

Correction des exercices de la fiche 5

Première partie : généralités

1 Recherche d'un paramètre

La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ définit une loi de probabilité si et seulement si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0$ ce qui entraîne que $a > 0$
- $\sum p_n$ converge et de somme égale à 1.
Or comme p_n s'écrit comme combinaison linéaire de deux termes généraux de séries proportionnelles à des séries convergentes ($\sum \frac{1}{n!}$ et $\sum \frac{a^n}{n!}$ sont des *séries exponentielles* convergentes). Ainsi $\sum p_n$ converge avec

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p_n &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{8} \left(\frac{2 + a^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \frac{1}{8} \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} \\ &= \frac{1}{4} e + \frac{1}{8} e^a \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} e + \frac{1}{8} e^a &= 1 \\ \Leftrightarrow \boxed{a = \ln(8 - 2e)} \end{aligned}$$

2 Inégalité probabiliste de Laplace¹

Pour commencer montrons que

$$\forall t \geq 0, \mathbf{1}_{[X \leq 0]} \leq e^{-tX} \quad (1)$$

- L'événement $[X \leq 0]$ n'est pas réalisé.
Alors $\mathbf{1}_{[X \leq 0]} = 0$ et comme la fonction exp est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* l'inégalité (*) est bien vérifiée.
- L'événement $[X \leq 0]$ est réalisé.
Alors $\mathbf{1}_{[X \leq 0]} = 1$. D'autre part

$$[X \leq 0] \subset [-tX \geq 0] \subset [e^{-tX} \geq e^0]$$

par *croissance* de exp et (1) est bien vérifiée.

- Comme exp $(-tX)$ possède une espérance, par la *croissance et la linéarité de l'opérateur \mathbb{E}* ² on obtient $\forall t \geq 0, \mathbb{E}(\mathbf{1}_{[X \leq 0]}) \leq \mathbb{E}(\exp(-tX))$, soit par *définition de l'indicatrice* :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \mathbf{P}([X \leq 0]) \leq \mathbb{E}(e^{-tX})}$$

¹Laplace Pierre-Simon (Marquis De) (1749 – 1827)

²Symbole mathématique représentant une ou plusieurs opérations mathématiques à effectuer.

3 Inégalité probabiliste

Pour commencer montrons que

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{1}_{[X-np > \varepsilon]} \leq \exp(\lambda(X - np - \varepsilon)) \quad (2)$$

- L'événement $[X - np > \varepsilon]$ n'est pas réalisé.
Alors $\mathbf{1}_{[X-np > \varepsilon]} = 0$ et comme la fonction \exp est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* l'inégalité (2) est bien vérifiée.
- L'événement $[X - np > \varepsilon]$ est réalisé.
Alors $\mathbf{1}_{[X-np > \varepsilon]} = 1$. D'autre part

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \quad [X - np > \varepsilon] &\subset [X - np - \varepsilon > 0] \\ &\subset [\lambda(X - np - \varepsilon) > 0] \\ &\subset [\exp(\lambda(X - np - \varepsilon)) > e^0] \text{ par croissance de } \exp \\ &\subset [\exp(\lambda(X - np - \varepsilon)) \geq 1] \text{ et (2) est bien vérifiée} \end{aligned}$$

- Nous supposons que la variable $\exp(\lambda(X - np - \varepsilon))$ possède une espérance. Par la *croissance et la linéarité de l'opérateur* \mathbb{E} on obtient

$$\forall (\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbb{E}(\mathbf{1}_{[X-np > \varepsilon]}) \leq \mathbb{E}(\exp(\lambda(X - np - \varepsilon)))$$

soit par *définition de l'indicatrice* :

$$\boxed{\forall (\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbf{P}([X - np > \varepsilon]) \leq \mathbb{E}(\exp(\lambda(X - np - \varepsilon)))}$$

4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Tout d'abord commençons par dire que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$ (car on effectue une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{6}$). Cela nous permet de dire que F_n admet une espérance et une variance et l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* est applicable, ce qui donne

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{V}(F_n)}{\varepsilon^2} \iff 1 - \mathbf{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(F_n)}{\varepsilon^2} \\ &\iff \mathbf{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(F_n)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F_n) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_n) \\ &= \frac{n \cdot 1/6}{n} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(F_n) &= \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(X_n) \\ &= \frac{5n}{36n^2} \\ &= \frac{5}{36n} \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = 0.99$, l'IBT donne

$$\mathbf{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < 0.99\right) \geq 1 - \frac{5}{36n(0.99)^2}$$

Pour trouver n il suffit que n soit tel que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{5}{36n(0.99)^2} &\geq 0.99 \\ \Rightarrow \frac{5}{36n(0.99)^2} &\leq 0.01 \\ \Rightarrow n &\geq \frac{5}{36 \times 0.01 \times (0.99)^2} \\ \Rightarrow n &\geq \left\lceil \frac{5}{36 \times 0.01 \times (0.99)^2} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

5 Moment factoriel d'ordre r d'une variable de Poisson

D'après le cours la variable $X(X-1)\dots(X-r+1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k(k-1)\dots(k-r+1)\mathbf{P}([X=k])$ est convergente et en cas de convergence

$$\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k \geq 0} k(k-1)\dots(k-r+1)\mathbf{P}([X=k])$$

Or

$$\begin{aligned} \forall k \geq \mathbb{N}, \quad k(k-1)\dots(k-r+1)\mathbf{P}([X=k]) &= k(k-1)\dots(k-r+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_r, \quad k(k-1)\dots(k-r+1)\mathbf{P}([X=k]) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-r}\lambda^r}{(k-r)!}. \end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la *série exponentielle* de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Conclusion : X admet un *moment factoriel d'ordre r* égal à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) &= \lambda^r e^{-\lambda} \sum_{k \geq r} \frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} \\ &= \lambda^r e^{-\lambda} \sum_{i \geq 0} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda^r e^{-\lambda} e^\lambda \\ &= \boxed{\lambda^r} \end{aligned}$$

6 Moment factoriel d'ordre r d'une variable géométrique sur \mathbb{N}

D'après le cours la variable $X(X-1)\dots(X-r+1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k(k-1)\dots(k-r+1)\mathbf{P}([X=k])$ est convergente et en cas de convergence

$$\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k \geq 0} k(k-1)\dots(k-r+1)\mathbf{P}([X=k])$$

Or

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, \quad k(k-1)\dots(k-r+1)\mathbf{P}([X=k]) &= k(k-1)\dots(k-r+1)q^k p \\ &= k(k-1)\dots(k-r+1)q^{k-r} p q^r \end{aligned}$$

A ce niveau, je vous garantie la présence de préliminaires qui vous permettrons de conclure que

$$\sum_{n \geq k} A_n^k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

si et seulement si $|x| < 1$ (on parle de **série dérivée d'ordre k de la série géométrie de raison x**).

Ainsi comme $|q| < 1$, nous constatons que nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la *série dérivée d'ordre r de la série géométrie de raison q* .

Conclusion : X admet un moment factoriel d'ordre r égal à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) &= \sum_{k \geq 0} k(k-1)\dots(k-r+1)q^{k-r}pq^r \\ &= \sum_{k \geq r} k(k-1)\dots(k-r+1)q^{k-r}pq^r \\ &= pq^r \sum_{k \geq r} A_k^r q^{k-r} \\ &= pq^r \frac{r!}{(1-q)^{r+1}} \\ &= \boxed{\frac{q^r r!}{p^r}} \end{aligned}$$

7 Loi d'une variable fonction d'une autre

Un petit échauffement pour les premières valeurs entières, comme fait en classe, nous amène à distinguer deux cas de figure :

- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$, l'événement $[X(\omega) = 2k]$ est réalisé si et seulement si

$$\left[4 \left\lfloor \frac{X(\omega)}{2} \right\rfloor - 2X(\omega) + 1 = 4k - 4k + 1 \right] \text{ l'est, soit}$$

l'événement $[X(\omega) = 2k]$ est réalisé si et seulement si $[Y(\omega) = 1]$ est réalisé

- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$, l'événement $[X(\omega) = 2k + 1]$ est réalisé si et seulement si

$$\left[4 \left\lfloor \frac{X(\omega)}{2} \right\rfloor - 2X(\omega) + 1 = 4k - 4k - 2 + 1 \right] \text{ l'est, soit}$$

l'événement $[X(\omega) = 2k + 1]$ est réalisé si et seulement si $[Y(\omega) = -1]$ est réalisé

Moralité $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = -1]) &= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k \geq 0} [X = 2k + 1]\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}([X = 2k + 1]) \text{ par } \sigma\text{-additivité de } \mathbf{P} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = 1]) &= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k \geq 0} [X = 2k]\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}([X = 2k]) \text{ par } \sigma\text{-additivité de } \mathbf{P} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Nous sommes en terrain connu avec des "séries méga-classique à trous" avec

$$\sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = 1$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-2\lambda} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([Y = -1]) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}$$

8 Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence

Des *itérations successives* nous amènent au résultat à démontrer par récurrence

$$\mathbf{P}([X = n]) = \frac{4^n}{n!} \mathbf{P}([X = 0])$$

Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = n+1]) &= \frac{4}{n+1} \mathbf{P}([X = n]) \\ &= \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \mathbf{P}([X = 0]) \quad \text{selon l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

la proposition étant transmissible est donc héréditaire.

Cherchons enfin $\mathbf{P}([X = 0])$. Pour cela $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!} \mathbf{P}([X = 0])$ doit converger et de somme égale à 1. La convergence ne pose aucun problème car le terme général est proportionnel à la *série exponentielle* de paramètre 4. Enfin $\mathbf{P}([X = 0])$ doit vérifier

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!} \mathbf{P}([X = 0]) &= \mathbf{P}([X = 0]) \sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!} \\ &= \mathbf{P}([X = 0]) e^4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que $\mathbf{P}([X = 0]) = e^{-4}$.

Conclusion : d'après le cours

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = n]) = \frac{e^{-4} 4^n}{n!} \quad \text{et donc} \quad X \hookrightarrow \mathcal{P}(4) \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = 4$$

9 Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence

Introduisons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbf{P}([X = n])$ vérifiant $4u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n = 0$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite récurrente d'ordre deux* d'équation caractéristique associée

$$\begin{aligned} 4r^2 - 5r + 1 &= 0 \\ \iff 4(r-1) \left(r - \frac{1}{4} \right) &= 0 \\ \iff r = 1 \quad \text{ou} \quad r = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 1^n + \beta \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

et pour que $\sum u_n$ ait une chance de converger il faut que

$$\alpha + \beta \left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0$$

ce qui entraîne que $\alpha = 0$ puisque $\beta \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow{+\infty} 0$. Dans ce cas la série de terme général $\beta \left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge en tant que série proportionnelle à la *série géométrique* de raison $\frac{1}{4}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \beta \left(\frac{1}{4}\right)^n &= \frac{\beta}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\beta \end{aligned}$$

d'où $\beta = \frac{3}{4}$.

Conclusion : d'après le cours

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = n]) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et donc} \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{3} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{4}{9}$$

10 Recherche d'une loi à partir d'une relation de récurrence

Nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X \geq n]) &= \mathbf{P}([X = n]) + \mathbf{P}([X > n]) \\ \iff \mathbf{P}([X = n]) &= \mathbf{P}([X \geq n]) - \mathbf{P}([X \geq n+1]) \end{aligned} \quad (3)$$

et

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}([X = n]) = p\mathbf{P}([X \geq n]) &\iff \mathbf{P}([X \geq n]) - \mathbf{P}([X \geq n+1]) = p\mathbf{P}([X \geq n]) \\ &\iff \mathbf{P}([X \geq n+1]) = (1-p)\mathbf{P}([X \geq n]) \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\mathbf{P}([X \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $1-p$, donc

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X \geq n]) &= (1-p)^{n-1} \mathbf{P}([X \geq 1]) \\ &= (1-p)^{n-1} \quad (\text{puisque } X(\Omega) = \mathbb{N}^* \implies \mathbf{P}([X \geq 1]) = 1) \end{aligned} \quad (4)$$

Conclusion : (3) et (4) donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = n]) = p(1-p)^{n-1} \quad \text{et} \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

11 Loi et série logarithmique

La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est la loi d'une variable X si et seulement si $\forall n \geq 0, p_n \geq 0$ et la série $\sum_k p_k$ converge et de somme égale à 1.

- $\forall n \geq 0,$

$$\frac{-p^{n+1}}{(n+1) \ln(1-p)} \geq 0 \quad (5)$$

puisque $\ln(1-p) \leq 0$

- Examinons si la série converge. C'est l'occasion d'étudier la *série logarithmique* (totalement hors programme) qui est assez récurrente en probabilités et qu'il est très important d'examiner en détail.

♥ Introduisons $\forall n \geq 0, \forall x \in]0, 1[$

$$\begin{aligned}
 S_n &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)} \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^x t^{k-1} dt \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^x \sum_{k=1}^{n+1} t^{k-1} dt \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^x \sum_{k=0}^n t^k dt \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^x \left[\frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right] dt \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \left(\int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \left([-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \left(-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \right)
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt &\leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x} dt \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{1-t} \text{ est croissante sur } [0, x] \\
 &\leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{n+1} dt \\
 &\leq \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+2}}{n+2}
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+2}}{n+2} = 0$ du fait que $|x| < 1$ alors le *théorème d'encadrement*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = 0$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1-p)} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1-p)}
 \end{aligned}$$

et pour $x = p$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 \tag{6}$$

Moralité : selon (5) et (6) :

la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est la loi d'une variable X

12 Loi d'une variable fonction d'une autre

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impaire} \\ \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est paire} \end{cases}$$

Déterminons la loi de Y son espérance et sa variance.

- Nous avons de toute évidence

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

Selon la formule des probabilités totales associée au système complet d'événement $\{[X \text{ est impaire}], [X \text{ est paire}]\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = 0]) &= \mathbf{P}([Y = 0] \cap [X \text{ est impaire}]) + \mathbf{P}([Y = 0] \cap [X \text{ est paire}]) \\ &= \mathbf{P}\left(\underbrace{[0 = 0]}_{\Omega} \cap [X \text{ est impaire}]\right) + \mathbf{P}([X = 0] \cap [X \text{ est paire}]) \\ &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k \in \mathbb{N}} [X = 2k + 1]\right) + \mathbf{P}([X = 0]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}([X = 2k + 1]) + e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}([Y = k] \cap [X \text{ est impaire}]) + \mathbf{P}([Y = k] \cap [X \text{ est paire}]) \\ &= \mathbf{P}\left(\underbrace{[0 = k]}_{\emptyset} \cap [X \text{ est impaire}]\right) + \mathbf{P}([X = 2k] \cap [X \text{ est paire}]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{2} = k\right] \biguplus \left(\biguplus_{i \in \mathbb{N}} [X = 2i]\right)\right) \\ &= \mathbf{P}([X = 2k]) \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Notons P la somme définie par

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad I = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

C'est à ce moment que nous bénissons le chapitre outils ! En effet

$$\begin{aligned} P + I &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 P - I &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-\lambda)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \\
 &= e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

D'où le système linéaire à résoudre

$$\begin{cases} P = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \\ I = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} \end{cases}$$

Ainsi donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Y = 0]) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + e^{-\lambda} \\
 &= \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} + e^{-\lambda} \\
 &= \boxed{\frac{-e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} + 1}{2}}
 \end{aligned}$$

et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([Y = k]) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!}}$$

Notez avec joie que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}([Y = k]) &= \frac{-e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} + 1}{2} + e^{-\lambda} (P - 1) \\
 &= \frac{-e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} + 1}{2} + e^{-\lambda} \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} - 1 \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

- Passons à l'espérance. En reprenant le principe "papa-maman" comme ci-dessus, vous pouvez constater que la série de terme général $k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!}$ est convergente. Donc Y admet une espérance, avec

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} \\
 &= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
 &= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \times \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} \\
 &= \boxed{\frac{\lambda(1 - e^{-2\lambda})}{4}}
 \end{aligned}$$

- On sait que Y admet une variance si et seulement si Y^2 admet une espérance, soit si et seulement

si la série de terme général $k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!}$ converge. Or

$$\begin{aligned} k^2 \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} &= \frac{1}{4} (2k(2k-1) + 2k) \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} + \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} \right) \text{ converge} \end{aligned}$$

avec

$$\sum_k \frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} \quad \text{et} \quad \sum_k \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}$$

Nous avons par le *théorème de transfert*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2Y(2Y-1)) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(2k(2k-1)) \lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \times \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \\ &= \frac{\lambda^2 (1 + e^{-2\lambda})}{4} \end{aligned}$$

D'après la formule de Huygens-Koenig

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \frac{1}{4} (\mathbb{E}(2Y(2Y-1)) + \mathbb{E}(2Y)) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \boxed{\frac{\lambda}{8} (1 - e^{-2\lambda}) + \frac{1}{16} \lambda^2 (4e^{-2\lambda} + 1 - e^{-4\lambda})} \end{aligned}$$

13 Loi d'une variable fonction d'une autre

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p . On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est impaire} \\ \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est paire} \end{cases}$$

Déterminons la loi de Y .

Tout d'abord

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Selon la formule des probabilités totales associée au système complet d'événement $\{[X \text{ est impaire}], [X \text{ est paire}]\}$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([Y = 2k + 1]) &= \mathbf{P}([Y = 2k + 1] \cap [X \text{ est impaire}]) + \mathbf{P}([Y = 2k + 1] \cap [X \text{ est paire}]) \\ &= \mathbf{P}([X = 2k + 1] \cap [X \text{ est impaire}]) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{2} = 2k + 1\right] \cap [X \text{ est paire}]\right) \\ &= \mathbf{P}([X = 2k + 1]) + \mathbf{P}([X = 4k + 2] \cap [X \text{ est paire}]) \\ &= \mathbf{P}([X = 2k + 1]) + \mathbf{P}([X = 4k + 2]) \\ &= q^{2k} p + q^{4k+1} p \\ &= \boxed{p (q^{2k} + q^{4k+1})} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([Y = 2k]) &= \mathbf{P}([Y = 2k] \cap [X \text{ est impaire}]) + \mathbf{P}([Y = 2k] \cap [X \text{ est paire}]) \\
&= \mathbf{P}\left(\underbrace{[X = 2k] \cap [X \text{ est impaire}]}_{\emptyset}\right) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{2} = 2k\right] \cap [X \text{ est paire}]\right) \\
&= \mathbf{P}([X = 4k] \cap [X \text{ est paire}]) \\
&= \mathbf{P}([X = 4k]) \\
&= \boxed{q^{4k-1}p}
\end{aligned}$$

Je vous laisse cette fois-ci vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

14 Une inégalité probabiliste

Pour commencer montrons que

$$\forall t \geq 0, \mathbf{1}_{[|X| \geq a]} \leq \frac{g(|X|)}{g(a)} \quad (7)$$

- L'événement $[|X| \geq a]$ n'est pas réalisé.

Alors $\mathbf{1}_{[|X| \geq a]} = 0$ et comme la fonction g est à valeurs dans \mathbb{R}_+ alors $\frac{g(|X|)}{g(a)} \geq 0$, l'inégalité (1) est bien vérifiée.

- L'événement $[|X| \geq a]$ est réalisé.

Alors $\mathbf{1}_{[|X| \geq a]} = 1$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\forall t \geq 0 \quad [|X| \geq a] &\subset [g(|X|) \geq g(a)] \text{ par } \textit{croissance} \text{ de } \exp \\
&\subset \left[\frac{g(|X|)}{g(a)} \geq 1 \right] \text{ car } g(a) > 0 \text{ et } (7) \text{ est bien vérifiée}
\end{aligned}$$

- Nous supposons que la variable $g(|X|)$ possède une espérance, par la *croissance et la linéarité de l'opérateur* \mathbb{E} on obtient

$$\forall t \geq 0, \mathbb{E}(\mathbf{1}_{[|X| \geq a]}) \leq \mathbb{E}\left(\frac{g(|X|)}{g(a)}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(g(|X|))}{g(a)}$$

soit par *définition de l'indicatrice* :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \mathbf{P}([|X| \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(g(|X|))}{g(a)}}$$

15 Une inégalité probabiliste

Pour commencer montrons que pour $0 \leq a < \alpha$ on a,

$$\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]} \geq \frac{h(X) - a}{\alpha - a} \quad (8)$$

- L'événement $[h(X) \geq a]$ n'est pas réalisé autrement dit $[h(X) < a]$ est réalisé.

Alors $\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]} = 0$ et comme $h(X) - a < 0$ avec $\alpha - a > 0$ alors

$$\frac{h(X) - a}{\alpha - a} < 0 \implies \frac{h(X) - a}{\alpha - a} \leq 0$$

l'inégalité (8) est bien vérifiée.

- L'événement $[h(X) \geq a]$ est réalisé.

Alors $\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]} = 1$. D'autre part

$$\begin{aligned} \forall a \in [0; \alpha[, \quad [\alpha \geq h(X) \geq a] &\subset [h(X) - a \leq \alpha - a] \text{ par croissance de exp} \\ &\subset \left[\frac{h(X) - a}{\alpha - a} \leq 1 \right] \text{ et (8) est bien vérifiée} \end{aligned}$$

- Nous supposons que la variable $h(X)$ possède une espérance, par la *croissance et la linéarité de l'opérateur* \mathbb{E} on obtient

$$\forall a \in [0; \alpha[, \quad \mathbb{E}(\mathbf{1}_{[h(X) \geq a]}) \geq \mathbb{E}\left(\frac{h(X) - a}{\alpha - a}\right) \geq \frac{\mathbb{E}(h(X)) - a}{\alpha - a}$$

soit par *définition de l'indicatrice*

$$\boxed{\forall a \in [0; \alpha[, \quad \mathbf{P}(h(X) \geq a) \geq \frac{\mathbb{E}(h(X)) - a}{\alpha - a}}$$

16 Théorème de transfert

D'après le *théorème de transfert* $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_k \frac{1}{k+1} \mathbf{P}([X = k])$ est convergente. En cas de convergence $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ existe et vaut

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \mathbf{P}([X = k])$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{k+1} \mathbf{P}([X = k]) &= \frac{q^k p}{k+1} \\ &= \frac{p q^{k+1}}{q k + 1} \end{aligned}$$

Nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la *série logarithmique* de paramètre q déjà étudiée à l'exercice 9. Donc $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance égale à

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{p q^{k+1}}{q k + 1} &= \frac{p}{q} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{q^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{p}{q} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{q^k}{k} \\ &= -\frac{p}{q} \ln(1 - q) \\ &= -\frac{p}{q} \ln p \\ &= (\ln p)^{-\frac{p}{q}} \\ &= \boxed{(\ln p)^{\frac{p}{p-1}}} \end{aligned}$$

17 Théorème de transfert

L'utilisation du théorème de transfert nous permet de dire que α^X admet une espérance si et seulement si $\sum_k \alpha^k \mathbf{P}([X = k])$ est convergente et en cas de convergence

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha^X) &= \sum_{k \geq 0} \alpha^k \mathbf{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k \geq 0} \alpha^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} (\alpha \lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une série convergente en tant que série proportionnelle à la série exponentielle de paramètre $\alpha \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Conclusion : α^X admet une espérance égale à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha^X) &= e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\alpha \lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\alpha \lambda} \\ &= \boxed{e^{\lambda(\alpha-1)}} \end{aligned}$$

18 Espérance et antirépartition

(ROQUEIII.67) Soit X une variable aléatoire à valeurs entières positives.

a Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) + (n+1) \mathbf{P}(X > n)$$

Nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [0, n]$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}([X \geq k]) = \mathbf{P}([X > k]) + \mathbf{P}[X = k] \\ \Rightarrow &k \mathbf{P}([X \geq k]) = k \mathbf{P}([X > k]) + k \mathbf{P}[X = k] \\ \Rightarrow &\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X \geq k]) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) \\ \Rightarrow &\sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([X > k-1]) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) \quad (\text{ok pour } n=0) \\ \Rightarrow &\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) \\ \Rightarrow &\sum_{k=0}^{n-1} k \mathbf{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) \\ \Rightarrow &\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} k \mathbf{P}([X > k]) - \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}([X > k]) \\ \Rightarrow &\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}([X > k]) - n \mathbf{P}([X > n]) \quad \text{après simplification} \\ \Rightarrow &\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) + n \mathbf{P}([X > n]) \\ \Rightarrow &\boxed{\sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) + (n+1) \mathbf{P}([X > n])} \end{aligned}$$

b.i En déduire :

$$(X \text{ admet une espérance}) \iff \left(\sum_k \mathbf{P}(X > k) \text{ est convergente} \right)$$

- On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$. Montrons que la série $\sum_k \mathbf{P}(X > k)$ est convergente. Pour cela il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \mathbf{P}(X > n) = 0$ soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 0. \text{ Nous avons}$$

$$0 \leq (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k)$$

car $k \geq n+1$, et nous reconnaissons le *reste d'ordre n d'une série convergente*, puisque par hypothèse l'espérance existe. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = 0$ et selon le *théorème d'encadrement*

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 0$. Alors en prenant l'égalité de la question précédente, par *passage à la limite* quand n tend vers $+\infty$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \mathbf{P}(X > n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) + 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) \end{aligned}$$

Conclusion : comme l'espérance existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k)$ existe et est finie égale à $\mathbb{E}(X)$, autrement dit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k) = \mathbb{E}(X)}$$

- Réciproquement, supposons que la série $\sum_k \mathbf{P}(X > k)$ est convergente, montrons qu'il en est de même pour la série de terme général $k \mathbf{P}([X = k])$ et que X admet une espérance. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) \mathbf{P}([X > n]) \geq 0$ l'égalité

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X = k) + (n+1) \mathbf{P}(X > n)$$

entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [0, n], \quad 0 \leq \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([X = k]) \leq \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X > k]) \leq \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X > k])$$

puisque la série de terme général $\mathbf{P}([X > n])$ converge. Ainsi la suite $\left(\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc *convergente*, ce qui équivaut à dire que la série de terme général $k \mathbf{P}([X = k])$ est convergente et donc que l'espérance existe. Cela nous ramène donc à la question précédente "pour boucler la boucle" et dire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > k]) = \mathbb{E}(X)$$

b.ii

Si l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessus est vérifiée, on a trivialement l'égalité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$$

19 Mode(s) d'une distribution

a

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, quelle est la valeur de k qui maximise $\mathbf{P}([X = k])$? Pour cela introduisons la suite $(p_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définie par $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $p_k = \mathbf{P}([X = k])$. Etudions la *monotonie* de cette suite. $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{n! k! (n-k)! p}{(k+1)! (n-k-1)! n! (1-p)} \\ &= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 &\iff \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \geq 1 & (9) \\ &\iff (n-k)p \geq (k+1)(1-p) \\ &\iff np - kp \geq k - kp + 1 - p \\ &\iff np \geq k + 1 - p \\ &\iff k \leq n(1+p) - 1 & (10) \end{aligned}$$

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si $n(1+p) - 1$ est un entier. La réponse est que nous n'en savons rien, tout dépendant de p pour lequel nous n'avons aucun renseignement. C'est la raison pour laquelle nous considérerons la *partie entière* de $n(1+p) - 1$, notée $[n_0]$ où $n_0 = n(1+p) - 1$.

Par définition $[n_0] \leq n_0 < [n_0] + 1$, nous savons selon (9) et (10) que $p_{n_0} > p_{[n_0]}$ et $p_{n_0} > p_{[n_0]+1}$, mais la question est de savoir si nous avons $p_{[n_0]} < p_{[n_0]+1}$ ou le contraire. La réponse est simple : comme $[n_0] \leq n_0$, par définition nous avons l'équivalence

$$\frac{p_{[n_0]+1}}{p_{[n_0]}} \geq 1 \iff [n_0] \leq n_0$$

qui est vraie.

Moralité le mode de la distribution est $m_o = [n_0] + 1$, soit

$$\begin{aligned} m_o &= [n(1+p) - 1] + 1 \\ &= [n(1+p)] - 1 + 1 \\ &= \boxed{[n(1+p)]} \end{aligned}$$

b

De même, soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, quelle est la valeur de k qui maximise $\mathbf{P}([X = k])$?

$$\begin{aligned}\frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+1} k!}{(k+1)! e^{-\lambda} \lambda^k} \\ &= \frac{\lambda}{k+1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1 &\iff \frac{\lambda}{k+1} > 1 \\ &\iff k \leq \lambda - 1\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue nous donne que

$$m_o = \lfloor \lambda \rfloor$$

Deuxième partie : recherche de loi

20 Loi et antirépartition

- Nous avons $X(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$
- $[X > k] = \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid i_1 > i_2 > \dots > i_k \right\}$ et $\Omega = \left\{ (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k \right\}$ est l'ensemble des k -arrangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal A_n^k . Ainsi pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X > k]) &= \frac{\binom{n}{k}}{A_n^k} \\ &= \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Cette formule reste valable pour $k = 1$ puisque $\mathbf{P}([X > 1]) = 1$ du fait que $X(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$. En revanche elle ne l'est pas pour $k = n$ car $[X > n] = \emptyset$ alors que l'égalité donne

$$\mathbf{P}([X > n]) = \frac{1}{n!}$$

- $\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}([X \geq k]) = \mathbf{P}([X > k]) + \mathbf{P}([X = k])$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X = k]) &= \mathbf{P}([X \geq k]) - \mathbf{P}([X > k]) \\ &= \mathbf{P}([X > k-1]) - \mathbf{P}([X > k]) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Enfin

$$\mathbf{P}([X = n]) = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$[X = n] = \{(n, n-1, \dots, 1); (n, n-1, \dots, 3, 1, 2); (n, n-1, \dots, 4, 2, 1, 3), \dots, (n-1, n-2, \dots, 1, n)\}$$

Notez bien que

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \mathbf{P}([X = k]) &= \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 1\end{aligned}$$

21 Tirages sans remise

a Il y a

$$\binom{N}{n}$$

poignées de n boules possibles.

b Nous avons

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$$

c L'événement $[Y \geq k]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules tirées ont un numéro supérieur ou égal à k . Il y a $N - k + 1$ boules dont le numéro est compris entre k et N , donc

$$\forall k \in \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket \quad \mathbf{P}([Y \geq k]) = \frac{\binom{N - k + 1}{n}}{\binom{N}{n}}$$

d Déterminons la loi de Y .

- $Y(\Omega) = \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$

- Nous avons

$$\forall k \in \llbracket 1, N - n \rrbracket, \quad \mathbf{P}([Y \geq k]) = \mathbf{P}([Y > k]) + \mathbf{P}([Y = k])$$

donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, N - n \rrbracket, \quad \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}([Y \geq k]) - \mathbf{P}([Y > k]) \\ &= \mathbf{P}([Y \geq k]) - \mathbf{P}([Y \geq k + 1]) \\ &= \frac{\binom{N - k + 1}{n}}{\binom{N}{n}} - \frac{\binom{N - k}{n}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\binom{N - k}{n - 1}}{\binom{N}{n}} \text{ par "TP"} \end{aligned} \tag{11}$$

Enfin pour $k = N - n + 1$,

$$\mathbf{P}([Y = k]) = \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

et la formule (11) reste encore valable.

Conclusion :

$$\forall k \in \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket \quad \mathbf{P}([Y = k]) = \frac{\binom{N - k}{n - 1}}{\binom{N}{n}}$$

22 Loi géométrique sur \mathbb{N}^* , loi géométrique sur \mathbb{N}

a C'est une question de cours à l'état pur, je vous engage donc à vous y reporter.

b

- Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Notons $\forall k \in \mathbb{N}^*$, B_k (respectivement N_k) l'événement : "obtenir une boule blanche (respectivement une boule noire) lors du $k^{\text{ème}}$ tirage". Alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k \cap N_{k+1}) \\ &= \left(\frac{b}{b+n}\right)^k \frac{n}{n+b} \end{aligned}$$

On dira que

$$Y \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+b}\right)$$

loi géométrique sur \mathbb{N} ou loi du nombre d'échecs qui précèdent le premier succès.

- Il est clair que $X = Y + 1$ donc $Y = X - 1$ et comme X admet une espérance et une variance, alors Y en admet une aussi avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X) - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{n}{n+b}} - 1 \\ &= \boxed{\frac{b}{n}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(X) \\ &= \frac{b}{\frac{n}{n+b}} \\ &= \left(\frac{n}{n+b}\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{(b+n)b}{n^2}} \end{aligned}$$

23 Loi du plus grand des numéros

- Tout d'abord $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- $\forall k \in X(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([X \leq k]) = \frac{k^2}{6^2}$$

car

$$[X \leq k] = \left\{ (i_1, i_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid i_1 \leq k, i_2 \leq k \right\}$$

et $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.

$$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbf{P}([X \leq k]) = \mathbf{P}([X = k]) + \mathbf{P}([X \leq k-1])$$

(valable aussi pour $k = 1$ car $\mathbf{P}([X \leq 0]) = 0$) donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbf{P}([X = k]) &= \frac{k^2}{6^2} - \frac{(k-1)^2}{6^2} \\ &= \boxed{\frac{2k-1}{36}} \end{aligned}$$

24 Loi du plus grand et du plus petit des numéros tirés

a Nous avons

- Tout d'abord $Y(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$.
- Notons F_Y la fonction de répartition associée à Y , elle est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} & \text{si } x \in \llbracket k, k+1 \rrbracket \text{ où } k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

- Cherchons l'espérance de Y .

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([Y \leq k]) - \mathbf{P}([Y \leq k-1])$$

(valable aussi pour $k = 2$ car $\mathbf{P}([Y \leq 1]) = 0$ du fait que $Y(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$) donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}([Y = k]) &= \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} - \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{\binom{k-1}{1}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=2}^n \frac{2k(k-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n k(k-1) \\ &= \frac{4}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \\ &= \frac{4}{n(n-1)} \binom{n+1}{3} \text{ par "TPG"} \\ &= \frac{4(n+1)n(n-1)}{6n(n-1)} \\ &= \boxed{\frac{2(n+1)}{3}} \end{aligned}$$

b Nous avons

- $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

- $\forall k \in X(\Omega)$, $[X \geq k] = \mathcal{P}_2(\llbracket k, n \rrbracket)$ et $\Omega = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ainsi

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \mathbf{P}([X \geq k]) = \frac{\binom{n-k+1}{2}}{\binom{n}{2}}$$

et

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{P}([X \geq k]) - \mathbf{P}([X > k])$$

(cette formule reste valable pour $k = n-1$ puisque $\mathbf{P}([X > n-1]) = 0$ du fait que $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$). Alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \mathbf{P}([X = k]) &= \frac{\binom{n-k+1}{2}}{\binom{n}{2}} - \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{\binom{n-k}{1}}{\binom{n}{2}} \\ &= \boxed{\frac{2(n-k)}{n(n-1)}} \end{aligned}$$

25 Loi de Pascal, loi binomiale négative

a Tout d'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}_r$.

Calculons $\forall i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = i])$. Pour cela introduisons une variable Y associée au nombre de succès obtenus lors des $i-1$ premiers tirages. Il est clair que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(i-1, p)$. D'autre part introduisons pour $i \in \mathbb{N}^*$, S_i l'événement "obtenir un succès lors du $i^{\text{ème}}$ essai". Ainsi nous avons $[X = i] = [Y = r-1] \cap S_i$ d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = i]) &= \mathbf{P}([Y = r-1] \cap S_i) \\ &= \mathbf{P}([Y = r-1]) \times \mathbf{P}(S_i) \text{ par indépendance des événements} \\ &= \binom{i-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{i-r} p \\ &= \boxed{\binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}} \end{aligned}$$

Remarque hors programme : on dira que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(k, p)^3$

Pour vérifier la cohérence de ce résultat nous devons introduire la **série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x** où $|x| < 1$, à savoir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1, \quad \sum_{n \geq k} A_n^k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

(résultat⁴ qui se démontre par récurrence à l'aide de préliminaires guidés).

Complément : calculons $E(X)$ et $V(X)$.

³ **Loi de Pascal** de paramètres r et p . C'est la *loi du temps d'attente du $r^{\text{ème}}$ succès*. Elle généralise la loi géométrique.

⁴ Résultat dont le nom est dû à un célèbre résultat d'analyse disant que $(x^n)^{(k)} = \begin{cases} A_n^k x^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Les calculs de l'espérance et de la variance sont assez techniques et font appel à la série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x où $|x| < 1$ ⁵. U Pour éviter son emploi nous introduirons un vecteur aléatoire (X_1, X_2, \dots, X_r) de dimension r , constitué de r variables aléatoires indépendantes, défini par X_1 qui est la variable associée au rang d'apparition du premier succès et $\forall i \in \llbracket 2, r \rrbracket$, X_i est la variable associée au rang d'apparition du $i^{\text{ème}}$ succès sachant que $i - 1$ ont déjà été obtenus. Nous avons $X = \sum_{i=1}^r X_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow G(p)$ et par la linéarité de l'espérance que nous démontrerons dans le chapitre 7 nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^r \mathbb{E}(X_i) \\ &= \boxed{\frac{r}{p}} \end{aligned}$$

Puis par indépendance des variables

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^r \mathbb{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{q}{p^2} \\ &= \boxed{\frac{rq}{p^2}} \end{aligned}$$

b

- Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Calculons $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([Y = k])$. Pour cela introduisons une variable Z associée au nombre d'échecs obtenus lors des $k + r - 1$ premiers tirages. Il est clair que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k + r - 1, p)$. D'autre part introduisons pour $k + r \in \mathbb{N}^*$, S_{k+r} l'événement "obtenir un succès lors du $k + r^{\text{ème}}$ essai". Ainsi nous avons $[Y = k] = [Z = k] \cap S_{k+r}$ d'où

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}([Z = k] \cap S_{k+r}) \\ &= \mathbf{P}([Z = k]) \times \mathbf{P}(S_{k+r}) \text{ par indépendance des événements} \\ &= \binom{r-1+k}{k} p^{r-1} (1-p)^k p \\ &= \boxed{\binom{r-1+k}{k} p^r (1-p)^k} \end{aligned}$$

COMPLÉMENT : calculons $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Là encore les calculs de l'espérance et de la variance sont assez techniques et font toujours appel à la *série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x où $|x| < 1$* . Pour éviter son emploi nous introduirons un *vecteur aléatoire* (X_1, X_2, \dots, X_r) de dimension r , constitué de r variables aléatoires *indépendantes*, défini par X_1 qui est la variable associée au nombre d'échecs qui précèdent le premier succès et $\forall i \in \llbracket 2, r \rrbracket$, X_i est la variable associée au nombre

⁵ $\sum_{n \geq k} A_n^k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ avec $|x| < 1$. Il y a un *moyen mnémotechnique* de s'en rappeler mais absolument PROSCRIT

consistant à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $\sum_{n \geq k} A_n^k x^{n-k} = \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)^{(k)} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)}$.

d'échecs qui précèdent le $i^{\text{ème}}$ succès sachant que $i - 1$ ont déjà été obtenus. Nous avons $X = \sum_{i=1}^r X_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ et par toujours par la *linéarité de l'espérance* nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^r \mathbb{E}(X_i) \\ &= \boxed{\frac{rq}{p}}\end{aligned}$$

Puis par indépendance des variables

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^r \mathbb{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{q}{p^2} \\ &= \boxed{\frac{rq}{p^2}}\end{aligned}$$

26 Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore

- $\mathcal{L}(X)$

- $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

- $\Omega = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et $|\Omega| = \binom{n}{2}$ car les tirages sont caractérisés, par exemple, par l'emplacement des boules blanches puisque toutes les boules sont tirées.

$$\forall k \in X(\Omega), \quad [X = k] = \{(i_1, i_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i_1 = k, i_2 > k\} \implies |[X = k]| = 1 \times \binom{n-k}{1} = n-k$$

Conclusion :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

- $\mathcal{L}(Y)$

- $Y(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$

- Ω reste le même.

$$\forall k \in Y(\Omega), \quad [Y = k] = \{(i_1, i_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i_1 < k, i_2 = k\} \implies |[Y = k]| = \binom{k-1}{1} \times 1 = k-1$$

Conclusion :

$$\forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y = k]) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

27 Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore

- Tout d'abord $X(\Omega) = \llbracket x, n-r+x \rrbracket$

- $\Omega = \mathcal{P}_k([1, n])$ et $|\Omega| = \binom{n}{r}$ car les tirages sont caractérisés, par exemple, par l'emplacement des boules blanches puisque toutes les rouges sont tirées. $\forall k \in X(\Omega)$,

$$[X = k] = \{(i_1, \dots, i_r) \in [1, n]^r \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{x-1} \leq k-1, i_x = k, k+1 \leq i_{x+1} < \dots < i_r \leq n\}$$

et

$$|[X = k]| = \binom{k-1}{x-1} \times 1 \times \binom{n-k}{r-x}$$

Comme les boules sont tirés au hasard, elles sont *équiprobables*, et nous pouvons munir l'univers de la *probabilité uniforme* ce qui nous permet de dire que

$$\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{\binom{k-1}{x-1} \binom{n-k}{r-x}}{\binom{n}{r}}$$

28 Tirages simultanés

- Tout d'abord $Y(\Omega) = [2, n-1]$.
- $\Omega = \mathcal{P}_3([1, n])$ et $|\Omega| = \binom{n}{3}$.

$$\forall k \in Y(\Omega), \quad [Y = k] = \{(i_1, i_2, i_3) \mid 1 \leq i_1 \leq k-1, i_2 = k, k+1 \leq i_3 \leq n\}$$

alors

$$\begin{aligned} |[Y = k]| &= \binom{k-1}{1} \binom{n-k}{1} \\ &= (k-1)(n-k) \end{aligned}$$

Comme les lots sont tirés au hasard, ils sont *équiprobables*, et nous pouvons munir l'univers de la *probabilité uniforme* ce qui nous permet de dire que

$$\begin{aligned} \forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y = k]) &= \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}} \\ &= \frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

29 Le jeu de Pierre et Marie

a Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\lambda}{n(n+1)} = \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n+1}$$

la série $\sum \mathbf{P}([X = n])$ est *télescopique*. Alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X = k]) &= \lambda \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lambda \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X = k]) = 1$ donne que

$$\boxed{\lambda = 1}$$

b.i Notons G_P l'événement "Pierre gagne une partie", alors $G_P = \bigcup_{n \geq 0} [X = 2n + 1]$ ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(G_P) &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}([X = 2n + 1]) \text{ par } \sigma\text{-additivité} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n + 1)(2n + 2)} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 2} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n + 1} \\
 &= - \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{k + 1} \text{ série logarithmique (hors programme)} \\
 &= \boxed{\ln 2}
 \end{aligned}$$

b.ii Nous avons

$$\begin{aligned}
 G(\Omega) &= 2\mathbb{Z}_+^* \bigcup (2\mathbb{N} + 1) \\
 &= \boxed{\{(-1)^{n-1} n \mid n \in \mathbb{N}^*\}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall n \geq 1, G(n) \mathbf{P}([X = n]) &= \frac{n(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}
 \end{aligned}$$

et nous sommes encore en présence d'une série convergente en tant que *série logarithmique* de paramètre $-1 \in [-1; 1[$ et

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} G(n) \mathbf{P}([X = n]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^1}{1} \right) \\
 &= \boxed{1 - \ln 2}
 \end{aligned}$$

