frac{X}{Y}$.
- (b) Déterminer $\mathbb{E}(U)$ et vérifier qu'on a toujours $\mathbb{E}(U) > 1$.

23. Loi du min d'un couple aléatoire [ENS14.3] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, et soit $U = \min(X, Y)$. Calculer $\mathbf{P}([U > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de U , son espérance et sa variance.

24. **Loi d'un couple, loi marginale, loi d'une différence** [Lapres2.19] Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeur dans \mathbb{N} . On suppose que :

$$\mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

- (a) Trouver la loi du couple (X, Y) en fonction de la loi de Y .
- (b) Montrer que $\mathbf{P}([X \leq Y]) = 1$.
- (c) Soit $a \in]0, 1[$. On suppose que $\mathbf{P}([Y = n]) = (1 - a)^2 (n + 1) a^n$. Trouver les lois de X puis de $Y - X$.
25. **Somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi : formule de Waldt** [ROV108_ESCP 1990] Soient X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} et N une variable aléatoire finie à valeurs dans \mathbb{N}^* . On considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et indépendantes avec N et soit Y définie par $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. Déterminer l'espérance et la variance de Y en fonction des espérances et variances de X et N .

7 Variables aléatoires à densité

1. **Densité de probabilité** On considère la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Montrer que f peut constituer la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X .

2. **Recherche d'un paramètre** Soit X une variable aléatoire de densité associée f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a(3x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- (a) Trouver le coefficient a .
 (b) Construire la courbe représentative de la fonction densité de probabilité f .
 (c) Calculer la probabilité de la variable X de tomber dans l'intervalle $]1, 2[$.
3. **Fonction de répartition et calcul de probabilités** Une variable aléatoire X est donnée par la fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Calculer la probabilité que la variable aléatoire X se situe dans les intervalles $]1.5; 2.5[$ et $]2.5; 3.5[$.

4. **Changement de variable affine** Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Donner la loi de $Y = -X$.
5. **Changement de variable puissance** Soit X une variable aléatoire de densité f associée définie par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Soit $Y = X^2$ et $Z = X^3$. Montrer que Y et Z sont des variables à densité dont on déterminera une densité.

6. **Densité paramétrée et changement de variable $x \mapsto x^2$** [GUEII-37] Soit X la variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{si } x \geq -1 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- (a) Déterminer k .
 (b) Trouver $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
 (c) Déterminer la loi de $Y = X^2$.
7. **Changement de variable exponentiel** [ESCP] Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[1, 2]$. Déterminer une densité et la fonction de répartition de $Y = \exp(X^2 - 1)$.
8. **Valeur absolue d'une variable à densité** [ESCP] Soit X une variable à densité dont une densité associée est f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$$

Montrer que $Y = |X|$ est variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

9. **Changement polynomial** [ESCP] Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = X^2 + 1$.

10. **Variable à densité et antirépartition** [GUEII-1.2] Soit X une variable absolument continue, de fonction de répartition F à valeurs dans \mathbb{R}_+ et ayant une espérance $\mathbb{E}(X)$. Montrer qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0 \text{ et que } \int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t]) \text{ converge et vaut } \mathbb{E}(X).$$

11. **Vecteur aléatoire exponentiel** [GUEII-34] Soient n un entier naturel non nul et X_1, \dots, X_n n variables mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi exponentielle de paramètre λ .

- (a) Préciser la loi de $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$, son espérance et sa variance.
 (b) Préciser la loi de $S = X_1 + \dots + X_n$.

12. **Variable à densité et partie entière** [GUEII-2] Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Préciser la loi de $Y = [X]$ où $[X(\omega)]$ désigne la partie entière de $X(\omega)$, ainsi que celle de $Z = X - Y$.

13. **Vecteur aléatoire à densité** [GUEII-26] Soient n un entier naturel non nul et X_1, \dots, X_n n variables indépendantes et de même loi, de densité commune f où :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

- (a) Trouver $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
 (b) Déterminer la loi de T_n .

14. **Produit d'une variable normale et d'une variable à deux états, covariance** [GUEII-53] Soient X une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une variable telle que :

$$\mathbf{P}([Y = 1]) = \mathbf{P}([Y = -1]) = \frac{1}{2}$$

X et Y sont supposées indépendantes. On pose $Z = XY$.

- (a) Déterminer la loi de Z .
 (b) Calculer $\text{cov}(X, Z)$.

15. **Loi gamma**

- (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ est une intégrale convergente si et seulement si $a > 0$. Pour tout $a > 0$, on pose :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

- (b) Donner une relation entre $\Gamma(a+1)$ et $\Gamma(a)$.
 (c) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

- (d) Soit f_a la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_a(x) = \begin{cases} \frac{e^{-t} t^{a-1}}{\Gamma(a)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$.

- i. Montrer que f_a est une densité de probabilité.
 ii. Soit X_a une variable aléatoire de densité f_a . Montrer que X_a admet une espérance et une variance et les calculer.

16. **Loi gamma et loi de Poisson** [GUEII-30] Soient Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et X suivant une loi gamma de paramètres 1 et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbf{P}(Y < \alpha) = \mathbf{P}(Y > \lambda)$.

17. **Loi log-normale** [OralHEC97] Soit $a > 0$. Soit h la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge.

(b) Montrer qu'elle définit une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi **Log-normale** de paramètre $a > 0$ si et seulement si elle admet la densité h . On considère une variable aléatoire X suivant une loi Log-normale de paramètre $a > 0$.

(c) Montrer que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$.

(d) Exprimer sous forme d'intégrale, la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \frac{\ln X}{a}$. Déterminer une densité de la loi de Y et identifier cette loi.

(e) Déterminer la loi de $Z = \frac{1}{X}$. Identifier cette loi.

8 Convergences et approximations

1. **Approximations** On tire 400 fois à pile ou face avec une pièce de monnaie. Soit X le nombre de "piles".
 - (a) Quelle est la loi de X ?
 - (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\sigma(X)$.
 - (c) Calculer $\mathbf{P}([X > 200])$, $\mathbf{P}([190 < X < 210])$ et $\mathbf{P}([185 < X < 205])$, $\mathbf{P}([X = 201])$.
2. **Approximations** Si la probabilité de réaction allergique d'un sérum est de 0,001, quelle est la probabilité pour que parmi 2000 personnes exactement 3, et plus de 2 soient sujets de troubles.
3. **Approximations** L'étude statistique d'une maladie réalisée sur une grande échelle a permis de constater qu'elle atteint mortellement par année environ 400 personnes sur 1 million.
 - (a) Quelle est la loi suivie par X , nombre de décès par an dus à la maladie, dans un échantillon de taille N . Donner les paramètres de cette loi.
 - (b) Déterminer pour un seuil de confiance de 95%, le nombre de décès que l'on peut rencontrer par an dans des échantillons de 1000, 10 000 et 100 000 personnes.
4. **Approximations** Une pharmacie accueille 150 clients par jour. La probabilité pour qu'un client achète une boîte d'aspirine est de 0,02. Quel est le stock minimum pour que la pharmacie puisse satisfaire à la demande avec une probabilité de 98%.
5. **Convergence en loi (ESCP 3.5.02)** Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune.
 - (a) Pour tout $n > 0$, on pose $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F et n .
 - (b) Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ . Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = \lambda M_n - \ln n$. Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (c) Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et on suppose que X_1 admet pour fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^a & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = n^{1/a} (M_n - 1)$.

- i. Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - ii. Que retrouve-t-on lorsque $a = 1$?
6. **Convergence en loi (ESCP 3.24.02)** Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U . Soit, d'autre part, Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = \min(U_1, \dots, U_n)$.
Montrer que la suite de variables $(nZ_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y .
 - (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = e^{-\lambda X}$.
 - (b) On considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites de terme général :
 - i. $A_n = n \min(e^{-\lambda X_1}, \dots, e^{-\lambda X_n})$.
 - ii. $D_n = \max(X_1, \dots, X_n) - \ln n$, dans le cas où $\lambda = 1$.
 7. **Convergence en probabilité (ESCP 3.32.02)** On dispose de n urnes numérotées de 1 à n et de N boules numérotées de 1 à N où $N = an$, a étant un entier fixé non nul. On place "au hasard" et de manière indépendante chacune des N boules dans une des urnes (chaque boule est donc placée avec la probabilité $\frac{1}{n}$ dans l'urne numéro k). On note :

- Y_n le nombre d'urnes vides
- T_i la variable qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide et 0 sinon
- $S_n = \frac{Y_n}{n}$

- (a) Donner la loi de T_i et son espérance.
- (b) Calculer $\mathbb{E}(T_i T_j)$ et $\text{cov}(T_i, T_j)$.
- (c) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.
- (d) Calculer $\mathbb{V}(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.
 - i. Vérifier que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad |S_n(\omega) - e^{-a}| \leq |S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)| + |\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}|$$

- ii. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \geq n_0, \quad \mathbf{P}(|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}\left(|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

- iii. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon) = 0$$

- iv. Interpréter le résultat précédent.

8. **Convergence en probabilité** [Lapresté4.3] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p . Pour tout $n \geq 1$ on pose :

$$Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Quelle est la limite en probabilité de S_n , lorsque n tend vers l'infini ?

9. **Convergence en probabilité** [Lapresté4.1] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{P}([X_n = 1]) = 1 - p^n \\ \mathbf{P}([X_n = -1]) = p^n \end{cases} \quad \text{avec } 0 < p < 1$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{S}_n = \frac{1}{n} S_n$.

- (a) Calculer $\mathbb{E}(\overline{S}_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\overline{S}_n)$.
- (b) Montrer que $(\overline{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$.

10. **Une autre forme de la loi faible des grands nombres** [Agreg.th7.9.234] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un certain espace probabilisé, indépendantes et admettant un moment d'ordre deux. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = m$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{V}(X_j) = 0$. Montrer que :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$$

11. **Convergence en probabilité d'une suite de variables suivant une loi bêta** [Lapresté4.2] Soit n et m deux entiers strictement positifs. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \\ \frac{x^{n-1} (1-x)^{m-1}}{B(n, m)} & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

avec $B(n, m) = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx$.

- (a) Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X_{n,m}$.
- (b) Calculer l'espérance et la variance de $X_{n,m}$.
- (c) On suppose que n est fixé et m tendant vers l'infini. Quelle est la limite en probabilité de $(X_{n,m})$?

12. **Variables presque sûrement égales** [Lapresté4.4] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Z$. Montrer que $Y = Z$ p.s.
13. **Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée** Montrer que :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

14. **Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée** (Oral HEC) En utilisant le théorème de la limite centrée, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}$$

où $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{3}$.

9 Estimations

1. **Estimation ponctuelle et risque quadratique** Soit X de loi uniforme sur $[0, a]$ et (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de variables. Le but de l'exercice est d'effectuer une estimation de a . Soit \bar{X}_n la moyenne empirique.

- Soit $T_n = 2\bar{X}_n$. Montrer que T_n est sans biais et déterminer son risque quadratique.
- Soit $T'_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de X puis celle de T'_n .
En déduire sa densité puis son biais et son risque quadratique.
- Soit $T''_n = \frac{n+1}{n} T'_n$ déterminer son biais et son risque quadratique.
- Quel est le meilleur estimateur de a pour de grandes valeurs de n ?

2. **Estimation ponctuelle** [Oral ESCP 1999] On considère n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre inconnu λ .

- On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

Rappeler la loi de S_n .

Montrer que \bar{X}_n est un estimateur de λ sans biais et convergent.

- On pose $\theta = \mathbf{P}([X = 0]) = e^{-\lambda}$ (où $\mathbf{P}(A)$ désigne la probabilité de l'événement A) et on cherche un estimateur sans biais du paramètre θ . (Dans le cas où X représente le nombre de pannes que subit un appareil, $\mathbf{P}([X = 0])$ est la probabilité qu'il n'y ait aucune panne et c'est en ce sens qu'il est intéressant de l'estimer).
 - Calculer l'espérance de $T_n = \exp(-\bar{X}_n)$ et montrer que T_n n'est pas un estimateur sans biais de θ .
 - Soit s un entier quelconque. Montrer que la loi conditionnelle de X_1 sachant $[S_n = s]$ est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Préciser en particulier la valeur de $\mathbf{P}_{[S_n=s]}([X_1 = 0])$.
 - On considère la variable aléatoire $\hat{\theta} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$. Montrer que $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ .
 - Calculer la variance de $\hat{\theta}$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\hat{\theta}) = 0$.

3. **Estimation ponctuelle et par intervalle** [Oral ESCP 1999] Soit $a \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[0, 1]$.

On suppose que la loi conditionnelle de X conditionnée par $[X \leq a]$ est la loi uniforme sur $[0, a]$ et que sa loi conditionnelle conditionnée par $[X > a]$ est la loi uniforme sur $[a, 1]$.

On suppose de plus que $\mathbf{P}([X \leq a]) = \frac{1}{2}$.

- Déterminer une densité de X , son espérance et sa variance.
On cherche maintenant à estimer le paramètre inconnu a .
- Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
On pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et la variance $\mathbb{V}(M_n)$ de la variable M_n .
En déduire un estimateur sans biais T_n de a .
La suite d'estimateurs $(T_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?
- Donner une majoration de $\mathbb{V}(T_n)$ quand $a \in]0, 1[$.
Pour n et α donnés, préciser, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, les valeurs de ε pour lesquelles $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance au risque α pour a (c'est-à-dire : $\mathbf{P}([T_n - \varepsilon \leq a \leq T_n + \varepsilon]) \geq 1 - \alpha$).
- Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\frac{T_n - a}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)}}\right)_{n \geq 1}$?

On suppose que n est suffisamment grand pour identifier la loi de $\frac{T_n - a}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)}}$ à cette loi limite. En déduire un intervalle de confiance pour a à un risque inférieur à 5%.

- (e) Au niveau de risque 5%, comparer les longueurs des deux intervalles de confiance trouvés dans les questions (c) et (d).
4. **Estimation ponctuelle** [Oral ESCP 1997] On veut estimer les paramètres a et b de la loi uniforme sur $[a, b]$ à l'aide d'un échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables indépendantes suivant cette loi.
- (a) i. On pose $S_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de S_n , puis sa densité et son espérance.
- ii. Montrer que la variance de S_n est égale à $\mathbb{V}(S_n) = \frac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}$. (On pourra d'abord supposer $a = 0$ et $b = 1$ puis effectuer une transformation affine).
- iii. S_n est-il un estimateur sans biais de b ?
- iv. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(S_n)$ quand n tend vers l'infini ?
- v. Comparer $\mathbb{E}(S_n)$ et b . Que risque-t-on en général en estimant b par la réalisation de S_n ?
- (b) On pose $I_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Déterminer l'espérance de I_n et sa limite quand n tend vers l'infini. On admettra que $\mathbb{V}(I_n) = \mathbb{V}(S_n)$.
- (c) Exprimer a et b en fonction de $\mathbb{E}(I_n)$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
En déduire des estimateurs A_n et B_n sans biais de a et b .
5. **Estimation ponctuelle et par intervalle** [Oral ESCP 1999] On note $VP(\lambda, \theta)$ la **loi de Pareto**⁶ de paramètres $\lambda > 0$, $\theta > 0$ et 0 , c'est-à-dire la loi de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1} & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{si } x \leq \theta \end{cases}$$

Un phénomène économique suit une loi $VP(\lambda, \theta)$, θ étant un paramètre connu et λ un paramètre que l'on veut estimer. On dispose pour cela d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant cette loi. On pose $T = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i}{\theta}\right)$ et $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$.

- (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $VP(\lambda, \theta)$ et $Y = \ln\left(\frac{X}{\theta}\right)$.
- i. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- ii. Déterminer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X .
- iii. Montrer que Y suit une loi Γ dont précisera les paramètres.
- (b) Quelle est la loi de T ? En donner une densité.
- (c) Calculer l'espérance et la variance de $\hat{\lambda}$.
- (d) Déduire de $\hat{\lambda}$ un estimateur $\hat{\lambda}_1$ sans biais de λ . L'estimateur $\hat{\lambda}_1$ est-il convergent ?
- (e) On admet que la suite de variables aléatoires $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et on rappelle que la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite vérifie $\Phi(1,96) \simeq 0,975$.
En utilisant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ comme approximation de la loi de Z_n , donner, en fonction de n (supposé assez grand) et de la valeur observée λ_0 de $\hat{\lambda}$, un intervalle de confiance à 95 % de λ .
Application numérique : $n = 100$ et $\lambda_0 = 5$.

6. Estimation ponctuelle [Oral ESCP 1997]

- (a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Quelle est la loi de $X + Y$?
Soient X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre λ . Quelle est la loi de la somme S_n de ces variables ?

⁶ Vilfredo Frederico Samaso marquis de Pareto : sociologue italien né à Paris - France le 15 juillet 1848 ; décédé à Céligny - France le 19 août 1923.

- (b) On désire estimer le paramètre λ d'une loi de Poisson à l'aide d'un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables indépendantes suivant cette loi. Vérifier que $M_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de λ . Quelle est sa variance?
- (c) On cherche maintenant à estimer, à l'aide du même échantillon, la probabilité $e^{-q\lambda}$ de n'observer que des 0 au cours de q expériences consécutives. On pose $T_n = \exp\left(-q\frac{S_n}{n}\right)$.
- Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ de T_n .
 - T_n est-il un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$? Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.
 - Calculer la variance $\mathbb{V}(T_n)$. T_n est-il un estimateur convergent?
- (d) On admettra que la suite nulle est la seule suite $(a_n)_n$ de réel vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

Soit $g(S_n)$ un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$.

- Montrer que pour tout $\lambda > 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k g(k)}{k!} \lambda^k = e^{(n-q)\lambda}$$

En déduire l'expression du seul estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$, fonction de S_n .

- Est-il toujours judicieux de l'utiliser?
- On suppose q petit devant n . Comparer T_n et l'estimateur trouvé en (d) i.

Partie II

Quelques grands thèmes probabilistes

10 Indice de Theil et inégalité de convexité

Voici un oral d'HEC 1997 portant sur l'**indice de Theil** utilisé en économie associé à la répartition des salaires. Il vous fera démontrer l'**inégalité de Jensen**⁷ en **question 3.a** généralisant l'inégalité de convexité, c'est un pur morceau de bravoure ! Bonne découverte.

[ORALHEC97.127] Pour mesurer le caractère "égalitaire" de la répartition des salaires mensuels dans une entreprise, les économistes utilisent parfois l'**indicateur de Theil** défini par $T_X = \mathbb{E} \left(\frac{X}{\mu} \ln \left(\frac{X}{\mu} \right) \right)$ où X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+^* représentant le salaire d'un employé, d'espérance μ et où \ln est logarithme népérien.

Les économistes considèrent que, plus l'indicateur de Theil est petit, plus la répartition des salaires est égalitaire.

1. On suppose que X est la variable certaine égale à a où a est un réel strictement positif. Calculer T_X .
2. On suppose que tous les salaires sont multipliés par un réel strictement positif λ , c'est-à-dire que $Y = \lambda X$.
Déterminer T_Y en fonction de T_X .

3. _

(a) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I . Montrer que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, \quad f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

(b) Montrer que $f : x \mapsto x \ln x$ est une fonction convexe sur \mathbb{R}_+^* .

(c) On suppose que X prend un nombre fini de valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Montrer que $T_X \geq 0$.

4. On suppose que X suit une loi de Pareto de densité f telle que $f(x) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x} \right)^{\alpha+1}$ si $x \geq a$, $f(x) = 0$ sinon, où a est un réel strictement supérieur à 0 et α un réel strictement supérieur à 1.

(a) Calculer T_X .

(b) Montrer que T_X est une fonction décroissante de α .

11 Variables à densités définies par une intégrale

Voici un exercice qui suit la tendance actuelle des épreuves de maths 2 consistant à vous surprendre avec des textes déroutants par le fait qu'ils contiennent des questions, voire des thèmes inédits. Dans ce texte véritablement passionnant d'oral ESCP 2005 vous ne découvrirez que des choses déjà manipulées de nombreuses fois, à savoir des min, des max, des intégrales, des changements de variables. Mais ce qui fait son originalité, et ce qui vous déroutera peut-être, c'est leurs agencements. Par exemple vous découvrirez des variables aléatoires définies par des intégrales, ce qui est déjà tombé à Paris en QSP. D'autre part nos amies les variables indicatrices referont leur apparition. Régalez-vous bien.

VARAD - min - max [ESCP3.15.2005] Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$.

$$V(\omega) = \int_{-1}^1 \min(x, U(\omega)) dx$$

$$W(\omega) = \int_{-1}^1 \max(x, U(\omega)) dx$$

et on admet par la suite que V et W sont des variables aléatoires.

⁷Elle figure dans votre cours d'analyse. Elle n'est pas au programme en option éco mais elle tombe assez régulièrement en analyse, et cela fait très mal !

1. Montrer que $\mathbf{P}([V \leq 0]) = \mathbf{P}([W \geq 0]) = 1$.
2. Etablir la relation $V = -\frac{(U-1)^2}{2}$ et en déduire la loi de V . Calculer l'espérance $\min(x, U)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, puis l'espérance de V . Conclusion ?
3. Déterminer la loi de W et celle de V .
4. On considère dans cette question une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \geq 1}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, où U_n suit la loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{n}$ et on pose :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad V_n(\omega) = \int_{-1}^1 \min(x, U_n(\omega)) dx$$

Etudier la convergence en loi de la suite V_n .

Indication : on pourra calculer la fonction de répartition de V_n .

12 Statistique d'ordre : étude de la loi de médiane d'un échantillon de variables aléatoires

Voici un oral d'HEC donné en 1999 qui va vous faire étudier la loi d'une statistique d'ordre, à savoir la loi de la **médiane** d'un échantillon constitué de $2n + 1$ variables iid. La première question, au demeurant ultra-classique, est un must absolu et représente pour un option éco le summum de la difficulté de l'écriture événementielle. Paradoxalement la suite de l'exercice se calme et ne présente pas de grande difficulté. Réglez-vous bien.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires **indépendantes**, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, toutes de même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Pour tout entier naturel n non nul et tout élément ω de Ω on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$ et on note $M_n(\omega)$ le terme médian i.e. le $(n+1)^{\text{ème}}$ dans l'ordre croissant.

1. Soit x et h deux réels vérifiant : $0 < x < x + h < 1$. On note N la variable aléatoire égale au nombre d'indices i ($1 \leq i \leq 2n + 1$) tels que : $x < X_i \leq x + h$.

(a) Prouver l'égalité :

$$\mathbf{P}([x < M_n \leq x + h] \cap [N = 1]) = (n + 1) \binom{2n + 1}{n} x^n h (1 - x - h)^n$$

(b) Pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq 2n + 1$, prouver l'inégalité :

$$\mathbf{P}([x < M_n \leq x + h] \cap [N = k]) \leq \binom{2n + 1}{k} h^k$$

(c) Justifier l'existence d'un réel K (indépendant de x et h) tel que :

$$(n + 1) \binom{2n + 1}{n} x^n h (1 - x - h)^n \leq \mathbf{P}([x < M_n \leq x + h]) \leq (n + 1) \binom{2n + 1}{n} x^n h (1 - x - h)^n + Kh^2$$

2. (a) Déduire de ce qui précède qu'une densité de M_n est donnée par la fonction f_n qui, pour tout réel x de $[0, 1]$, vaut :

$$f_n(x) = (n + 1) \binom{2n + 1}{n} x^n (1 - x)^n$$

(b) A l'aide d'un argument de symétrie, calculer l'espérance de la variable M_n .

3. Dans toute cette question on considère un réel x vérifiant : $0 < x < \frac{1}{2}$.

(a) Justifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}([M_n \leq x]) \leq (n + 1) \binom{2n + 1}{n} x^{n+1} (1 - x)^n$$

- (b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = (n+1) \binom{2n+1}{n} x^{n+1} (1-x)^n$. En considérant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle.
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([M_n \leq x])$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([M_n \geq 1-x])$.
- (d) Quelle est la limite en loi de la suite de terme général M_n ?

13 Recherche d'un équivalent simple d'une espérance

Nous continuons la série "hardcore" avec un oral d'HEC donné en 2001 mais dont la recherche va vous faire beaucoup de bien. La question 2.b m'a personnellement fait souffrir, mais bon ... je vous ai trouvé une solution qui je pense est élégante, de toutes façons je n'en ai pas une autre à vous proposer du fait que je n'ai jamais vu d'étudiants la réussir en colle ! La recherche de l'équivalent de l'espérance de Y_n va faire appel à votre culture. Régalez-vous bien.

Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle d'espérance égale à 1. Pour tout entier n strictement positif, on pose $U_n = e^{-X_n}$ et $V_n = \min(U_1, U_2, \dots, U_n)$ (ainsi, pour tout ω dans Ω , $V_n(\omega)$ est le plus petit des nombres $(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega))$).

- (a) Pour tout entier n strictement positif, montrer que V_n est une variable aléatoire et calculer sa fonction de répartition.

(b) Quelle est, pour tout réel strictement positif ε , la limite quand n tend vers l'infini de la probabilité $\mathbf{P}(|V_n| \leq \varepsilon)$?

(a) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, la variable aléatoire nV_n possède une densité de probabilité, que l'on calculera.

(b) Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x compris entre 0 et n , établir l'inégalité :

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

- (c) Montrer que les variables aléatoires $\ln(nV_n)$ possèdent une espérance et que la suite de terme général $\mathbf{E}(\ln(nV_n))$ est bornée.
- Pour tout entier strictement positif n , on pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Montrer que les variables aléatoires Y_n possèdent une espérance et trouver un équivalent simple de $\mathbf{E}(Y_n)$ quand n tend vers l'infini.

14 Etude d'une distance entre des lois de probabilité

Le voilà le fameux texte sur l'étude d'une distance sur les lois de probabilité ayant fait l'objet du thème d'HEC II 2006 option éco ! C'est un oral d'HEC donné en 2002. Ah je l'avais fait étudier avant les concours en 2006 !... Si j'avais su⁸... je ne suis pas sûr que cela aurait changé la face du monde mais vos carrés auraient été moins pris au dépourvu. En tous les cas une chose est sûre : ces fameux oraux d'HEC que je vous donne à chaque séance, auxquels nous pouvons rajouter ceux de l'ESCP, constituent un véritable vivier de problèmes d'écrit. Je pourrais multiplier les exemples à l'infini pour vous le prouver mais ce serait beaucoup trop long. Alors la moralité de l'histoire est simple : souffrez très fort, tant que vous avez du temps, lors de la découverte de ces bijoux et vous serez beaucoup moins surpris le jour J. Régalez-vous bien.

- On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans \mathbb{N} .
Pour tout entier naturel k on pose $p_k = \mathbf{P}([X = k])$ et $q_k = \mathbf{P}([Y = k])$.

- (a) Justifier la convergence de la série de terme général $|p_k - q_k|$ dont on note $d(X, Y)$ la somme i.e.

$$d(X, Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

⁸Sylvain Rondy avait traité le thème à Merville mais... aux scientifiques !!! Pas de bol !!!

- (b) Dans le cas particulier où X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0, 1[$) et Y suit la loi de Poisson de paramètre p , établir la majoration :

$$d(X, Y) \leq 2p^2$$

2. On considère deux suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que les séries de termes généraux a_k et b_k convergent.

Etablir l'inégalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \right)$$

3. On considère quatre variables aléatoires X_1, X_2 et Y_1, Y_2 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans \mathbb{N} , les variables X_1 et X_2 , d'une part, étant indépendantes de même loi, les variables Y_1 et Y_2 , d'autre part, étant indépendantes de même loi (qui n'est nécessairement la même que celle de X_1 et X_2). Prouver l'inégalité :

$$d(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \leq d(X_1, Y_1) + d(X_2, Y_2)$$

4. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans \mathbb{N} , X suivant la loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$) et Y suivant la loi de Poisson de paramètre np . Justifier l'inégalité :

$$d(X, Y) \leq 2np^2$$

5. Quel résultat du cours peut-on retrouver à l'aide de l'inégalité précédente ?

15 Variables aléatoires symétriques - Variables indicatrices

Voici un oral ESCP 2004 sur le thème des **variables symétriques**. Bonne découverte.

[3.7.04] Soit X une variable aléatoire réelle à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ de fonction de répartition F . On dit que X est **symétrique** si pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ on a :

$$\mathbf{P}(X \in -I) = \mathbf{P}(X \in I)$$

où $-I = \{-x \mid x \in I\}$.

1. Montrer qu'une variable aléatoire X est symétrique si et seulement si pour tout x réel :

$$F(x) = 1 - F(-x)$$

Dans toute la suite X désigne une variable aléatoire symétrique.

2. Soit ε une variable aléatoire réelle, indépendante de X définie par :

$$\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = q = 1 - p, \quad \text{avec } 0 < p < 1$$

- (a) Montrer que X et $Y = \varepsilon X$ suivent la même loi.
 (b) On suppose que X admet un moment d'ordre 2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$, puis $\sigma(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Quand a-t-on $\sigma(X, Y) = 0$?

3. Pour tout ensemble A , on définit la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On définit une variable aléatoire Z par :

$$Z = \mathbf{1}_{\{\omega \mid X(\omega) > 0\}} - \mathbf{1}_{\{\omega \mid X(\omega) < 0\}}$$

- (a) Déterminer la loi de Z .
 (b) Déterminer les lois des variables aléatoires X^2 et εX^2 , puis calculer $\sigma(X, Z \mid X)$.

16 Indicatrices d'événements et inégalités probabilistes

Voici un oral ESCP 2004 "spécial" **indicatrice d'événement**. A connaître. Bonne découverte.

[3.10.04] Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

- Déterminer pour tout u réel, l'espérance de la variable aléatoire e^{uX} .
- Pour tout ensemble A , on note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soit u un réel positif et $x \in]0, 1[$.

- (a) Montrer que :

$$e^{u(X-(1+x)\lambda)} \geq \mathbf{1}_{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq (1+x)\lambda\}}$$

- (b) En déduire que :

$$\mathbf{P}([X \geq (1+x)\lambda]) \leq \exp(-[u(1+x) + 1 - e^u]\lambda)$$

- Etudier sur \mathbb{R}_+ la fonction :

$$\varphi_x : u \mapsto u(1+x) + 1 - e^u$$

Montrer que φ_x est majorée sur \mathbb{R}_+ et que :

$$\sup_{u \in \mathbb{R}_+} \varphi_x(u) = (1+x) \ln(1+x) - x = h(x)$$

En déduire que :

$$\mathbf{P}([X \geq (1+x)\lambda]) \leq e^{-\lambda h(x)}$$

-

- (a) Montrer que pour tout $u < 0$:

$$\mathbf{P}([X \leq (1-x)\lambda]) \leq \exp[-(u(1-x) + 1 - e^u)\lambda]$$

- (b) Montrer que :

$$\sup_{u \in \mathbb{R}_-} u(1-x) + 1 - e^u = h(-x)$$

puis que :

$$\mathbf{P}([X \leq (1-x)\lambda]) \leq e^{-\lambda h(-x)}$$

- En déduire que :

$$\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \lambda x) \leq 2 \max(e^{-\lambda h(x)}, e^{-\lambda h(-x)})$$

17 Sommes aléatoires de longueur aléatoire

Voici un oral d'HEC 2000 mettant en jeu des sommes de variables aléatoires dont la longueur est aléatoire, pouvant déboucher sur la célèbre formule de Waldt.

On considère un réel p élément de $]0, 1[$ et une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p .

- Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_1 = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_2 = \sum_{k=1}^n (1 - X_k)$.

Les variables S_1 et S_2 sont-elles indépendantes ?

Dans la suite de l'exercice, on considère une autre variable aléatoire, notée N , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à

valeurs dans \mathbb{N} telle que $(N, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes.

On pose $N_1 = \sum_{k=1}^N X_k$ et $N_2 = \sum_{k=1}^N (1 - X_k)$ ce qui signifie que pour tout ω de Ω :

$$N_1(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \quad \text{et} \quad N_2(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} (1 - X_k(\omega))$$

et en particulier que si $N(\omega) = 0$, alors $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 0$.

- Calculer, si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, $\mathbf{P}([N_1 = n_1] \cap [N_2 = n_2])$ en fonction notamment de $\mathbf{P}([N = n_1 + n_2])$.
- On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre λ strictement positif; Montrer qu'alors les variables N_1 et N_2 sont indépendantes et préciser leur loi.
- On suppose réciproquement que les variables aléatoires N_1 et N_2 sont indépendantes et on se propose de déterminer la loi de N . On pose pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{n! \mathbf{P}([N_1 = n])}{p^n} \quad b_n = \frac{n! \mathbf{P}([N_2 = n])}{(1-p)^n} \quad c_n = n! \mathbf{P}([N = n])$$

- (a) Montrer que, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$c_n = a_k b_{n-k}$$

- (b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques.
 (c) Conclure quant aux lois de N_1, N_2 et N .

18 La méthode du maximum de vraisemblance

Voici un texte inédit en concours utilisant la très classique **méthode du maximum de vraisemblance** que vous utiliserez en école permettant de trouver un estimateur de paramètre de loi.

Soit X une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $s > 0$. On considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de cette loi. Pour bien indiquer la dépendance avec le paramètre s nous poserons :

$$\forall (x, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(x, s) = \mathbf{P}([X = x]) = \frac{e^{-s} s^x}{x!}$$

On définit alors la fonction de vraisemblance L (L comme *likelihood*) par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n, s) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*, \quad L(x_1, x_2, \dots, x_n, s) = \prod_{i=1}^n f(x_i, s)$$

- Expliciter $L(x_1, x_2, \dots, x_n, s)$ et contrôler que la fonction de vraisemblance L est à valeurs strictement positives. Cela permet de considérer aussi la fonction :

$$G : (x_1, x_2, \dots, x_n, s) \longmapsto \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, s)$$

- Montrer que, pour (x_1, x_2, \dots, x_n) fixé, l'application :

$$s \longmapsto G(x_1, x_2, \dots, x_n, s)$$

est deux fois dérivable et concave sur \mathbb{R}_+^* .

- Montrer que, toujours avec (x_1, x_2, \dots, x_n) fixé, la fonction :

$$s \longmapsto \frac{\partial G}{\partial s}(x_1, x_2, \dots, x_n, s)$$

s'annule une fois sur \mathbb{R}_+^* au point :

$$\hat{s} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

En déduire que G est maximale en ce point, puis que L est aussi maximale en ce point. Ce résultat suggère de s'intéresser à l'estimateur :

$$\hat{s} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Vu sa provenance – maximisation de la fonction L – cet estimateur est déclaré obtenu par "la méthode du maximum de vraisemblance".

4. Calculer $\mathbb{E}(\hat{s})$ et $\mathbb{V}(\hat{s})$ et faire un petit commentaire.

5. On considère la variable :

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(X_1, X_2, \dots, X_n, s)$$

Montrer que cette variable possède une espérance – notée $I_n(s)$, appelée quantité d'information de Fisher – que l'on calculera.

Partie III

Questions courtes type "QSP"

Voici une compilation que je rêvais de produire depuis des années, mais le courage et le temps me manquaient pour m'attaquer à cette très lourde tâche. Elle est le fruit d'une sélection très pointue, impitoyable même, de 134 sujets qui pourraient parfaitement faire l'objet de questions sans préparation (QSP) à l'oral d'HEC ou de l'ESCP.

Comme les artistes triant parmi près de 200 chansons, celles qui figureront dans leur nouvel album, j'aurai pu vous donner au moins 500 sujets mais il fallait bien me fixer une limite ! Les provenances sont multiples, aussi bien françaises (DEUG, LICENCE, CAPES, AGREG), qu'internationale – beaucoup de sujets que j'ai traduit de l'anglais débusqués durant de très longues heures dans les livres de ma bibliothèque qui contient plusieurs centaines d'ouvrages, certains étant déjà totalement introuvables. Je n'oublie pas non plus les dizaines, que dis-je, les centaines d'heures passées à fouiner sur la toile où il y a vraiment des trouvailles fantastiques à faire !!!

Vous découvrirez aussi de l'exercice 11 à l'exercice 51 l'intégralité des lois, en dimension un, données aux oraux de l'ESCP entre 1994 et 1998, jamais publiée sur le net et de nos jours introuvable en version papier.

Bref vous avez entre les mains un recueil d'exercices qui vous changera des sempiternels standards, au demeurant indispensables, que l'on trouve dans tous les bouquins de prépas, et dont vous vous êtes peut-être lassés, car vous les connaissez par coeur. Voici donc de la fraîcheur !

Ces exercices sont certes courts mais certains vont nécessiter une longue réflexion qui développera sérieusement votre réflexion probabiliste. En tous les cas je suis sûr qu'ils vous passionneront. Vous pourrez chercher à les résoudre tout au long de l'année, car ils regroupent l'intégralité des thèmes du programme et d'autres à la limite de celui-ci qu'il serait bon pour vous d'avoir vu car très récurrents dans les épreuves parisiennes.

Voilà... je vous laisse découvrir maintenant le bébé – j'oserais dire mon bébé – avec lequel vous passerez des moments inoubliables dont vous vous souviendrez avec nostalgie, lorsque que vous serez à la tête de votre multinationale.

Bonne découverte.

1. **Sommation** [Lapresté2.23] Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{k \times k!}{n^k} \binom{n}{k}$.

2. **Intégration et sommation** Soit n et m deux nombres entiers positifs ou nuls, soit x un nombre réel, on considère l'intégrale :

$$J_{n,m}(x) = \int_0^x (x-t)^n t^m dt$$

- (a) Exprimer $J_{n,m}(x)$ en fonction de $J_{n-1,m+1}(x)$ pour $n \geq 1$.
- (b) En déduire une expression de $J_{n,m}(x)$. (On calculera $J_{0,n+m}(x)$).
- (c) En développant le binôme $(x-t)^n$, donner une nouvelle expression de $J_{n,m}(x)$.
- (d) Déduire des questions précédentes la valeur des sommes :

$$\sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!(n-p)!(m+p+1)}$$

3. **Convolution** Soit x un nombre réel, calculer successivement sous les hypothèses suivantes l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^x f(x-t) f(t) dt$$

- (a) $f(t) = e^t$
- (b) $f(t) = t^k$ où $k \in \mathbb{N}$
- (c) $f(t) = \frac{1}{1-t}$ en supposant $|t| < 1$
- (d) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \end{cases}$

4. **Événements négligeables et indépendance** [Limnios1.9.41] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et A, B deux éléments de \mathcal{A} . Montrer que :

- (a) Si A est de probabilité pleine (A est quasi-certain), il est indépendant de lui-même.
- (b) Si A est négligeable, alors A est indépendant de tout événement.
- (c) Si A est indépendant de lui-même, il est négligeable ou de probabilité pleine.
- (d) Si A et B sont négligeables alors $A \cup B$ est aussi négligeable.
- (e) Si A et B sont indépendants et disjoints, alors au moins l'un des deux est négligeable.

5. **Inégalités probabilistes** [OralHEC79.225] Soit dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ deux événements A et B tels que $\mathbf{P}_B(A) \leq \mathbf{P}_{\overline{B}}(A)$. Que pensez-vous des inégalité suivantes :

- (a) $\mathbf{P}_B(A) \leq \mathbf{P}_B(\overline{A})$
- (b) $\mathbf{P}_A(B) \leq \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$
- (c) $\mathbf{P}_A(B) \leq \mathbf{P}_A(\overline{B})$

6. **Loi de succession de Laplace** [Limnios1.8.39]

- (a) On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne k contient une proportion $\frac{k}{N}$ de boules portant le numéro 1. On choisit une urne au hasard puis on en tire $n + 1$ boules avec remise.
 - i. Donner l'espace probabilisé associé à cette épreuve.
 - ii. Calculer la probabilité que les n premières boules tirées portent toutes le numéro 1.
 - iii. Calculer la probabilité que la $(n + 1)$ -ème boule porte le numéro 1 sachant que les n premières portent le numéro 1.
- (b) On sait qu'un événement se réalise avec une probabilité inconnue. Sachant qu'il a été réalisé n fois lors de n répétitions de l'épreuve, calculer la probabilité qu'il se réalise lors d'une $(n + 1)$ -ème répétition, lorsque n tend vers l'infini.

7. **Inégalité probabiliste** [Lapresté1.17] Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) , n événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note p la probabilité de l'événement $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Montrer que :

$$1 - p \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)\right)$$

Indication : on pourra utiliser que $1 - x \leq e^{-x}$ pour $x \geq 0$.

8. [Lapresté1.9] Soit p_n la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants. On suppose que :

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & \text{si } n \geq 1 \\ 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad \text{avec } p < 1, \alpha > 0$$

On suppose également que la probabilité d'avoir une fille est égale à celle d'avoir un garçon. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.

9. **Convergence de séries** [BCPST57] Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une famille d'événements mutuellement indépendants.

- (a) On suppose que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$ et qu'il existe $c < 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(A_n) \leq c$.

- i. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)) = 0$.
- ii. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n -\ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$. En utilisant le théorème des accroissements finis, en conclure que la série $\sum_n \mathbf{P}(A_n)$ diverge.

- (b) On suppose que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) < 1$. Montrer que la série $\sum_n -\ln(1 - \mathbf{P}(A_n))$ converge et en déduire la convergence de la série $\sum_n \mathbf{P}(A_n)$.

10. **Indice aléatoire** [CassiniProblèmes2.2.32] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient N une variable à valeurs dans \mathbb{N}^* et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires. On définit Y_N par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y_N(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega)$$

Montrer que Y_N est une variable. *Indication* : on montrera pour tout borélien B de \mathbb{R} , $\langle Y_N \in B \rangle \in \mathcal{A}$.

11. **Fonction de répartition** [ESCP3.94E] Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire U suivant la loi géométrique de paramètre .
12. **Recherche de loi** [ESCP5.94E] Une urne contient jetons numérotés de 1 à $2n$. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne et on note X le numéro aléatoire obtenu. Quelle est la loi de X ?
13. **Recherche de loi** [ESCP6.94E] On considère une succession de lancers d'un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire égale au nombre de lancers juste nécessaires pour obtenir pour la première fois un "1". (Si on obtient jamais "1", on pose $X = 0$). Donner la loi de X .
14. **Recherche de loi** [ESCP7.94E] On considère une suite de $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes. Pour chacune la probabilité du succès vaut p et celle de l'échec vaut $q = 1 - p$ (avec $0 < p < 1$). Soit X la variable aléatoire valant 0 si aucun succès n'est obtenu et 1 si le premier succès est obtenu à la $i^{\text{ème}}$ épreuve. Déterminer la loi de X .
15. **Recherche de loi** [ESCP14.94E] On dispose de urnes contenant chacune N boules numérotées de 1 à N . On tire au hasard, une boule de chaque urne et on note Z_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. Pour $k \in [1, n]$, calculer $\mathbf{P}([Z_n \leq k])$ et en déduire la loi de Z_n .
16. **Recherche de loi** [ESCP18.94E] Un commerçant reçoit un lot de N articles dont n sont défectueux (avec n compris entre 1 et n). Le commerçant contrôle les articles en les tirant au hasard, un par un et sans remise. On appelle X la variable aléatoire égale au rang du premier article défectueux contrôlé. On suppose $n = 1$. Déterminer la loi de X .
17. **Recherche de loi** [ESCP21.94E] Une urne contient n boules noires et $2n$ boules blanches indiscernables au toucher. On tire les boules une à une, au hasard et sans remise, jusqu'à obtenir la dernière boule noire. Soit X_n le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués. Quelle est la loi de X_n ?
18. **Recherche de loi** [ESCP3.4.94] On suppose qu'un étang contient N poissons d'une espèce donnée, N étant un entier inconnu, qu'on souhaite estimer. On en capture K , qu'on marque et qu'on replace dans l'étang. Puis on reprend un par un les poissons de l'étang, sans les remettre, jusqu'à obtenir un nombre k , fixé à l'avance, de poissons marqués. On suppose qu'il n'y a eu ni décès ni naissance d'aucun poisson. Soit X la variable aléatoire égale au nombre nécessaire de poissons à pêcher pour obtenir k poissons marqués. Déterminer la loi de X .
19. **Recherche de loi** [ESCP3.8.94] On considère une rangée infinie de cases indexées par \mathbb{Z} . Une puce, placée à l'instant n sur une case, saute à l'instant $n + 1$ sur une des deux cases voisines équiprobablement. A l'instant 0, elle se trouve sur la case 0. On note X la variable aléatoire indiquant le numéro de la case occupée par la puce après n sauts, n entier naturel fixé. Quelle est la loi de X ?
20. **Recherche de loi** [ESCP3.9.94] Deux amis jouent aux dés. Chacun jette une paire de dés et recommence jusqu'à ce que la différence du nombre de points des deux dés soit 4. Ils jouent simultanément. La partie se termine lorsque chacun a obtenu une différence de 4. On suppose qu'ils jettent les dés chaque minute, de façon indépendante, l'un pouvant éventuellement continuer seul. On note X la durée d'une partie. Quelle est la loi de X ?

21. **Recherche de loi** [ESCP3.13.94] Une urne contient n jetons identiques au toucher numérotés de 1 à n . On tire les jetons un à un sans remise, et on s'arrête dès qu'on tire un jeton dont le numéro est supérieur au numéro du jeton précédemment tiré. On appelle X la longueur aléatoire de la suite ainsi obtenue.

Lorsque dans un tirage, on n'a pas rencontré de numéro supérieur au numéro précédent, on pose $X = n + 1$.

Déterminer la fonction de répartition de X et sa loi de probabilité.

22. **Recherche de loi** [ESCP3.4.95] Une urne contient des boules noires et des boules blanches. La proportion de boules noires est p avec $0 < p < 1$. On effectue une suite de tirages d'une boule que l'on remet à chaque fois. On dira que le $n^{\text{ème}}$ tirage est un succès si l'on tire une boule noire. Pour tout $k \geq 1$, on appelle X_k la variable aléatoire représentant le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir k succès consécutifs.

Quelle est la loi de X_1 ?

23. **Recherche de loi** [ESCP3.7.95] N joueurs numérotés de 1 à N avec $N \geq 2$ se lancent une balle au hasard. Au départ, c'est le joueur numéro 1 qui a la balle. Pour $p \in \mathbb{N}$, X_p désigne la variable aléatoire égale au numéro du joueur qui possède la balle avant le $(p + 1)^{\text{ème}}$ lancer.

Quelle est la loi de X_0 ?

24. **Recherche de loi** [ESCP3.8.95] Une urne contient jetons numérotés de à . Un urne contient boules numérotées de à . Deux joueurs et jouent au jeu suivant, chaque joueur tire à tour de rôle :

► tout d'abord un jeton dans l'urne et le remet,

► puis une boule dans l'urne et la remet.

C'est A qui commence. Le gagnant est le premier joueur qui a tiré un numéro de boule strictement supérieur au numéro du jeton tiré juste avant.

X désigne la variable aléatoire égale au nombre de tirages pour qu'il y ait un gagnant.

Déterminer la loi de X .

25. **Recherche de loi** [ESCP3.10.95] n boules indiscernables sont réparties au hasard parmi urnes de contenance illimitée. On suppose . Pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, on définit une variable aléatoire X_i par:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ urne est vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudier la loi de X_i .

26. **Recherche de loi** [ESCP3.14.95] On dispose d'une urne contenant initialement 1 boule noire, et k boules blanches, k étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On tire une boule de l'urne, au hasard. Si c'est la noire, le jeu s'arrête. Sinon, on remet dans l'urne la boule tirée plus une autre blanche, et l'on recommence.

On désigne par X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

Déterminer la loi de X .

27. **Recherche de loi** [ESCP3.17.95] Une urne contient $n + 1$ boules numérotées de 0 à n ($n \geq 2$). On effectue une infinité de tirages au hasard d'une boule avec remise. On définit une suite de variables aléatoires X_i , $i \in \mathbb{N}^*$, de la façon suivante :

► X_1 est la variable égale à 1;

► Pour $i \geq 2$, $[X_i = 1]$ si le numéro obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage n'a pas été obtenu au cours des $i - 1$ premiers tirages, et $[X_i = 0]$ dans le cas contraire.

Déterminer la loi de X_2 .

28. **Recherche de loi** [ESCP3.18.95] Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On s'intéresse à la suite d'épreuves suivantes : on tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On retire alors de l'urne toutes les boules portant un numéro strictement inférieur au numéro que l'on vient de noter. L'urne est alors prête pour le tirage suivant. Par exemple, si, lors du premier tirage, la boule numérotée $n - 2$ est sortie, il ne restera dans l'urne que les boules numérotées $n - 2$, $n - 1$, n pour le second tirage.

On note U_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Donner la loi de U_1 .

29. **Recherche de loi** [ESCP3.19.95] Soit N un entier naturel non nul. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On y effectue des tirages successifs d'une boule avec remise.

Soit X la variable aléatoire prenant la valeur $k \in \mathbb{N}^*$ si, au cours des k tirages, mais pas des $k - 1$ premiers, chaque numéro a été sorti au moins une fois, et prenant la valeur 0 si un tel rang n'existe pas.

Quelle est la loi de X quand $N = 1$?

30. **Recherche de loi** [ESCP3.2.96] Dans un local, il y a N dragées, dont b bleues et r roses. On pose $p = \frac{b}{N}$ et $q = 1 - p$.
On décide d'effectuer dans ce local, des tirages successifs d'une dragée au hasard, avec remise à chaque fois de la dragée tirée, jusqu'à obtenir une dragée bleue. Soit X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de tirages nécessaires. Calculer pour tout entier $n \geq 1$, la probabilité $\mathbf{P}([X = n])$.
31. **Recherche de loi** [ESCP3.1.96E] Une urne contient n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n . On extrait les boules de cette urne, au hasard, une par une et sans remise, jusqu'à obtenir les trois boules numérotées 1, 2 et 3. Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires.
Déterminer la loi de X .
32. **Recherche de loi** [ESCP3.5.96E] Un joueur décide d'aller tenter sa chance au casino. En arrivant, il prend un jeton qu'il paie 10 francs et il joue avec une machine qui fonctionne selon les règles suivantes :
À chaque partie, il y a trois issues possibles :
► Il gagne le "jackpot", qui est un gain de 100 francs, avec la probabilité a ($0 < a < 1$); il récupère également sa mise et est obligé de cesser de jouer;
► Il perd sa mise, avec la probabilité b ($0 < b < 1$) et cesse de jouer;
► Dans tous les autres cas, il gagne une partie gratuite et est obligé de rejouer.
Soit X le nombre aléatoire de parties ainsi jouées.
Donner la loi de X .
33. **Recherche de loi** [ESCP3.7.96E] Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.
On extrait un jeton de cette urne. Soit X le numéro aléatoire obtenu. Déterminer la loi de X .
34. **Recherche de loi** [ESCP3.11.96E] n est un entier supérieur ou égal à 3; n personnes jouent des parties de pile ou face : à chaque partie, chacun lance une pièce de monnaie équilibrée. Si toutes les pièces, sauf une, donnent le même résultat, le propriétaire de celle-ci est déclaré perdant.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour obtenir un perdant.
Déterminer la loi de X .
35. **Recherche de loi** [ESCP3.17.96E] Soit n un entier, supérieur ou égal à 3. On suppose que n souris sont lâchées en direction de 3 cages, c_1, c_2, c_3 , chaque cage pouvant contenir les souris et chaque souris allant dans une cage au hasard.
(a) Quelle est la probabilité qu'une cage au moins reste vide ?
(b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cages restées vides. Déterminer la loi de X .
36. **Recherche de loi** [ESCP3.18.96E] Quel est le nombre de suites strictement croissantes que l'on peut former avec p entiers choisis entre 1 et N ($N \geq 2$) ?
Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N . On tire, au hasard et sans remise, chacun des jetons de l'urne et on note $\omega = (u_1, \dots, u_N)$ la suite des numéros ainsi obtenus. Soit X la variable aléatoire définie par :
 $X(\omega) = r$, où r est le plus petit entier appartenant à $[1, N - 1]$ tel que $u_r > u_{r+1}$, $X(\omega) = N$ sinon.
Calculer, pour $k \in [1, N - 1]$, la probabilité $\mathbf{P}([X > k])$ et en déduire la loi de X et vérifier que
$$\sum_{k=1}^N \mathbf{P}([X = k]) = 1.$$
37. **Recherche de loi** [ESCP3.8.97] On lance indéfiniment une pièce truquée amenant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$), et on pose $q = 1 - p$. On s'intéresse à la longueur des séries ou apparitions successives de "pile" ou de "face", en appelant série une succession de "pile" ou une succession de "face" interrompue par l'événement contraire.
Par exemple dans la suite (P, F, F, P, P, P, F) il y a 2 séries de "pile" de longueur 1 et 3, et deux séries de "face" de longueur 2 et 1.
On note X_i la longueur aléatoire de la $i^{\text{ème}}$ série.
Donner la loi de X_1 .

38. **Recherche de loi** [ESCP3.10.97] Une roue de loterie est composée de N numéros distincts. Un seul numéro sort à chaque partie. Les parties sont supposées indépendantes. Pour tout $r \in \{1, \dots, N\}$, on appelle S_r la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour obtenir r numéros différents. On pose $X_k = S_{k+1} - S_k$, $1 \leq k \leq N - 1$. Que représente la variable X_k ? En déduire sa loi.
39. **Recherche de loi** [ESCP3.11.97] Une urne contient 2 boules blanches, numérotées 1 et 2, et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise, jusqu'à l'apparition de la noire, où on arrête l'expérience. On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées et X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus. Déterminer la loi de N ?
40. **Recherche de loi** [ESCP3.13.97] Un mobile se déplace sur un axe gradué d'origine O par sauts successifs d'une unité ou de deux unités vers la droite selon les règles suivantes :
- ▶ Au départ le mobile est en O .
 - ▶ Si à un instant le mobile est sur la case d'abscisse k , il sera à l'instant suivant soit sur la case d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit sur la case d'abscisse $k + 2$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
 - ▶ Les sauts sont indépendants.
- On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts d'une unité effectués au bout de n sauts. Déterminer la loi de Y_n .
41. **Recherche de loi** [ESCP3.16.97] Soit une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $0 < p < 1$, (on pourra poser $q = 1 - p$). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2; on note $Q = \left\lfloor \frac{X}{n} \right\rfloor$, la partie entière de $\frac{X}{n}$. Donner la loi de Q .
42. **Recherche de loi** [ESCP3.25.97] Une urne contient N boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N . On effectue n tirages au hasard d'une boule de l'urne, avec remise de la boule dans l'urne après chaque tirage. Soit k un nombre fixé compris entre 1 et N , au sens large, et X la variable aléatoire désignant le nombre de boules, parmi les n tirées, dont les numéros sont strictement compris entre k et $N + 1 - k$. Déterminer la loi de X .
43. **Recherche de loi** [ESCP3.44.97] On considère une suite de parties indépendantes de "pile ou face", la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant égale à p , avec $0 < p < 1$. Soit k un entier naturel fixé au moins égal à 2. On note T le numéro aléatoire du lancer amenant pour la $k^{\text{ème}}$ fois pile. Détermine la loi de T (on admettra que $\sum_{n \geq k} \mathbf{P}([T = n]) = 1$).
44. **Recherche de loi** [ESCP3.45.97] Une urne contient n jetons ($n \geq 2$) numérotés depuis 1 jusqu'à n . On extrait les jetons un par un et sans remise. Pour i compris entre 1 et n , on note X_i la variable aléatoire égale au nombre du jeton obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage. Soit T_n la variable aléatoire égale au plus petit des indices i tels que $X_i > X_{i+1}$, si cet indice existe. Si un tel indice n'existe pas, on pose $T_n = n$.
- (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque, calculer $\mathbf{P}([T_n > k])$.
 - (b) En déduire la loi de T_n .
45. **Recherche de loi** [ESCP3.5.98] Une urne contient N boules blanches numérotées de 1 à N où N est un entier inconnu strictement supérieur à 2. On en tire, simultanément et au hasard, n boules, avec $1 < n < N$. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand des numéros obtenus sur l'ensemble des n boules tirées. Déterminer la loi de X .
46. **Recherche de loi** [ESCP3.11.98] Castor se sert d'une pièce amenant pile avec la probabilité p et face avec la probabilité q telles que $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, pour remplir une urne de n boules soit blanches, soit rouges, selon le mode suivant :

Il lance n fois la pièce; à chaque lancer, si pile apparaît, il place une boule blanche dans l'urne, sinon il y place une boule rouge. Il informe Pollux de la procédure utilisée pour remplir l'urne, mais ne lui dit pas le nombre de boules blanches qu'elle contient.

Pollux, rompu aux méthodes probabilistes, note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans l'urne. Quelle est la loi de X ?

47. **Recherche de loi** [ESCP3.25.98] Un joueur possède un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Il effectue une suite de lancers indépendants et s'arrête lorsqu'il a obtenu pour la première fois deux nombres successifs identiques.

Soit X le nombre de lancers à effectuer. Calculer la probabilité de l'événement $[X = n]$ pour n entier naturel. Vérifier que X est une variable aléatoire.

Reconnaître la loi de $X - 1$.

48. **Recherche de loi** [ESCP3.17.99] Un jeu consiste à tirer un numéro parmi les nombres $\{0, \dots, n\}$, ($n > 0$). Le joueur gagne la somme x égale au numéro tiré si ce numéro est pair, ou perd cette somme x si le numéro tiré est impair.

On suppose que le numéro tiré suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.

Donner la loi du gain (positif ou négatif) du joueur.

49. **Recherche de loi** [ESCP3.27.99] Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire plusieurs fois au hasard et avec remise une boule de l'urne. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

(a) Déterminer $X(\Omega)$.

(b) Déterminer la probabilité des événements $[X \geq 2]$, $[X \geq 3]$ et $[X = 2]$.

(c) Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité de l'événement $[X \geq k]$.

(d) En déduire la loi de X .

50. **Recherche de loi** [ESCP3.11.00] On effectue une succession indéfinie de lancers indépendants avec une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)^{\text{ème}}$, l'autre.

Déterminer la loi de L_1 .

51. **Recherche de loi** [ESCP3.15.00] On considère 6 dés, cinq étant équilibrés. Le dernier est pipé de manière à ce que lorsqu'on lance ce dé, chacun des chiffres apparaît avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.

Donner la loi de la variable aléatoire égale au chiffre donné par le dé truqué lorsqu'on le lance.

52. **Variable fonction d'une autre** Soit X une variable aléatoire dans \mathbb{Z}^* de loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = 2^{-(|k|+1)}$$

On définit la variable Y en posant $\forall \omega \in \Omega$:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geq 0 \\ -X(\omega) + 1 & \text{si } X(\omega) < 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y .

53. **Variable fonction d'une autre** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} ; on définit la variable réelle Y en posant $\forall \omega \in \Omega$:

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}X(\omega) & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \frac{1}{2}(1 - X(\omega)) & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y et son espérance si :

(a) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

(b) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

54. **Lois conditionnelles** [II.11] Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (a) Calculer la loi de (X_1, X_2, \dots, X_n) conditionnellement à S_n ;
- (b) Calculer la loi de X_i conditionnellement à S_n (pour $n \geq i$).
- (c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes conditionnellement à S_n ($n \geq 2$) ?

55. **Variable fonction d'une autre** [Université de Rennes licence exo7] Soit X une variable aléatoire dans \mathbb{Z}^* de loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = 2^{-(|k|+1)}$$

On définit la variable aléatoire Y en posant :

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geq 0 \\ -X(\omega) + 1 & \text{si } X(\omega) < 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y .

56. **Recherche de loi et espérance** [Lapresté2.6.30] Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire les boules, une par une, sans remise, n fois.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules dont le rang de tirage est égal au numéro.

Calculer l'espérance et la variance de X .

57. **Recherche de loi et espérance** [Lapresté2.14.42] Lors d'une expérience, on constate que n particules se désintègrent en suivant des lois $(T_k)_{k \in [1, n]}$ qui suivent toutes une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$.

On note $N(t)$ le nombre de particules non désintégrées à l'instant t .

- (a) Calculer $\mathbb{E}(N(t))$.
- (b) On suppose les variables $(T_k)_{k \in [1, n]}$ indépendantes. Quelle est la loi suivie par $N(t)$?

58. **Loi de couples** [Lapresté2.16.44] Une urne contient n boules noires indiscernables et deux boules rouges numérotées 1 et 2.

L'expérience consiste à tirer $n + 2$ fois une boule sans remise. On note :

N_1 : la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première de la première boule rouge.

N_2 : la variable aléatoire égale au rang de tirage de la seconde boule rouge.

R_1 : la variable aléatoire égale au rang de tirage de la boule rouge numéro 1.

R_2 : la variable aléatoire égale au rang de tirage de la boule rouge numéro 2.

- (a) Trouver la loi du couple (R_1, R_2) . En déduire les lois des variables aléatoires R_1 et R_2 .
- (b) Trouver la loi du couple (N_1, N_2) . En déduire les lois des variables aléatoires N_1 et $N_2 - N_1$ puis les espérances $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{E}(N_2)$.

59. **Coefficient de corrélation** [Lapresté2.17.45] Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) n variables aléatoires discrètes, indépendantes, suivant toutes la même loi. On pose :

$$X_i(\Omega) = \{1, 2, \dots, k\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n], \quad 1 \leq j \leq k, \quad p_j = \mathbf{P}([X_i = j])$$

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de variables X_i telles que $X_i = 2$.

Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$.

60. **Covariance** [Lapresté2.21.52] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, qui vérifient :

$$\mathbf{P}([X_n = -1]) = \mathbf{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{2}$$

On définit une suite (Y_n) par :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_n = \alpha Y_{n-1} + X_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- (a) Exprimer Y_n en fonction de (X_1, X_2, \dots, X_n) .
 (b) Calculer l'espérance et la variance de Y_n , puis $cov(Y_n, Y_{n+m})$.

61. **Espérance et variance d'une somme de variables iid** [Lapresté2.28.60] Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi définie par :

$$\mathbf{P}([X_n = k]) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a > 0$$

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Calculer l'espérance et la variance de S_n .

62. **Variables à densité** [BCPST46] Soit a un nombre réel strictement positif et $b \in]0, 1[$. On considère un vecteur aléatoire (X, Y) à valeurs dans \mathbb{N}^2 , dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{a^i e^{-a} b^j (1-b)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

- (a) Déterminer la loi de X son espérance et sa variance.
 (b) Déterminer la loi de Y . X et Y sont-elles indépendantes ?
 (c) On considère $Z = X - Y$. Quelle est la loi de Z ?
 (d) Y et Z sont-elles indépendantes ?

63. **Couple aléatoire discret** [BCPST45] La loi d'un couple $\mathbf{C} = (X, Y)$ où chaque variable est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad p_{ij} = \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = k 2^{i-2j} \binom{n}{i} \binom{n}{2j}$$

- (a) Déterminer les valeurs de k pour que les relations précédentes définissent une loi de couple.
 (b) Déterminer les lois marginales de X et de Y ainsi que leurs espérances. Que vaut l'espérance du produit XY .

64. **Variable presque sûrement nulle** [AgregFoata12.97] Soit X une variable aléatoire. Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) = 0$, alors $X = 0$ p.s. On a la même conclusion en supposant $\mathbb{E}(X^2) = 0$.

65. **Négligeabilité** [AgregFoata15.97] Soit X une variable aléatoire et r un nombre réel strictement positif tels que $\mathbb{E}(|X|^r) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(\llbracket |X| \geq n \rrbracket) = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

66. **Covariance** [AgregFoata10.97] Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires vérifiant $X + Y + Z = 1$. On suppose que l'on a :

$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{V}(Y) \leq \mathbb{V}(Z) < +\infty$$

Montrer que :

- (a) La variable Z est en corrélation négative avec X ainsi qu'avec Y ,
 (b) l'on a $cov(X, Y) \geq 0$ si et seulement si $\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) \leq \mathbb{V}(Z)$.
 (c) l'on a : $|cov(X, Z)| \leq |cov(Y, Z)|$.

67. **IBT** [Ex2.série2] Soit X une variable aléatoire centrée de variance σ^2 . En utilisant l'IBT, démontrer que :

(a) $\forall a > 0, \mathbf{P}(\llbracket |X| \geq a \rrbracket) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ et $\mathbf{P}(\llbracket |X| \geq a \rrbracket) \leq \frac{2\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$.

(b) $\forall a > 0, \mathbf{P}(\llbracket |X| \geq a \rrbracket) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$ (indication : on utilisera $\psi(x) = (x+b)^2$ avec $b \geq 0$, puis minimiser en b).

68. **Inégalité probabiliste** [Lapresté5.5.115] Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi définie par :

$$\mathbf{P}([X = -1]) = \mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}$$

(a) Calculer, pour $x > 0$, l'espérance :

$$\mathbb{E} \left[\exp \frac{x}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right]$$

(b) En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x > 0, \quad \mathbf{P} \left(\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} > \varepsilon \right] \right) \leq e^{-x\varepsilon} \left(ch \left(\frac{x}{n} \right) \right)^n$$

$$\text{On donne } \forall x \in \mathbb{R} : chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

69. **Inégalité probabiliste** [Anse11.14.16] Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, on considère une variable aléatoire centrée et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Montrer que, pour tout $a > 0$:

$$a \leq \mathbb{E} [(a - X) \mathbf{1}_{[X \leq a]}] \leq (\mathbf{P}([X \leq a]))^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma^2 + a^2}$$

En déduire que :

$$\mathbf{P}([X > a]) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

70. **IBT** [BCPST163]

(a) Montrer à l'aide de l'IBT que :

$$\forall x > 0, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \leq \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 1 - F(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On pourra utiliser les inégalités : $1 - 3t^{-4} < 1 < 1 + t^{-2}$ pour tout $t > 0$.

En déduire :

$$1 - F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

71. **Une inégalité** [BCPST160] Soit X une variable admettant un moment d'ordre deux. Montrer que :

$$(\mathbb{E}[X^2])^{\frac{1}{2}} \geq \mathbb{E}[|X|]$$

72. **Inégalité probabiliste** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, montrer que :

$$(a) \quad \mathbf{P}([X \geq \lambda + 1]) \leq \lambda$$

$$(b) \quad \mathbf{P} \left(\left[X \leq \frac{\lambda}{3} \right] \right) \leq \frac{9}{4\lambda}$$

73. **Inégalité de Chernoff** [AgregFoata14.176] Soit X une variable aléatoire admettant une fonction génératrice des moments $g(u)$. Montrer que l'on a :

$$\forall x > 0, \quad \mathbf{P}([X \geq x]) \leq \inf_{u \geq 0} e^{-ux} g(u)$$

74. **Inégalité de Kolmogorov** Soit X une variable aléatoire et soit $\beta \in \mathbb{R}^*$ tels que, $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq \beta$; montrez que l'on a :

$$\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2) - a^2}{\beta^2}$$

75. **Inégalité probabiliste** [Quebec99.374] Soit X une variable aléatoire et f une fonction décroissante positive. Montrer que si $\mathbb{E}(f(X))$ existe et si $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(a)}$$

76. **Inégalité probabiliste** [Quebec100.375] Soit $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$. Montrer que :

(a) Montrer que $\mathbb{E}(X^n) = n!$

(b) Montrer que $\forall a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{n!}{a^n}$. *Indication : on pourra utiliser l'exercice 78.*

77. **Médiane** [AgregFoataTH10.1.93] Soit X une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{E}|X| < +\infty$. Si M est une médiane⁹ de X , alors pour tout réel a on a :

$$\mathbb{E}|X - a| \geq \mathbb{E}|X - M|$$

78. **Une inégalité** [AgregFoataProp5.3.87] Soit X une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Alors pour tout réel a on a :

$$\mathbb{E}[(X - a)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sigma^2$$

79. **Inégalité probabiliste** [LesCahiersESCP423] Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune une espérance et une variance, montrer que :

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathbf{P}\left(|X_1 - \mathbb{E}(X_1)| \geq t_1 \sigma(X_1) \cap |X_2 - \mathbb{E}(X_2)| \geq t_2 \sigma(X_2)\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2}\right)$$

80. **Fonction génératrice** [ENS362]

(Dimension 1 en discret) On appelle **fonction génératrice d'une variable discrète** X à valeurs dans $[[0, n]]$ la fonction notée G_X définie par :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^n t^k \mathbf{P}([X = k])$$

sous réserve d'existence de la série rencontrée.

(Dimension 1 en continu) On appelle **fonction génératrice d'une variable à densité** X de densité f la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^x f(x) dx$$

sous réserve d'existence de l'intégrale rencontrée.

(Dimension 2) Soit $\mathbf{X} = (X, Y)$ un couple de variable aléatoires discrètes à valeurs dans $\Delta_X \times \Delta_Y \subset \mathbb{N}^2$, on appelle **fonction génératrice du couple** \mathbf{X} la fonction notée $G_{\mathbf{X}}$ ou $G_{X,Y}$ définie par :

$$G_{\mathbf{X}}(t, s) = \mathbb{E}(t^X s^Y) = \sum_{(i,j) \in \Delta_X \times \Delta_Y} t^i s^j \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

A partir de la définition, montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[[0, n]]$, alors :

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

⁹La médiane à l'avantage sur l'espérance d'exister pour tout variable. C'est le réel M vérifiant $\mathbf{P}([X \leq M]) \geq \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}([X \geq M]) \geq \frac{1}{2}$.

81. **Fonction génératrice** [ENS363] Soit (X, Y) un couple de VARD dont la loi conjointe est définie par le tableau de contingence :

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/9	2/9	0
1	0	1/9	2/9
2	2/9	0	1/9

- (a) Déterminer G_X et G_Y .
 (b) X et Y sont-elles indépendantes ?
 (c) Déterminer G_{X+Y} et vérifier que $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Commenter.
82. **Fonction génératrice** [ENS29.1.365]

- (a) Déterminer la fonction génératrice de X une variable de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0, 1[$).
 (b) Déterminer G'_X et G''_X et retrouver les expressions de l'espérance et de la variance de X .

83. **Fonction génératrice** [ENS29.1.365]

- (a) Déterminer la fonction génératrice de X une variable binomiale de paramètres n et p ($n \geq 2$, $p \in]0, 1[$).
 (b) Déterminer G'_X et G''_X et retrouver les expressions de l'espérance et de la variance de X .

84. **Fonction génératrice** [ENS29.2.365] Déterminer la fonction génératrice de X une variable de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$).

85. **Fonction génératrice** [ENS29.2.365] Calculer le produit $G_X G_Y$ des fonctions génératrices de $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ ($\lambda > 0$ et $\mu > 0$) indépendantes et retrouver un résultat connu.

86. **Fonction génératrice** [ENS29.3.365] Soit X une VARD à valeurs dans \mathbb{N} dont la fonction génératrice est définie sur $[-1, 1]$ par :

$$G_X(t) = \frac{t^2}{2-t^2}$$

Déterminer les lois de X et $Y = \frac{X}{2}$.

87. **Fonction génératrice** [ENS363] Soit (X, Y) un couple de VARD dont la loi conjointe est définie par le tableau de contingence :

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/9	2/9	0
1	0	1/9	2/9
2	2/9	0	1/9

- (a) Montrer que $\text{cov}(X, Y) = 0$. X et Y sont-elles indépendantes ?
 (b) Déterminer les fonctions génératrices G_X , G_Y , G_{X+Y} et vérifier que :

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

88. **Fonction génératrice** [Ghorba50] Soit X et Y deux VARD à valeurs entières de loi conjointe:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \theta \frac{\alpha^i \beta^j}{i!j!}$$

où θ, α et β sont des constantes strictement positives avec $\alpha \neq \beta$.

- (a) Déterminer $G_{X,Y}$ la fonction génératrice du couple (X, Y) , en déduire la valeur de θ en fonction de α et β .
 (b) Déterminer les lois marginales de X et de Y .
 (c) Déterminer la loi de la somme $X + Y$.
 (d) Déterminer la loi conditionnelle X sachant que $X + Y = s$.

89. **Miscellaneous** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = m] \cap [Y = n]) = \binom{n}{m} \frac{e^{-2\lambda} \lambda^n}{n!}$$

- Déterminer les lois de X et Y .
- X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer la covariance de X et Y .
- Déterminer la loi de X conditionnée par Y .
- Y représente le nombre de personnes qui arrivent à un guichet durant une période de une minute, X représente le nombre de femmes qui arrivent à ce guichet pendant la même période, comment interpréter le résultat (d).

90. **Fonction génératrice et loi de probabilité** [Ghorba51]

- Soit Z une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer G_Z la fonction génératrice de Z .
- Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$; N et R deux autres variables aléatoires indépendantes et indépendantes de $(X_i)_{i \geq 1}$ de lois respectives :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([N = k]) &= \frac{\theta^k}{(e^\theta - 1) k!} \quad (\theta > 0) \\ \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([R = r]) &= (1 - e^{-\theta}) e^{-\theta(r-1)} \end{aligned}$$

On pose : $U = \max(X_1, \dots, X_N)$.

- Déterminer G_N et G_R les fonctions génératrices de N et de R .
- Déterminer la loi de U .
- Déterminer la loi de $R - U$.

91. **Fonction génératrice** [Ghorba53] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi et K une autre variable aléatoire à valeurs entières positives, indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ et de fonction génératrice G_K .

$$\text{On note } S = \sum_{i=1}^K X_i.$$

- Déterminer G_S la fonction génératrice de S .
- Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

92. **Fonction génératrice et moments** [II.9] Soit X, Y, Z trois VAR à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes, avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 1]) &= p, & \mathbf{P}([X = 0]) &= 1 - p, & 0 < p < 1 \\ \mathbf{P}([Y = k]) &= (1 - a) a^{k-1}, & k \in \mathbb{N}^*, & & 0 < a < 1 \\ \mathbf{P}([Z = k]) &= e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, & k \in \mathbb{N}, & & \theta > 0 \end{aligned}$$

- Identifier les lois des VAR Y et Z et donner leur fonction génératrice.
- Soit U la VAR égale à 0 si $X = 0$, égale à Y si $X = 1$. Calculer la fonction génératrice de U , en déduire $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(U^2)$.
- Soit V la VAR égale à Y si $X = 0$, égale à Z si $X = 1$. Calculer la fonction génératrice de V , en déduire $\mathbb{E}(V)$ et $\mathbb{E}(V^2)$.

93. Transformation de Laplace [CassiniProblèmes5.13.162]

On appelle **transformation de Laplace d'une variable discrète** X la fonction notée M_X définie par :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk} \mathbf{P}([X = k])$$

sous réserve d'existence de la série rencontrée.

On appelle **transformation de Laplace d'une variable à densité** X de densité f la fonction notée M_X définie par :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

sous réserve d'existence de l'intégrale rencontrée.

M_X désigne la transformation de Laplace de X , et $U = \{t \mid M_X(t) < +\infty\}$. Dans chacun des suivants, vérifier la valeur de M_X et préciser U :

(a) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

(b) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$.

(c) $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$, $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.

(d) Montrer que pour tous réels a, b , on a $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$.

94. **Première valeur record** [CassiniProblèmes3.12.87] Soient $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables positives indépendantes et de même fonction de répartition continue et telle que $F(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit N le premier entier $n \geq 1$ pour lequel $X_n > X_0$ et soit $Y = X_N$.

(a) Calculer $\mathbf{P}([N = n])$ et $\mathbb{E}(N)$.

(b) Calculer $\mathbf{P}([N = n] \cap [Y < x])$ et en déduire la fonction de répartition de Y .

95. **Constante de normalisation - changement de variable** A quelle condition sur α , la fonction p définie par $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ si $0 < x < 1$, $p(x) = 0$ sinon, est-elle une densité de probabilité ? Montrer que la loi de $Y = -\alpha \ln X$ ne dépend pas de α .

96. **Constante de normalisation** [Quebec6.310] Soit $f : x \mapsto \frac{k}{e^x + e^{-x}}$. Trouver k pour que f soit une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

97. **Loi de $F(X)$** [CassiniProblèmes2.19.59] Soit X une variable réelle de fonction de répartition F . On suppose F continue et strictement croissante). Donner la loi de $F(X)$.

98. **Loi triangulaire** [Ghorba60] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi triangulaire** de paramètre a ($a > 0$), si la densité de la loi de X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \mathbf{1}_{[-a, a]}(x)$$

(a) Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .

(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbf{P}([X > \theta])$.

(c) Pour $k \geq 1$ on pose $\theta_k = \frac{a}{2k}$. Calculer $\mathbf{P}([|X| > \theta_k])$.

(d) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}(X^r)$.

99. **Loi triangulaire** [CassiniProblèmes3.6.74] Soient X, Y, Z trois variables indépendantes de même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer la loi de $X + Y$, $\frac{1}{2}(X + Y)$, $\frac{1}{3}(X + Y + Z)$.

100. **Loi bêta** [Ghorba63] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi bêta** de paramètres (a, b) ($a > 0$, $b > 0$), notée $\beta(a, b)$, si la densité de la loi de X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{]0, 1[}(x)$$

où $\beta(a, b)$ désigne la fonction bêta définie par :

$$\beta(a, b) = \beta(b, a) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Γ désigne la fonction gamma.

On désigne par $F_{a,b}$ la fonction de répartition de la loi $\beta(a, b)$ et $F_{a,b}^{-1}$ sa fonction réciproque.

(a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ on a :

$$F_{a,b}(x) = 1 - F_{b,a}(1-x)$$

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a :

$$F_{a,b}^{-1}(\alpha) = 1 - F_{b,a}^{-1}(1-\alpha)$$

(c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de la fonction Γ . En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

101. **Loi bêta de deuxième espèce** [Ghorba64] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi bêta de deuxième espèce** de paramètres (a, b) ($a > 0$, $b > 0$), notée $\beta_{11}(a, b)$, si la densité de la loi de X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$$

où $\beta(a, b)$ désigne la fonction bêta.

On désigne par $F_{a,b}$ la fonction de répartition de la loi $\beta_{11}(a, b)$ et $F_{a,b}^{-1}$ sa fonction réciproque.

(a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$F_{a,b}(x) = 1 - F_{b,a}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a :

$$F_{a,b}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{F_{b,a}^{-1}(1-\alpha)}$$

(c) Pour quelles valeurs de a et b , $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ sont-elles finies ?

(d) Soit Y une variable aléatoire réelle suivant une loi $\beta(a, b)$. Déterminer les lois de $Y_1 = \frac{Y}{1-Y}$ et de $Y_2 = \frac{1-Y}{Y}$.

102. **Loi de Pareto** [Ghorba69] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi de Pareto** de paramètres (a, b) ($a > 0$, $b > 0$), si la densité de la loi de X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}} \mathbf{1}_{[a, +\infty[}(x)$$

(a) Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X . En déduire $q(x) = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}$.

(b) Pour quelles valeurs de b , $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ sont-elles finies ?

(c) Déterminer la loi de $Y = \ln \frac{X}{a}$.

103. **Loi zeta et loi de Pareto** [Limnios2.5.90] Soit ζ la fonction de Riemann, définie par :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$$

et finie pour $\alpha > 1$. Soit X_α , pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire de loi zeta donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X_\alpha = k]) = \frac{K(\alpha)}{k^{\alpha+1}}$$

- (a) Déterminer $K(\alpha)$ la constante de normalisation de cette loi.
 (b) Calculer les moments de X_α lorsqu'ils sont finis.
 (c) Soient $\alpha > 0$, $a > 0$ et $X_{a,\alpha}$ une variable aléatoire de loi de Pareto de densité :

$$f_X(x) = \frac{K(a, \alpha)}{x^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{[a, +\infty[}(x)$$

- (d) Déterminer $K(a, \alpha)$ la constante de normalisation de cette loi.
 (e) Déterminer la fonction de répartition de $X_{a,\alpha}$.
 (f) Calculer les moments de $X_{a,\alpha}$ lorsqu'ils existent. Donner sa variance.
 (g) On pose $Y = \ln X_{1,\alpha}$. Déterminer la loi de Y .

104. **Loi de Weibull** [Ghorba70] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi de Weibull** de paramètres (a, b) ($a > 0$, $b > 0$), si la densité de la loi de X est définie par :

$$f_X(x) = abx^{b-1} \exp(-ax^b) \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$$

- (a) Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X . En déduire $q(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$.
 (b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}(X^k)$.
 (c) Déterminer la loi de $Y = X^b$.

105. **Loi du chi-deux** [Ghorba66] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi du chi-deux** à m degrés de liberté ($m \in \mathbb{N}^*$), notée χ_m^2 , ou $\chi^2(m)$ si une densité de X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$$

Soit X une variable aléatoire réelle de loi χ_m^2 .

- (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}(X^k)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
 (b) Déterminer la loi de $U = \sqrt{2X}$.
 (c) Déterminer la loi de $V = \left(\frac{X}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$.

106. **Mode de $\chi^2(1)$** [QuebecEx17.302] Soit $X \hookrightarrow \chi^2(1)$, X possède-t-elle un mode ?

107. **Loi de Student** [Ghorba67] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi de Student** à m degrés de liberté ($m \in \mathbb{N}^*$), notée T_m , si la densité de la loi de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{m} \beta\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}$$

où β désigne la fonction bêta.

Pour quelles valeurs de m , $\mathbb{V}(X) < \infty$?

108. **Loi de Fisher** [Ghorba68] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi de Fisher** de paramètres (m, n) ($m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$), notée $F_{m,n}$, si la densité de la loi de X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$$

où β désigne la fonction bêta.

- (a) Pour quelles valeurs de m et de n , $\mathbb{E}(X) < \infty$ et $\mathbb{V}(X) < \infty$?

(b) Déterminer la loi de $U = \frac{1}{X}$.

109. **Loi de Laplace ou exponentielle symétrique** [III.2] Soit Y une VAR de loi exponentielle $\lambda > 0$ et ε une VARD indépendante de Y et telle que $\mathbf{P}([\varepsilon = 1]) = \mathbf{P}([\varepsilon = -1]) = \frac{1}{2}$. Quelle est la loi de $Z = \varepsilon Y$? (Cette loi est appelée **exponentielle symétrique**).

110. **Loi gamma** [Ghorba62] On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi gamma** de paramètres (a, b) ($a > 0, b > 0$), notée $\Gamma(b, t)$, si la densité de X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{b^t \Gamma(t)} x^{t-1} e^{-\frac{x}{b}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$$

où Γ désigne la fonction gamma.

(a) Pour $\alpha > 0$, déterminer la loi de $T_1 = \alpha X$.

(b) Déterminer la loi de $T_2 = \frac{1}{X}$.

(c) Pour quelles valeurs de α , l'espérance et la variance de T_2 existent ?

111. **Partie décimale d'un réel** [MazliakD.13.71] Soit $f(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$.

(a) Montrer que f est une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire de loi admettant la densité f .

On note $[a]$ la partie entière du réel a . Déterminer la loi de $\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$.

112. **Densité de probabilité** [AgregFoata7.140] Soient $n \geq 2$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite de n variables aléatoires indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit f_n la densité de la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Pour tout x réel, on pose $(x)^+ = \max(0, x)$. Montrer que f_n est donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{((x-k)^+)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

113. **Loi de Cauchy et médiane** [GUEII.28] Soit X_1, X_2, X_3 indépendantes, de même loi, ayant comme densité f :

$$f : x \mapsto \frac{1}{a} \frac{1}{1+(x-a)^2} \quad (\text{où } a \in \mathbb{R})$$

Déterminer la loi de la variable Y médiane de X_1, X_2, X_3 ($Y(\omega)$ étant égal à la valeur prise dans $\{X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)\}$ qui est comprise entre les deux autres).

114. **Loi d'une variable fonction d'une autre** [GUABCPSTCours54.266] Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $U_k = \inf(X_1, \dots, X_k)$. Déterminer la loi de U_k .

(b) Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit N une variable sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante des diverses variables X_i . On définit la variable V par :

$$V = \begin{cases} X_1 & \text{si } N = 0 \\ \inf(X_1, \dots, X_N) & \text{si } N \neq 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de V .

115. **Divers moments** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^4)$, $\mathbb{E}(|X|)$ et $\mathbb{E}(|X^3|)$.

116. **Théorème de transfert** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer les moments de e^X .

117. **Théorème de transfert** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $\mathbb{E}(\exp(aX^2 + bX))$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{a^2}{2}X^2\right)\right) = \mathbb{E}(\exp aXX')$ avec X et X' iid.
118. **Divers moments** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- Quelle est la loi de $\frac{X-m}{\sigma}$? Calculer $\mathbb{E}(|X-m|)$.
 - Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \exp\left(\lambda m + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)$. Calculer $\mathbb{E}(Xe^{\lambda X})$.
 - Soit $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Calculer, dans le cas $m=0$ et $\sigma=1$ la valeur de $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X \leq b} e^{\lambda X})$ en fonction de Φ, λ, b .
 - Calculer $\mathbb{E}(\exp(\lambda X^2 + \mu X))$ pour $1 - 2\lambda\sigma^2 \geq 0$.
 - Montrer que $\mathbb{E}(e^{\theta X} f(X)) = e^{m\theta + \sigma^2\theta^2/2} \mathbb{E}(f(X + \theta\sigma^2))$ pour f continue bornée.
 - Montrer que si f est "régulière" $\mathbb{E}(f(X)(X-m)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(X))$.
119. **Moments d'une variable normale centrée réduite** [Quebec136.418] Trouver les moments de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
120. **Convergence en moyenne quadratique** [Ghorba75]

On dit qu'une suite de VAR (X_n) **converge en moyenne quadratique** vers X si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

On notera : $(X_n) \xrightarrow{\text{mq}} X$.

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $]0, 1[$ et N le nombre aléatoire de ces variables qui prennent une valeur dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{n\lambda}\right[$ où $\lambda > 0$.

- Calculer $p_n = \mathbf{P}([N = 0])$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
 - Déterminer la loi de N .
 - Montrer que N converge en loi vers une variable aléatoire Z que l'on précisera.
121. **Convergence en loi** [Ghorba81] Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires positives et indépendantes suivant la même loi de fonction de répartition F et de densité f vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$ ($\lambda > 0$). On pose $U_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Montrer que la suite (nU_n) converge en loi vers une variable U dont on précisera la loi.
122. **Miscellaneous** [Ghorba83] On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = C(\theta - x)^\alpha \mathbf{1}_{[0, \theta]}(x) \quad \text{où } \theta > 0, \alpha > 0, C \in \mathbb{R}$$

- Déterminer la constante de normalisation C de sorte que f soit une densité de probabilité sur \mathbb{R} .
- Soit X une variable aléatoire dont la loi admet f comme densité. Déterminer F la fonction de répartition de la loi de X .
- Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X . On pose:

$$U_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad V_n = -n^\gamma \ln\left(\frac{U_n}{\theta}\right)$$

$$\text{où } \gamma = \frac{1}{1 + \alpha}.$$

- Exprimer F_{U_n} la fonction de répartition de U_n en fonction de F .

(e) Montrer que l'on a :

$$\mu_n = \mathbb{E}(U_n) = \theta(1 - a_n)$$

où a_n est une suite de réels qu'on déterminera. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

(f) Montrer que U_n converge en moyenne quadratique vers θ .

(g) Pour $\eta > 0$ donné, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([V_n > \eta])$.

On rappelle que : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

123. **Différents types de convergences**[Ghorba84] Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de densité f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} g\left(\frac{x}{\theta}\right) \mathbf{1}_{[0, \theta]}(x)$$

où $\theta > 0$ et g est une densité de probabilités sur $[0, 1]$. On pose :

$$U_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad T_n = n \left(1 - \frac{U_n}{\theta}\right) \quad V_n = \sqrt{n} \left(1 - \frac{U_n}{\theta}\right)$$

(a) Montrer que l'on a :

$$\mu_n = \mathbb{E}(U_n) = \theta(1 - a_n)$$

où a_n est une suite de réels qu'on déterminera. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

(b) Montrer que U_n converge en moyenne quadratique vers θ .

(c) Montrer que si $g(1) \neq 0$, alors T_n converge en loi vers une variable aléatoire T que l'on précisera.

(d) Montrer que si $g(1) = 0$ et $g'(1) < 0$, alors V_n converge en loi vers une variable aléatoire V que l'on précisera.

124. **TCL**[Ghorba87] Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{\theta^k}{(1 + \theta)^{k+1}}$$

où $\theta > 0$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

(a) Déterminer G_{S_n} la fonction génératrice de S_n . En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

(b) Déterminer la loi de S_n .

(c) En utilisant le théorème de la limite centrée, trouver la valeur de :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{k} \frac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}}$$

On rappelle que : $\forall n \geq 1$ et $\forall a \in]-1, 1[$: $\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i+m-1}{i} a^i = \frac{1}{(1-a)^m}$.

125. **Convergence en loi**[V.3] Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$, où $\theta > 0$. On pose pour $n \geq 1$, $X_n = \max(U_i)_{1 \leq i \leq n}$. Etudier la convergence en loi de la suite $(n(\theta - X_n))_{n \geq 1}$.

126. **Convergence en probabilité**[V.4] Soient X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi que X .

(a) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > k]) = \mathbb{E}(X)$$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable $Y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\left[\frac{X_n}{n} > \frac{1}{m}\right]}$ est finie p.s.

- (c) Montrer que $\frac{1}{n} \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tend en probabilité vers 0.

Indication : on admettra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{[X > n\varepsilon]}) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X \mathbf{1}_{[X > n\varepsilon]}\right) = 0$.

127. **Convergence en probabilité** [Lapresté4.5.96] Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$ telle que :

$$\mathbf{P}([X \geq a]) = a^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

- (a) Calculer la densité de la variable aléatoire $Y = \ln X$.
 (b) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X .

Soit $T_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}}$. Calculer la limite en probabilité de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$.

128. **Convergence en probabilité** [MazliakC.9.57] Soit (A_i) une suite d'événements indépendants.

On pose $p_n = \mathbf{P}(A_n)$ et $m_n = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}$. Soit enfin $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$.

Montrer que $\left|\frac{N_n}{n} - m_n\right|$ converge en probabilité vers 0.

129. **Convergence en loi** [BCPST166]

- (a) Soit X_n une variable discrète de loi uniforme sur $\left\{0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, a\right\}$. Montrer la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi.

- (b) Soit X une variable à densité et $X_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$, $n \geq 1$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi.

- (c) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}(X_n) = m$ et $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$. On pose

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

- i. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([Z_n \leq x]) = \begin{cases} 0 & x < m \\ \frac{1}{2} & x = m \\ 1 & x > m \end{cases}$.

- ii. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi.

130. **Convergence en loi** X_n est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} , de densité $f_n : x \mapsto \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$.
 Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

131. **Convergence en probabilité** [GUEI.83] Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi uniforme sur :

$$\left\{ \frac{2k\pi}{6} \mid k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket \right\}$$

Etudier la convergence en probabilité de la suite de variables $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ où $S_n = \sum_{i=1}^n \cos Y_i$.

132. **Taille d'un échantillon** [Limnios7.1.331] On sait qu'un parti politique recueille en général entre 20 et 30% des voix aux élections législatives. Quel est le nombre n de personnes à interroger lors d'un sondage pour estimer p avec une précision supérieure à 3% avec une probabilité d'erreur inférieure à 10%.

- (a) En utilisant l'IBT.
 (b) En utilisant le TCL.

133. **Estimation de la taille d'une population** [Limnios7.2.332] Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire n boules avec remise en notant leur numéro. Soit X le plus grand des numéros tirés.

- (a) Déterminer $\mathbf{P}([X \leq k])$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de X et une expression de son espérance.
- (b) Donner une approximation de cette espérance lorsque N est grand à l'aide de sommes de Riemann.

134. **Intervalle de confiance d'une proportion** [Limnios7.9.342] Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, p)$, avec $0 < p < 1$.

- (a) _
 - i. On a observé un 5-échantillon de la loi de X . Les valeurs obtenues sont : 4,4,3,8,10. Quelle est la probabilité d'obtenir ces valeurs dans un ordre quelconque ?
 - ii. Déterminer la valeur p_0 qui rend cette probabilité maximale ? Quelle est la relation entre cette valeur et la moyenne des observations ?
- (b) Soit \bar{X}_n la moyenne empirique du 5-échantillon.
 - i. Quelle est la loi lorsque n est grand ?
 - ii. Donner une borne pour $p(1-p)$ lorsque $0 < p < 1$. En déduire un intervalle de confiance I_α pour p au niveau α .
 - iii. Donner un estimateur de $p(1-p)$ fonction de X_n . En déduire un intervalle de confiance pour p au niveau α .



Index thématique des exercices

- analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée, 24
- antirépartition du min d'un couple géométrique, 15
- application de la sous-additivité, 9
- approximations, 22
- autour de la formule du crible, 10
- calcul d'un produit à deux indices, 4
- calcul de produits, 4
- calcul de sommes doubles finies, 4
- calcul de sommes simples finies, 2
- changement de variable affine, 19
- changement de variable exponentiel, 19
- changement de variable puissance, 19
- changement polynomial, 19
- coefficient de corrélation, 15, 17, 42
- constante de normalisation, 48
- constante de normalisation - changement de variable, 48
- construction de p-listes sous contraintes, 6
- convergence de séries, 36
- convergence en loi, 22, 52–54
- Convergence en moyenne quadratique, 52
- convergence en probabilité, 22, 23, 53, 54
- convergence en probabilité d'une suite de variables suivant une loi bêta, 23
- convolution, 35
- couple aléatoire discret, 43
- covariance, 42, 43
- covariance et inégalité, 17
- densité de probabilité, 19, 51
- densité paramétrée et changement de variable quadratique, 19
- des "sommes orphelines", 3
- des équipes de foot, 6
- différents types de convergences, 53
- divers moments, 51, 52
- ensemble des parties d'un ensemble, 5
- ensembles égaux, 5
- espérance et antirépartition, 13
- espérance et variance d'une somme de variables iid, 43
- espérance totale, 16
- estimation de la taille d'une population, 54
- estimation ponctuelle, 25, 26
- estimation ponctuelle et par intervalle, 25, 26
- estimation ponctuelle et risque quadratique, 25
- fonction de répartition, 37
- fonction de répartition et calcul de probabilités, 19
- fonction génératrice, 45–47
- fonction génératrice et loi de probabilité, 47
- fonction génératrice et moments, 47
- fonction indicatrice, 5
- fractions rationnelles et télescopage, 2, 3
- IBT, 12, 43, 44
- inégalité de Chernoff, 44
- inégalité de Kolmogorov, 45
- inégalité probabiliste, 8, 12, 15, 36, 44, 45
- inégalité probabiliste de Laplace, 12
- inégalités de Bonferroni, 8
- inégalités probabilistes, 8, 36
- indépendance mutuelle, 11
- Indice aléatoire, 37
- intégration et sommation, 35
- intervalle de confiance d'une proportion, 55
- jeu de cartes, 6
- jeu de dés, 10
- jeu de pile ou face, 10, 11
- la formule de Poincaré "customisée", 9
- la formule du triangle de Pascal généralisée, 3
- la somme des cubes, 2
- langage ensembliste-langage probabiliste, 8
- le calcul différentiel au secours d'une sommation, 3
- le jeu de Pierre et Marie, 14
- le lemme de Borel-Cantelli, 9
- le problème des anagrammes, 6
- le théorème de Bayes, 10
- loi bêta, 48
- loi bêta de deuxième espèce, 49
- loi conditionnelle et loi de Poisson, 16
- loi conditionnelle et loi inconditionnelle : relativisation, 16
- loi conjointe, indépendance, 15
- loi conjointe, lois marginales, indépendance, 15
- loi d'un couple, covariance, 15
- loi d'un couple, loi marginale, loi d'une différence, 18
- loi d'un quotient de variables indépendantes, 17
- loi d'un vecteur, lois marginales, loi d'une somme, loi d'un produit, 16
- loi d'une somme, 15
- loi d'une somme et variables indépendantes, 15
- loi d'une somme, loi de max, loi de min, 17
- loi d'une variable fonction d'une autre, 12, 13, 51
- loi de Cauchy et médiane, 51
- loi de couples, 42
- loi de $F(X)$, 48
- loi de Fisher, 50
- loi de Laplace ou exponentielle symétrique, 51
- loi de max, loi de min et fonction de répartition, 17
- loi de Pareto, 49
- loi de Pascal, loi binomiale négative, 14
- loi de Student, 50
- loi de succession de Laplace, 36
- loi de Weibull, 50
- loi du chi-deux, 50
- loi du min d'un couple aléatoire, 17
- loi du plus grand des numéros, 14

- loi du plus grand et du plus petit des numéros tirés, 14
- loi et antirépartition, 13
- loi et série logarithmique, 12
- loi géométrique sur \mathbb{IN} , loi géométrique sur \mathbb{IN}^* , 14
- loi gamma, 20, 51
- loi gamma et loi de Poisson, 20
- loi log-normale, 21
- loi triangulaire, 48
- loi zeta et loi de Pareto, 49
- lois conditionnelles, 42

- médiane, 45
- majoration d'une probabilité, 9
- manipulations de probabilités, 8
- miscellaneous, 47, 52
- mode d'une chi-deux à un ddl, 50
- mode(s) d'une distribution, 13
- moment factoriel d'ordre r d'une variable de Poisson, 12
- moment factoriel d'ordre r d'une variable géométrique sur \mathbb{IN} , 12
- moments d'une variable normale centrée réduite, 52

- négligeabilité, 43
- négligeabilité événementielle et indépendance, 36

- on passe tout au crible !, 6
- opération I, 5

- partie décimale d'un réel, 51
- partitions, 7
- partitions par paires et tournoi de tennis, 6
- points fixes, 7
- première valeur record, 48
- produit d'une variable normale et d'une variable à deux états, covariance, 20

- réunion d'ensembles, 7
- rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore, 14
- recherche d'un paramètre, 12, 19
- recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence, 12
- recherche d'une loi à partir d'une relation probabiliste, 12
- recherche de loi, 37–41
- recherche de loi et espérance, 42

- simplification d'expressions ensemblistes, 5
- sommation, 35
- somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi : formule de Waldt, 18
- somme de variables de Poisson indépendantes, 15
- sommes de produits de coefficients binomiaux, 4

- taille d'un échantillon, 54
- TCL, 53
- théorème de transfert, 13, 51, 52
- tirages dans une urne bicolore, 10
- tirages sans remise, 14
- tirages simultanés, 14
- transformation de Laplace, 48

- une autre forme de la loi faible des grands nombres, 23
- une chaîne de Markov, 9
- une condition nécessaire et suffisante, 5
- une inégalité, 44, 45
- une inégalité probabiliste, 13
- urne de Pôlya, 10

- valeur absolue d'une variable à densité, 19
- variable à densité et antirépartition, 20
- variable à densité et partie entière, 20
- variable fonction d'autres, 16
- variable fonction d'une autre, 41, 42
- variable presque sûrement nulle, 43
- variables à densité, 43
- variables presque sûrement égales, 24
- vecteur aléatoire à densité, 20
- vecteur aléatoire exponentiel, 20