

Correction des exercices de la fiche 2

Exercice 1

Soient E et F deux ensembles.

(a) Prouvons que $(E \subset F) \iff (\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F))$

- (\implies) Par hypothèse $E \subset F$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ donc $X \subset E$ et par hypothèse $X \subset F$ donc $X \in \mathcal{P}(F)$. Comme ceci est vrai pour tout élément X de $\mathcal{P}(E)$ alors $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ (i).
- (\impliedby) Par hypothèse $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$. Soit $X \subset E$ alors $X \in \mathcal{P}(E)$ et par hypothèse $X \in \mathcal{P}(F)$. Comme ceci est vrai pour toute partie X de E alors $E \subset F$ (ii).

Conclusion : Selon (i) et (ii) l'équivalence est démontrée.

(b) Soit $X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, alors $X \in \mathcal{P}(E)$ ou $X \in \mathcal{P}(F)$, donc $X \subset E$ ou $X \subset F$, donc $X \subset E \cup F$, donc $X \in \mathcal{P}(E \cup F)$.

Pour avoir l'égalité il suffirait de voir si $\mathcal{P}(E \cup F) \subset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, or prenons le contre-exemple $E = \{1, 2\}$ et $F = \{3, 4\}$ alors $E \cup F = \{1, 2, 3, 4\}$. Maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &= \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\} \\ \mathcal{P}(F) &= \{\emptyset; \{3\}; \{4\}; \{3, 4\}\} \\ \text{et } \mathcal{P}(E \cup F) &= \left\{ \begin{array}{l} \emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \\ \{3, 4\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{1, 3, 4\}; \{2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

or par exemple $\{2, 3\} \notin \mathcal{P}(E)$ et $\{2, 3\} \notin \mathcal{P}(F)$ donc $\{2, 3\} \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ alors que $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(E \cup F)$.

Donc en général $\mathcal{P}(E \cup F) \not\subset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ et ainsi on ne peut avoir l'égalité.

Remarque : si $E \subset F$ alors $E \cup F = F$ donc $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(F)$ (iii) et comme selon la première question $(E \subset F) \iff (\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F))$ alors dans ce cas $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(F)$ (iv). (iii) (iv) entraînent alors l'égalité.

Exercice 2

Soit E un ensemble, et A et B des sous-ensembles de E . Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $A = B$ est que $A \cup B = A \cap B$.

Rappelons que la démonstration d'une condition nécessaire et suffisante entre deux assertions est la démonstration qu'elles sont équivalentes entre elles. Expliquons pourquoi à travers un exemple simple. Quand on écrit l'équivalence $(x^2 - 2x + 1 = 0) \iff (x = 1)$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ est une CONDITION SUFFISANTE pour obtenir $x = 1$ mais pas obligatoire, car par exemple l'équation $\ln x = 0$ nous donnerait aussi la solution $x = 1$. En revanche, et c'est la réciproque l'assertion $x = 1$ est une CONDITION NÉCESSAIRE à la réalisation de l'égalité $x^2 - 2x + 1 = 0$ (E) car si prenions une autre valeur pour x (E) ne serait pas réalisé. En conclusion dans l'équivalence $\mathfrak{P} \iff \mathfrak{Q}$, \mathfrak{P} est une condition suffisante de \mathfrak{Q} alors que \mathfrak{Q} est une condition nécessaire de \mathfrak{P} .

Tout ceci à une conséquence très importante dans la façon de vous exprimer à l'oral ou à l'écrit. prenons un oral d'HEC où après avoir démontré un encadrement vérifié par une suite convergente

S_n de limite S : $0 \leq S - S_n \leq e^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^\pi}$ on devait déterminer une valeur approchée de S à

10^{-3} près. Pour cela IL SUFFISAIT de déterminer n tel que $e^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^\pi} \leq 10^{-3}$ car la transitivité de la relation d'ordre \leq entraînait que $0 \leq S - S_n \leq 10^{-3}$, ce qui se traduit par l'implication

$$\underbrace{\left(e^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^\pi} \leq 10^{-3} \right)}_{\text{Condition suffisante}} \implies (0 \leq S - S_n \leq 10^{-3}).$$

Revenons à notre exercice où l'équivalence à montrer est

$$(A = B) \iff (A \cup B = A \cap B)$$

- (\implies) Supposons que $A = B$. Alors $A \cup B = A = A \cap B$ et le tour est joué !

- (\Leftarrow) Supposons que $A \cup B = A \cap B$. Soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et par hypothèse $x \in A \cap B$ donc $x \in B$ par définition de l'intersection. Comme ceci est vrai pour tout élément x de A alors $A \subset B$. L'autre inclusion $B \subset A$ étant immédiate puisque les ensembles A et B jouent un rôle symétrique, la double-inclusion donne que $A = B$ et la réciproque (condition nécessaire) est vérifiée.

Exercice 3

Soient E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E . Montrons l'implication

$$(A \cup B = A \cap C \text{ (i)}, B \cup C = B \cap A \text{ (ii)} \text{ et } C \cup A = C \cap B \text{ (iii)}) \implies (A = B = C)$$

Nous avons pour cela quatre inclusions à démontrer : $A \subset B$ et $B \subset A$ d'une part et $B \subset C$ et $C \subset B$ d'autre part.

- Soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in C$ selon (i) donc $x \in B \cup C$ donc $x \in B$ selon (ii). Comme ceci est vrai pour tout élément x de A alors $A \subset B$.
- Soit $x \in B$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in C$ selon (i) donc $x \in B \cup C$ donc $x \in A$ selon (ii). Comme ceci est vrai pour tout élément x de B alors $B \subset A$.
- Soit $x \in B$ alors $x \in B \cup C$ donc $x \in A$ selon (ii) donc $x \in A \cup C$ donc $x \in C$ selon (iii). Comme ceci est vrai pour tout élément x de B alors $B \subset C$.
- Soit $x \in C$ alors $x \in C \cup A$ donc $x \in B$ selon (iii). Comme ceci est vrai pour tout élément x de C alors $C \subset B$.

Remarque : Voici une deuxième méthode plus rapide :

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = (B \cup C) \cap C = C \\ A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap (C \cup A) = A \\ A \cap B \cap C = B \cap (A \cap C) = B \cap (A \cup B) = B \end{array} \right\} \implies (A = B = C)$$

Exercice 4

Montrons

$$\exists X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup X = B \cup X \text{ et } A \cap X = B \cap X) \implies (A = B)$$

- Soit $x \in A$ alors $x \in A \cup X$ alors $x \in B \cup X$. Deux cas se présentent alors :
 - si $x \in B$ alors l'inclusion $A \subset B$ est directement obtenue.
 - Si $x \in X$ alors $x \in A \cap X$ donc $x \in B \cap X$ donc $x \in B$ et l'inclusion $A \subset B$ est à nouveau obtenue.

Dans tous les cas nous avons montré que $A \subset B$.

- Soit $x \in B$ alors $x \in B \cup X$ alors $x \in A \cup X$. Deux cas se présentent alors :
 - si $x \in A$ alors l'inclusion $B \subset A$ est directement obtenue.
 - Si $x \in X$ alors $x \in B \cap X$ donc $x \in A \cap X$ donc $x \in A$ et l'inclusion $B \subset A$ est à nouveau obtenue.

Dans tous les cas nous avons montré que $B \subset A$.

Exercice 5

Soit E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E .

(a) Pour montrer que $(A \setminus B = A) \iff (B \setminus A = B)$ raisonnons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} (A \setminus B = A) &\iff (A \cap \overline{B} = A) \\ &\iff (A \cap B = \emptyset) \\ &\iff (A \subset \overline{B}) \\ &\iff (B \subset \overline{A}) \text{ par passage au complémentaire} \\ &\iff (B \cap \overline{A} = B) \end{aligned}$$

(b) Prouvons que $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

$$\begin{aligned} (A \cap B) \setminus C &= (A \cap B) \cap \bar{C} \\ &= A \cap \bar{C} \cap B \cap \bar{C} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) \\ &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \end{aligned}$$

(c) Prouvons que $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus C &= (A \cup B) \cap \bar{C} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) \\ &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

(d) Prouvons que $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

- Nous avons

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C &= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \\ &= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A \setminus (B \cup C) \quad (i) \end{aligned}$$

- et

$$\begin{aligned} (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) \\ &= ((A \cap \bar{C}) \cap \bar{B}) \cup \underbrace{(A \cap C \cap \bar{C})}_{=\emptyset} \\ &= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \\ &= A \setminus (B \cup C) \quad (ii) \end{aligned}$$

Selon (i) et (ii) les égalités sont montrées.

Exercice 6

Soient E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E .

(a) Nous avons

$$\begin{aligned} (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) &= \underbrace{(X \cup (X \cap Y))}_{=X} \cap (\bar{Y} \cup (X \cap Y)) \\ &= X \cap (\bar{Y} \cup X) \cap \underbrace{(\bar{Y} \cup Y)}_{=E} \\ &= \boxed{X} \end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) &= (X \cap (X \cup Y)) \cup (\bar{Y} \cap (X \cup Y)) \\ &= X \cup (X \cap \bar{Y}) \\ &= \boxed{X} \end{aligned}$$

(c) Nous avons

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{(X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y})}_{=X} \cup \underbrace{(\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})}_{=\bar{X} \text{ selon 1. appliqué à } \bar{X}} \\ &= \boxed{E} \end{aligned}$$

(d) Nous avons

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{(X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y})}_{=X} \cap \underbrace{(\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})}_{=\bar{X} \text{ selon 2. appliqué à } \bar{X}} \\ &= \boxed{\emptyset} \end{aligned}$$

Exercice 7

Soient E un ensemble. Pour tous les sous-ensembles A et B de E , on pose $A | B = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ par Morgan.

(a) Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A} \cap \bar{A} \\ &= \boxed{A | A} \end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned} (A | A) | (B | B) &= \overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{B \cup A}} \\ &= \boxed{A \cap B} \end{aligned}$$

(c) Nous avons

$$\begin{aligned} A \cup B &= \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \\ &= \overline{A | B} \\ &= \boxed{(A | B) (A | B)} \\ A \setminus B &= A \cap \bar{B} \\ &= (A | A) | (\bar{B} | \bar{B}) \\ &= \boxed{(A | A) | ((B | B) | (B | B))} \\ A \Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= \overline{A \cup B} | A \cap B \\ &= (A | B) | (\bar{A} | \bar{B}) \\ &= \boxed{(A | B) | ((A | A) | (B | B))} \end{aligned}$$

3.a

3.b

3.c

3.d

0.1 4. Simplification d'expressions ■□□□□

1

2

3

4

0.2 5. L'opération " | " ■□□□ □ $\bar{\cup}$

(W11.81)

$$\boxed{1} \quad \boxed{\bar{\cup}}.$$

$$\boxed{2} \quad \cdot.$$

$$\boxed{3} \quad \cdot.$$

• .

0.3 6. Fonction indicatrice ■□□□□

(W25.83) Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E .

1.a Déterminer la fonction indicatrice (ou fonction caractéristique) de l'ensemble $A \setminus B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et de B .

$$\mathbb{I}_{A \setminus B} = \mathbb{I}_{A \cap \bar{B}} = \mathbb{I}_A * \mathbb{I}_{\bar{B}} = \boxed{\mathbb{I}_A (1 - \mathbb{I}_B)}.$$

1.b

$$\mathbb{I}_{A \Delta B} = \mathbb{I}_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} = \mathbb{I}_{A \cup B} (1 - \mathbb{I}_{A \cap B}) = (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) (1 - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) = \boxed{\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B}.$$

2.a.(i).

On rappelle que deux ensembles sont égaux si et seulement si leur fonctions indicatrices sont égales.

Calculons $\mathbb{I}_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} = \mathbb{I}_{A \cup B} (1 - \mathbb{I}_{A \cap B}) = (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) (1 - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) = \mathbb{I}_A - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + (\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B)^2 = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B$. Selon le 1.b l'égalité est $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ prouvée.

2.a.(ii).

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{A \Delta (B \Delta C)} &= \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_{B \Delta C} - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_{B \Delta C} & (1) \\ &= \mathbb{I}_A + (\mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C) - 2\mathbb{I}_A (\mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C) & (2) \\ &= \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_C + 4\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C & (3) \end{aligned}$$

$$\text{et } \mathbb{I}_{(A \Delta B) \Delta C} = \mathbb{I}_{A \Delta B} + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_{A \Delta B} \mathbb{I}_C \quad (4)$$

$$= (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) + \mathbb{I}_C - 2(\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) \mathbb{I}_C \quad (5)$$

$$= \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_C + 4\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \quad (6)$$

Selon () et () $\boxed{A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C}$.

2.a.(iii).

$$\mathbb{I}_{A \cap (B \Delta C)} = \mathbb{I}_A \mathbb{I}_{B \Delta C} \quad (7)$$

$$= \mathbb{I}_A (\mathbb{I}_B + \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_B \mathbb{I}_C) \quad (8)$$

$$= \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \quad (9)$$

$$\text{et } \mathbb{I}_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)} = \mathbb{I}_{A \cap B} + \mathbb{I}_{A \cap C} - 2\mathbb{I}_{A \cap B} \mathbb{I}_{A \cap C} \quad (10)$$

$$= \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \mathbb{I}_C - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \quad (11)$$

Selon () et () $\boxed{A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)}$.

2.b.

$$\bullet A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = A \cap \bar{A} = \boxed{\emptyset}.$$

$$\bullet A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A - \emptyset = A \cap \bar{\emptyset} = A \cap E = \boxed{A}.$$

2.c.

$$\boxed{(A \Delta B = B) \iff (\mathbb{I}_{A \Delta B} = \mathbb{I}_B) \iff (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B = \mathbb{I}_B) \iff (\mathbb{I}_A - 2\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B = 0) \iff (\mathbb{I}_A (1 - 2\mathbb{I}_B) = 0) \iff (\mathbb{I}_A = 0) \iff (A = \emptyset)}$$

