

Correction des exercices de la fiche 1

Exercice 1

Refermer les sommes suivantes :

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{\substack{i \in [1, n] \\ i \neq j}} 1 = \begin{cases} n & \text{si } j \notin [1, n] \\ n - 1 & \text{si } j \in [1, n] \end{cases}$$

(b) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$

$$\sum_{k=p}^n a = (n - p + 1) a$$

(c) Pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$

$$\sum_{k=p}^n k = \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}$$

Exercice 2

Déterminons une fonction polynômiale $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ de degré 4 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $P(x) - P(x-1) = x^3$.

$$\begin{aligned} P(x) - P(x-1) = x^3 &\iff ax^4 + bx^3 + cx^2 - a(x-1)^4 - b(x-1)^3 - c(x-1)^2 = x^3 \\ &\iff 4ax^3 + (3b-6a)x^2 + (4a-3b+2c)x + b-a-c = x^3 \end{aligned}$$

Par identification membre à membre, nous obtenons le système

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 3b - 6a = 0 \\ 4a - 3b + 2c = 0 \\ b - a - c = 0 \end{cases}$$

dont la solution est $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n P(k) - \sum_{k=1}^n P(k-1) \\ &= P(n) - P(0) \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

soit donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Exercice 3

(Somme et fraction rationnelle)

(a) Déterminons deux réels a et b tels que pour tout x réel strictement positif, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

La **méthode des pôles**¹ nous donne

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

¹Expliquée en classe.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S(n) = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$. $S(n)$ s'écrit à l'aide du symbole sigma

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \boxed{\frac{n}{n+1}} \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = 1}$$

car $S(n)$ se comporte au voisinage de l'infini comme le rapport des termes de plus haut degré.

Exercice 4

Démontrons que, pour tout entier non nul n , on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Il y a deux méthodes pour répondre à cette question. La première : vous profitez du fait que l'on vous donne l'expression réfermée pour effectuer une récurrence standard². La deuxième : vous utilisez la méthode des pôles extrêmement pratique mais *hors programme* en écrivant que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle donne $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$ en notant que la somme des coefficients des éléments simple est nulle ce qui est de très bonne augure pour effectuer du télescopage.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \text{ par télescopage} \\ &= \boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

Exercice 5

(Formule du triangle de Pascal généralisée)

(a) Notons pour $n \geq p$, \mathcal{P}_n :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{k}{p} + \dots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

²Que je vous laisse faire.

- *Initialisation* : \mathcal{P}_p est vérifiée car $\binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$.
- *Hypothèse de récurrence* : supposons que pour n fixé dans \mathbb{N}_p , \mathcal{P}_n soit vérifiée.
- *Transmissibilité* : nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ et selon le premier principe de récurrence³

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est vraie } \forall n \in \mathbb{N}_p}$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n &= 2 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \\ &= 2 \binom{n+1}{3} \text{ par "TPG"} \\ &= 2 \frac{(n-1)n(n+1)}{3!} \\ &= \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}} \end{aligned}$$

(c) Si $n \geq 3$, de la même manière

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + (n-2)(n-1)n &= 3! \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} \\ &= 3! \binom{n+1}{4} \text{ par "TPG"} \\ &= \boxed{\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}} \end{aligned}$$

Exercice 6

(Somme et dérivée)

(a) Comme $x \neq 1$ nous reconnaissons une somme géométrique de raison x , d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \\ &= \sum_{k=0}^n x^k \\ &= \boxed{\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}} \end{aligned}$$

Un calcul simple de dérivation donne

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, f'(x) &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx - (n+1)}{(1-x)^2} x^n} \end{aligned}$$

³Ou récurrence standart.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \boxed{2 - \frac{(n+2)}{2^n}} \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = 2}$$

car

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)}{2^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) \exp(-n \ln 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par le *théorème des croissances comparées exponentielle-puissance*⁴

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, la formule du binôme donne

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \end{aligned}$$

Par intégration entre 0 et 1 membre à membre nous obtenons que

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 x^k dx \quad (\text{par linéarité de l'intégration})$$

soit

$$\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$$

donc

$$\boxed{\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}}$$

Remarque : le résultat précédent se retrouve en écrivant que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

soit

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$$

⁴ Apprenez par coeur que $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha e^{-\beta n} = 0$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \text{ par décalage d'indice} \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \right) \\
 &= \boxed{\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}}
 \end{aligned}$$

Exercice 8
(Sommaton et intégrale)

(a) Par le binôme de Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

(b) Nous avons

$$\int_0^{-1} f(x) dx = \int_0^{-1} (1+x)^n dx \tag{1}$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{-1} \tag{2}$$

$$= \frac{-1}{n+1} \tag{3}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^{-1} x^k dx \tag{4}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} \tag{5}$$

Conclusion :selon (3) et (5)

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{-1}{n+1}$$

Remarque : à l'instar de l'exercice 7 nous pourrions aussi écrire que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \text{ par décalage d'indice} \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k}}_{=0 \text{ par "BN"}} - 1 \right) \\
 &= \boxed{\frac{-1}{n+1}}
 \end{aligned}$$

(c) f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

Alors en posant $x = 1$ nous obtenons

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}}$$

Et en posant $x = \frac{1}{2}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} n \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

soit donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \binom{n}{k} = \frac{n}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

Exercice 9

("Sommés orphelines")

(a) Soient $p = 2k$ un entier pair et $i = 2k + 1$ un entier impair.

- $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = \lfloor k \rfloor = \boxed{k}$ car $k \in \mathbb{N}$.
- $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor = \boxed{k}$ car $\frac{1}{2} \in]0; 1[$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la formule du binôme

$$\begin{aligned}
 X &= (1+1)^n \\
 &= 2^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\
 \text{et } Y &= (1-1)^n \\
 &= 0 \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\
 \text{donc } X+Y &= 2^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \underbrace{(1 + (-1)^{2k})}_{=2} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \underbrace{(1 + (-1)^{2k+1})}_{=0} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \\
 \text{et } X-Y &= 2^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - (-1)^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \underbrace{(1 - (-1)^{2k})}_{=0} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \underbrace{(1 - (-1)^{2k+1})}_{=2} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}
 \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}}$$

Exercice 10
(Un faux air de Vandermonde)

(a) Pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^p \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\
 &= \sum_{k=0}^p \frac{n!}{k!} \times \frac{1}{(p-k)!(n-p)!} \\
 &= \sum_{k=0}^p \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{(p-k)!k!} \\
 &= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \\
 &= \boxed{\binom{n}{p} 2^p} \text{ selon la formule du binôme de Newton}
 \end{aligned}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \text{ par changement décroissant d'indice} \\
 &= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}
 \end{aligned}$$

Exercice 11 (Somme double)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}_2$. La vérification de l'égalité $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ est très simple à effectuer en utilisant

la formule du triangle de Pascal généralisée vue dans l'exercice 5. D'où

$$\begin{aligned}
 U_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{j(j+1)}{2} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{j+1}{2} \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{j}{2} \text{ de premier terme nul} \\
 &= \sum_{j=2}^{n+1} \binom{j}{2} \\
 &= \boxed{\binom{n+2}{3}} \\
 \text{et } V_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j j \\
 &= \sum_{j=0}^n j(j+1) \\
 &= 2U_n \\
 &= \boxed{2\binom{n+2}{3}}
 \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j} \text{ par inversion de l'ordre des sommations} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j 1 \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{j}{j} \\
 &= \boxed{n}
 \end{aligned}$$

(c) Pour n et m deux entiers naturels non nuls

$$\begin{aligned}
 S_{n,m} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n 2^{i+j} \\
 &= \sum_{i=0}^m \left(2^i \sum_{j=1}^n 2^j \right) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^m 2^i \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) \\
 &= 2(2^n - 1) \sum_{i=0}^m 2^i \\
 &= \boxed{2(2^n - 1)(2^{m+1} - 1)} \\
 \text{et } T_{n,m} &= \sum_{i=0}^n \sum_{i=j}^n 2^{i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n 2^i \sum_{j=0}^i \left(\frac{1}{2} \right)^j \\
 &= \sum_{i=0}^n 2^i \left(2 - \frac{1}{2^i} \right) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^n 2^i - \sum_{i=0}^n 1 \\
 &= 2(2^{n+1} - 1) - (n + 1) \\
 &= \boxed{2^{n+2} - n - 3}
 \end{aligned}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{k}{j} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j-1} k \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{j(j-1)}{2j} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j-1) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} j \\
 &= \boxed{\frac{n(n-1)}{4}}
 \end{aligned}$$

Exercice 12(max – min) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} i \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i \\
&= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=2}^n i(i-1) \\
&= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=1}^n i(i-1) \text{ car le premier terme de la deuxième est nul} \\
&= 2 \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{i=1}^n i \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } B_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \min(i, j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} j \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{i^2}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n i^2 - 1 \\
&= \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

Remarque : nous aurions pu éviter d'effectuer un des deux calculs en constatant que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \max(i, j) + \min(i, j) = i + j$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} (i+j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j \\
 &= 2n \sum_{i=1}^n i \\
 &= n^2 (n+1)
 \end{aligned}$$

Exercice 13
(Produit)

(a) Pour $n \in \mathbb{N}_2$,

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} \\
 &= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\
 &= \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}\right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \text{ par télescopes} \\
 &= \boxed{\frac{n+1}{2n}}
 \end{aligned}$$

(b.i.) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 V_n &= \prod_{k=1}^n \alpha^k \\
 &= (\alpha)^{\sum_{k=1}^n k} \\
 &= \boxed{\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}}
 \end{aligned}$$

(b.ii) Nous avons

$$\begin{aligned}
 W_n &= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^2}{k} \\
 &= \frac{\alpha^{2n}}{\prod_{k=1}^n k} \\
 &= \boxed{\frac{\alpha^{2n}}{n!}}
 \end{aligned}$$

(b.iii) Nous avons

$$\begin{aligned}
 Z_n &= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha}{k^2} \\
 &= \frac{\alpha^n}{\left(\prod_{k=1}^n k\right)^2} \\
 &= \boxed{\frac{\alpha^n}{(n!)^2}}
 \end{aligned}$$

Exercice 14
(Produit à deux indices)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $P_n = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$. en posant

$$Q_n = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij \quad R_n = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad \text{et} \quad S_n = \prod_{1 \leq i=j \leq n} ij$$

Nous avons clairement

$$P_n = Q_n \quad \text{et} \quad R_n = \frac{P_n Q_n}{S_n} = \frac{P_n^2}{S_n}$$

avec

$$\begin{aligned} S_n &= \prod_{1 \leq i \leq n} i^2 \\ &= \left(\prod_{1 \leq i \leq n} i \right)^2 \\ &= (n!)^2 \\ \text{et } R_n &= \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq n} ij \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} \left(i^n \prod_{1 \leq j \leq n} j \right) \\ &= (n!)^n \prod_{1 \leq i \leq n} i^n \\ &= (n!)^n \left(\prod_{1 \leq i \leq n} i \right)^n \\ &= (n!)^n (n!)^n \\ &= (n!)^{2n} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} P_n &= \sqrt{S_n R_n} \\ &= \sqrt{(n!)^{2n+2}} \\ &= \boxed{(n!)^{n+1}} \end{aligned}$$

