Correction des exercices de la fiche 6

1 Loi conjointe, lois marginales, indépendance

a Nous avons :

$$(U,V)(\Omega) = \left\{(u,v) \in [|1,4|]^2 \mid u < v\right\}$$

Et :

$$\boxed{\forall (u,v) \in (U,V)(\Omega), \quad \mathbf{P}([U=u] \cap [V=v]) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}}$$

Explications :

- L'univers Ω est l'ensemble des *lots* de 2 jetons pris parmi 4.
- Chaque couple favorable est *unique*, car dans chaque lot les deux numéros sont forcément différents, ce qui donne l'unicité du min et du max du couple.

Cohérence :

$$\begin{aligned}\sum_{(u,v)\in(U,V)(\Omega)} \mathbf{P}([U=u] \cap [V=v]) &= \sum_{(u,v)\in(U,V)(\Omega)} \frac{1}{\binom{4}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

car $(U,V)(\Omega)$ est l'ensemble des suites finies de deux entiers strictement croissantes, et à valeurs dans $[|1,4|]$ (voir le poster des suites).

b Etablissons le tableau à deux entrées, permettant de donner la loi du couple, ainsi que les lois marginales :

$\frac{V \rightarrow}{U \downarrow}$	2	3	4	$\mathcal{L}(U) \downarrow$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathcal{L}(V) \rightarrow$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	**1**

c La présence de zéros dans le coeur du tableau doit de toute urgence vous inciter à "foncer" dessus pour introduire un contre-exemple ravageur !

En effet, comme $\mathbf{P}([U=2] \cap [V=2]) = 0$ alors que $\mathbf{P}([U=2]) \times \mathbf{P}([V=2]) \neq 0$, cet exemple nous montre clairement que :

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont dépendantes}}$$

2 Loi conjointe, indépendance

a Nous avons :

$$(X,Y)(\Omega) = \left\{(i,j) \in [|1,6|]^2 \mid j \leq i\right\}$$

Comme $\forall i \in [|1,6|]$, $\mathbf{P}([X=i]) = \dfrac{1}{6} \neq 0$ selon la *formule des probabilités composées :*

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in (X,Y)(\Omega),\ \mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j]) &= \mathbf{P}([X=i]) \times \mathbf{P}_{[X=i]}([Y=j]) \\ &= \frac{1}{6} \times \binom{i}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{i-j}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall (i,j) \in (X,Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^{j+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-j}}$$

b Comme $\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=6]) = 0$ alors que $\mathbf{P}([X=1]) \times \mathbf{P}([Y=6]) = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^6 \neq 0$,

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont dépendantes}}$$

3 Loi d'une somme

a Comme Pierre et Paul effectuent tous deux une suite finie de *n épreuves de Bernoulli* indépendantes et de même paramètre p, alors :

$$\boxed{\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(n,p)}$$

b Cette question est purement culturelle ! En effet tout bon préparationnaire digne de la Saint-Jean Academy sait parfaitement que :

$$\mathcal{B}(n_1,p) \boxplus \mathcal{B}(n_2,p) = \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$$

c'est ce que l'on appelle *la stabilité de la loi binomiale pour la somme de deux variables indépendantes.*
Appliqué à l'exercice, cela donne, comme X et Y suivent toutes deux la loi $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\boxed{\mathcal{L}(S) = \mathcal{B}(2n,p)}$$

4 Egalité de deux variables

Soient X et Y deux variables indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p, alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=Y]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*}([X=k]\cap[Y=k])\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}([X=k]) \times \mathbf{P}([Y=k]) \text{ par } \sigma-\textit{additivité} \text{ et } \textit{indépendance} \text{ desVAR} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (\mathbf{P}([X=k]))^2 \text{ comme } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(pq^{k-1}\right)^2 \\ &= p^2 \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(q^2\right)^{k-1} \\ &= \frac{p^2}{1-q^2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([X=Y]) = \frac{p}{1+q}}$$

5 Antirépartition du min d'un couple géométrique

- Dans tout l'exercice nous poserons $q = 1 - p$.

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([U > k]) &= \mathbf{P}([X > k] \cap [Y > k]) \\ &= \mathbf{P}([X > k]) \times \mathbf{P}([Y > k]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ desVAR} \\ &= (\mathbf{P}([X > k]))^2 \text{ car } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \\ &= \left(q^k\right)^2\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([U > k]) = \left(q^2\right)^k}$$

- Loi de U.
Nous avons : $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([U \geq k]) &= \mathbf{P}([U > k]) + \mathbf{P}([U = k]) \\ &= \mathbf{P}([U \geq k]) - \mathbf{P}([U > k]) \\ &= \mathbf{P}([U > k-1]) - \mathbf{P}([U > k])\end{aligned}$$

la formule reste valable pour $k = 0$ car $\mathbf{P}([U = 0]) = \mathbf{P}([U > -1]) - \mathbf{P}([U > 0]) = 1 - 1 = 0$ ce qui est cohérent puisque $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ainsi tout cela entraine que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([U = k]) = \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([U = k]) = \left(q^2\right)^{k-1}\left(1 - q^2\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{U \hookrightarrow> \mathcal{G}\left(1 - q^2\right)}$$

et d'après le cours :

$$\boxed{\mathbb{E}(U) = \frac{1}{1 - q^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(U) = \frac{q^2}{\left(1 - q^2\right)^2} = \frac{q^2}{p^2(1 + q)^2}}$$

6 Somme de variables de Poisson indépendantes

Tout d'abord comme X, Y, Z sont trois variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ, μ, υ et que :

$$\mathcal{P}(\lambda_1) \boxplus \mathcal{P}(\lambda_2) = \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

alors :

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu) \Longrightarrow (X + Y) + Z \hookrightarrow \mathcal{P}((\lambda + \mu) + \upsilon)$$

Conclusion :

$$(X + Y + Z) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu + \upsilon)$$

Comme $\forall (i, j, k) \in \mathbb{N}^3$, $\mathbf{P}([X + Y + Z = i + j + k]) \neq 0$ en appliquant la *formule de Bayes :*

$$\begin{aligned}&\forall (i, j, k) \in \mathbb{N}^3,\ \mathbf{P}_{[X+Y+Z=i+j+k]}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k]) \\ = \ &\frac{\mathbf{P}_{([X=i]\cap[Y=j]\cap[Z=k])}([X + Y + Z = i + j + k]) \times \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k])}{\mathbf{P}([X + Y + Z = i + j + k])} \\ = \ &\frac{1 \times \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k])}{\mathbf{P}([X + Y + Z = i + j + k])} \\ = \ &\frac{\mathbf{P}([X = i]) \times \mathbf{P}([Y = j]) \times \mathbf{P}([Z = k])}{\mathbf{P}([X + Y + Z = i + j + k])} \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des VAR } X, Y \text{ et } Z \\ = \ &\frac{\left(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\right)\left(\dfrac{e^{-\mu}\mu^j}{j!}\right)\left(\dfrac{e^{-\upsilon}\upsilon^k}{k!}\right)}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu+\upsilon)}(\lambda + \mu + \upsilon)^{i+j+k}}{(i + j + k)!}}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall (i,j,k) \in \mathbb{N}^3, \quad \mathbf{P}_{[X+Y+Z=i+j+k]}([X=i] \cap [Y=j] \cap [Z=k]) = \frac{\lambda^i \mu^j \upsilon^k (i+j+k)!}{i!j!k!(\lambda+\mu+\upsilon)^{i+j+k}}}$$

7 Loi d'une somme et variables indépendantes

Tout d'abord comme X et Y sont indépendantes avec $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$, alors :

$$S = X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + p)$$

Cherchons la loi conditionnelle de X sachant que $[S=s]$, $s \in \mathbb{N}$ fixé.
Comme $\forall s \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([S=s]) \neq 0$, *par définition d'une probabilité conditionnelle*

$$\begin{aligned}
\forall i \in [|0,s|], \ \mathbf{P}_{[S=s]}([X=i]) &= \frac{\mathbf{P}([X=i] \cap [S=s])}{\mathbf{P}([S=s])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=i] \cap [Y=s-i])}{\mathbf{P}([S=s])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=i]) \times \mathbf{P}([Y=s-i])}{\mathbf{P}([S=s])} \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des VAR } X \text{ et } Y \\
&= \frac{\left(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\right)\left(\dfrac{e^{-p}p^{s-i}}{(s-i)!}\right)}{\left(\dfrac{e^{-(\lambda+p)}(\lambda+p)^s}{s!}\right)} \text{ et comme } (\lambda+p)^s = (\lambda+p)^i (\lambda+p)^{s-i} \\
&= \binom{s}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+p}\right)^i \left(\frac{p}{\lambda+p}\right)^{s-i}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la loi conditionnelle de } X \text{ sachant que } [S=s] \text{ est } \mathcal{B}\left(s, \frac{\lambda}{\lambda+p}\right)}$$

8 Inégalité probabiliste

Il suffit de remarquer que $\mathbf{P}([|X-Y| \geq \varepsilon]) = \mathbf{P}\left(\left[(X-Y)^2 \geq \varepsilon^2\right]\right)$ (penser à bien démontrer les deux inclusions d'événements comme on l'a vu en cours et en TD) et d'appliquer l'*inégalité de Markov* à la variable $(X-Y)^2$. Au passage n'oubliez pas de justifier l'existence de l'espérance de en disant que :

$$(|X| - |Y|)^2 = |X|^2 + |Y|^2 - 2|X||Y| \geq 0$$

ce qui entraîne que :

$$|XY| \leq \frac{X^2+Y^2}{2} \leq X^2 + Y^2$$

et le théorème de comparaison par majoration fait le reste !

9 Loi d'un couple, covariance

a Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-b,-a,a,b\})$ et que $Y = X^2$ alors :

$$Y(\Omega) = \left\{a^2, b^2\right\}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left[Y=a^2\right]\right) &= \mathbf{P}\Big([X=-a]\biguplus[X=a]\Big)\\ &= \mathbf{P}\left([X=-a]\right)+\mathbf{P}\left([X=a]\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left[Y=b^2\right]\right) &= \mathbf{P}\Big([X=-b]\biguplus[X=b]\Big)\\ &= \mathbf{P}\left([X=-b]\right)+\mathbf{P}\left([X=b]\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y\hookrightarrow\mathcal{U}\left(\left\{a^2,b^2\right\}\right)}$$

b La dépendance des deux variables X et Y va être très vite réglée. En effet par exemple $\mathbf{P}\Big([X=-b]\biguplus\left[Y=a^2\right]\Big)=0$ alors que $\mathbf{P}\left([X=-b]\right)\times\mathbf{P}\left(\left[Y=a^2\right]\right)=\dfrac{1}{8}\neq 0$.

Puisque X est *uniforme centrée sur* 0 *son espérance est nulle* et d'autre part :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(XY\right) &= \mathbb{E}\left(X^3\right)=-\frac{b^3}{4}-\frac{a^3}{4}+\frac{a^3}{4}+\frac{b^3}{4}\\ &= 0\end{aligned}$$

Enfin comme $Cov\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left(XY\right)-\mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$ alors :

$$\boxed{Cov\left(X,Y\right)=0}$$

Nota bene : Voici encore un contre-exemple montrons que la *réciproque* du théorème :

$$\left(X,Y\right)\text{ indépendantes}\Longrightarrow Cov\left(X,Y\right)=0$$

est *fausse*.

10 Coefficient de correlation

Comme l'urne contient peu de numéros, nous pouvons effectuer tous les calculs "à la main".

Il y a quatre lots de jetons possibles qui sont :

$$\begin{array}{c}\{1,2,3\}\\ \{1,2,4\}\\ \{1,3,4\}\\ \{2,3,4\}\end{array}$$

et le tableau à deux entrées U et V est :

$\dfrac{V\rightarrow}{U\downarrow}$	3	4	$\mathcal{L}\left(U\right)\downarrow$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathcal{L}\left(V\right)\rightarrow$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	**1**

De ceci nous tirons que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(U) & = & \frac{5}{4} \\
\mathbb{E}(V) & = & \frac{15}{4} \\
\mathbb{V}(U) & = & \frac{3}{16} \Longleftrightarrow \sigma(U) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\
\mathbb{V}(V) & = & \frac{3}{16} \Longleftrightarrow \sigma(V) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\
\mathbb{E}(UV) & = & \left(3 \times \frac{1}{4}\right) + \left(4 \times \frac{2}{4}\right) + \left(8 \times \frac{1}{4}\right) \\
 & = & \frac{19}{4} \\
Cov(U,V) & = & \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V) \\
 & = & \frac{1}{16}
\end{array}$$

Finalement :

$$\boxed{\rho(U,V) = \frac{Cov(U,V)}{\sigma(U)\,\sigma(V)} = \frac{1}{3}}$$

11 Loi conjointe, lois marginales, indépendance

a Nous avons :

- Loi du couple (X,Y).

$$\begin{array}{rcl}
(X,Y)(\Omega) & = & X(\Omega) \times Y(\Omega) \\
 & = & [|1,6|]^2
\end{array}$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in [|1,6|]^2, \quad \mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{36}}$$

- Loi de X.
  On rappelle que $X(\Omega) = [|1,6|]$.
  Par théorème :

$$\begin{array}{rcl}
\forall i \in [|1,6|],\ \mathbf{P}([X=i]) & = & \sum_{j=1}^{6} \mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j]) \\
 & = & \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{36} \\
 & = & \frac{1}{6}
\end{array}$$

  Conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1,6|])$$

- Loi de Y.
  Par *symétrie* des rôles joués par les variables X et Y :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}([|1,6|])}$$

  Finalement :

$$\begin{array}{rcl}
\forall (i,j) \in [|1,6|]^2,\ p_{ij} & = & \frac{1}{36} \\
 & = & \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\
 & = & p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}
\end{array}$$

ce qui équivaut à dire :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$$

b

- Loi du couple (X, U).

$$(X, U)(\Omega) = \left\{(i, j) \in [|1, 6|]^2 \mid i \geq j\right\}$$

Il y a une discussion à mener :

– si $i = j$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X = i] \cap [U = i]) &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y \geq i]) \\
&= \mathbf{P}([X = i]) \times \mathbf{P}([Y \geq i]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des variables} \\
&= \mathbf{P}([X = i]) \times \sum_{k=i}^{6} \mathbf{P}([Y = k]) \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{6 - i + 1}{6} \\
&= \boxed{\frac{7 - i}{36}}
\end{aligned}$$

– si $i > j$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X = i] \cap [U = j]) &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \mathbf{P}([X = i]) \times \mathbf{P}([Y = j]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des variables} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\
&= \boxed{\frac{1}{36}}
\end{aligned}$$

- Loi de U.
Nous avons $U(\Omega) = [|1, 6|]$.
Par théorème :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [|1, 6|], \ \mathbf{P}([U = j]) &= \sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}([X = i] \cap [U = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} p_{ij} + p_{jj} + \sum_{i=j+1}^{6} p_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} 0 + \frac{7 - j}{36} + \sum_{i=j+1}^{6} \frac{1}{36} \\
&= \frac{7 - j}{36} + \frac{6 - (j + 1) + 1}{36} \\
&= \frac{7 - j + 6 - j}{36} \\
&= \boxed{\frac{13 - 2j}{36}}
\end{aligned}$$

- Indépendance de X et U.
Comme $\mathbf{P}([X = 1] \cap [U = 2]) = 0$ tandis que $\mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([U = 2]) \neq 0$:

$$\boxed{\text{les variables } X \text{ et } U \text{ sont dépendantes}}$$

12 Variable fonction d'autres

Tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ (voir si ce n'est pas mieux d'écrire inclus dans $\mathbb{N}$ vu que l'on a pas plus de précisions sur les valeurs de Y, en effet si ça se trouve $Y(\Omega) = \mathbb{N}_3$ et dans ce cas la différence $X - Y$ n'atteint pas la valeur 1!...à suivre dans la correction) car Z prend la valeur 0 quand $X \leq Y$ et toute valeur entière non nulle dés que $X > Y$ sachant que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Introduisons un *système complet d'événements de probabilités à priori non nulles* : $\{(X > Y), (X \leq Y)\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall k \in Z(\Omega) \quad ([Z = k]) &= ([Z = k] \cap [X > Y]) \biguplus ([Z = k] \cap [X \leq Y]) \\
&= ([X - Y = k] \cap [X > Y]) \biguplus ([0 = k] \cap [X \leq Y])
\end{aligned}$$

Or si $k = 0$ alors $([X - Y = k] \cap [X > Y]) = \varnothing$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, $([0 = k] \cap [X \leq Y]) = \varnothing$. Ces deux cas engendrent donc une discussion :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z = 0]) &= \mathbf{P}([Z = 0] \cap [X \leq Y]) \\
&= \mathbf{P}([X \leq Y]) \times \mathbf{P}_{[X \leq Y]}([Z = 0]) \text{ selon la FPC} \\
&= \mathbf{P}([X \leq Y]) \times 1 \\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{\{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times Y(\Omega) | i \leq j\}} ([X = i] \cap [Y = j]) \right) \\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{j \in (\mathbb{N}^* \cap Y(\Omega))} ([X \leq j] \cap [Y = j]) \right) \\
&= \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X \leq j]) \times \mathbf{P}([Y = j]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des deux VAR} \\
&= \sum_{j \in Y(\Omega)} (1 - \mathbf{P}([X > j])) \times \mathbf{P}([Y = j]) \\
&= \sum_{j \in Y(\Omega)} \left(1 - (1 - a)^j\right) \times \mathbf{P}([Y = j]) \\
&= 1 - \mathbb{E}\left((1 - a)^Y\right) \text{ par le } \textit{théorème de transfert} \\
&= \boxed{1 - \alpha}
\end{aligned}$$

Nota bene : si $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ alors $(\mathbb{N}^* \cap Y(\Omega)) = Y(\Omega)$.

Maintenant si $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(\mathbb{N}^* \cap Y(\Omega)) = \mathbb{N}^*$. Mais comme $[X \leq 0] = \emptyset$ du fait que la variable X suit une loi géométrique, nous pourrons toujours considérer que $(\mathbb{N}^* \cap Y(\Omega)) = Y(\Omega)$ encore une fois.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Z=k]\cap[X>Y]) \\
&= \mathbf{P}([X-Y=k]\cap[X>Y]) \\
&= \mathbf{P}([X-Y=k]) \text{ car } [X-Y=k]\subset[X>Y] \\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{\{,j\in Y(\Omega)\mid k+j\in X(\Omega)\}}([X=k+j]\cap[Y=j])\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{j\in Y(\Omega)}([X=k+j]\cap[Y=j])\right) \\
&= \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X=k+j]) * \mathbf{P}([Y=j]) \text{ par } \sigma-\textit{add.} \text{ et } \textit{indépendance} \text{ des deux VAR} \\
&= \sum_{j\in Y(\Omega)} a(1-a)^{k+j-1}\times\mathbf{P}([Y=j]) \\
&= (1-a)^{k-1}a\sum_{j\in Y(\Omega)}(1-a)^j\times\mathbf{P}([Y=j]) \\
&= a(1-a)^{k-1}\,\mathbb{E}\left((1-a)^Y\right) \text{ par le } \textit{théorème de transfert} \\
&= \boxed{a(1-a)^{k-1}\alpha}
\end{aligned}$$

13 Variable fonction d'autres

a Tout d'abord il est évident que $Z(\Omega)=\mathbb{N}$.

Introduisons un *système complet d'événements de probabilités non nulles* : $\{[X=0],[X=1]\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall k\in Z(\Omega),\ [Z=k] &= ([Z=k]\cap[X=0])\biguplus([Z=k]\cap[X=1]) \\
&= ([0=k]\cap[X=0])\biguplus([Y=k]\cap[X=1])
\end{aligned}$$

Or si $k=0$ alors $([0=k]\cap[X=0])=[X=0]$ et si $k\neq 0$, $([0=k]\cap[X=0])=\varnothing$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=0]) &= \mathbf{P}([X=0])+\mathbf{P}([Y=0]\cap[X=1]) \\
&= \mathbf{P}([X=0])+\mathbf{P}([Y=0])\times\mathbf{P}([X=1]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des deux VAR}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=0]) &= 1-p+e^{-\lambda}p \\
&= \boxed{p\left(e^{-\lambda}-1\right)+1}
\end{aligned}$$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Y=k]\cap[X=1]) \\
&= \mathbf{P}([Y=k])\times\mathbf{P}([X=1]) \text{ par } \textit{indépendance} \text{ des deux VAR}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}([Z=k])=\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$$

b

- $\mathbb{E}(Z)$

$$\begin{aligned} Z \text{ admet une espérance} &\iff \sum_k k\mathbf{P}([Z=k]) \text{ est une SATP convergente} \\ &\iff \sum_k k\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k\in\mathbb{N}^* \text{ est une SATP convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k\geq 1} k\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda pe^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ et nous reconnaissons le terme général d'une série convergente en tant que série proportionnelle à une *série exponentielle*. Ainsi Z admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{k\geq 1} k\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda pe^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= \boxed{\lambda p} \end{aligned}$$

- $\mathbb{V}(Z)$

$$Z \text{ admet une variance} \iff Z(Z-1) \text{ admet une espérance}$$

et :

$$\begin{aligned} Z(Z-1) \text{ admet une espérance} &\iff \sum_k k(k-1)\mathbf{P}([Z=k]) \text{ est une SATP convergente} \\ &\iff \sum_k k(k-1)\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k\in\mathbb{N}^* \text{ est une SATP convergente} \\ &\iff \sum_k k(k-1)\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k\in\mathbb{N}_2 \text{ est une SATP convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbb{E}(Z(Z-1)) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Or :

$$\forall k\in\mathbb{N}_2,\quad k(k-1)\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda^2 pe^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

et nous reconnaissons le terme général d'une série convergente en tant que série proportionnelle à une *série exponentielle*. Ainsi $Z(Z-1)$ admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(Z-1)) &= \sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 pe^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= \lambda^2 p \end{aligned}$$

Moralité Z admet une variance qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z) &= \mathbb{E}(Z(Z-1)) + \mathbb{E}(Z) - (\mathbb{E}(Z))^2 \\ &= \lambda^2 p + \lambda p - (\lambda p)^2 \\ &= \lambda^2 p(1-p) + \lambda p \\ &= \boxed{\lambda p(1+\lambda(1-p))} \end{aligned}$$

c Comme $\mathbf{P}([Z=0]) \neq 0$, par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[Z=0]}([X=1]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1]\cap[Z=0])}{\mathbf{P}([Z=0])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0])}{\mathbf{P}([Z=0])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=1])\times\mathbf{P}([Y=0])}{\mathbf{P}([Z=0])} \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{P}_{[Z=0]}([X=1]) = \frac{pe^{-\lambda}}{p\left(e^{-\lambda}-1\right)+1}}$$

14 Loi d'un vecteur, lois marginales, loi d'une somme, loi d'un produit

a Déterminons $\mathcal{L}(U,V,W)$.
Tout d'abord $(U,V,W)(\Omega) = \left\{(u,v,w) \in [|1,n|]^3 \mid u<v<w\right\}$. Et, clairement :

$$\boxed{\forall (u,v,w) \in (U,V,W)(\Omega), \quad \mathbf{P}([U=u]\cap[V=v]\cap[W=w]) = \frac{1}{\binom{n}{3}}}$$

Explications :
♣ L'univers Ω est l'ensemble des *lots* de 3 jetons pris parmi n.
♣ Chaque triplet favorable est *unique*, car dans chaque lot les trois numéros sont forcément différents, ce qui donne l'unicité du min du max et du terme moyen du triplet.

- Loi de U.
  Tout d'abord $U(\Omega) = [|1, n-2|]$.
  Par théorème :

$$\begin{aligned}
\forall u \in U(\Omega),\ \mathbf{P}([U=u]) &= \sum_{u+1\leq v<w\leq n} \mathbf{P}([U=u]\cap[V=v]\cap[W=w]) \\
&= \sum_{u+1\leq v<w\leq n} \frac{1}{\binom{n}{3}} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{u+1\leq v<w\leq n} 1 \\
&= \frac{\binom{n-(u+1)+1}{2}}{\binom{n}{3}} \\
&= \boxed{\frac{\binom{n-u}{2}}{\binom{n}{3}}}
\end{aligned}$$

- Loi de V.
  Tout d'abord $V(\Omega) = [|2, n-1|]$.

Par théorème :

$$\begin{aligned}
\forall v \in V(\Omega),\ \mathbf{P}([V=u]) &= \sum_{\{(u,w)/1\leq u\leq v-1,\ v+1\leq w\leq n\}} \mathbf{P}([U=u]\cap[V=v]\cap[W=w]) \\
&= \sum_{\{(u,w)/1\leq u\leq v-1,\ v+1\leq w\leq n\}} \frac{1}{\binom{n}{3}} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{\{(u,w)|1\leq u\leq v-1,\ v+1\leq w\leq n\}} 1 \\
&= \frac{\binom{v-1}{1}\times\binom{n-(v+1)+1}{1}}{\binom{n}{3}} \\
&= \boxed{\frac{(v-1)(n-v)}{\binom{n}{3}}}
\end{aligned}$$

Explications :

♣ $\binom{v-1}{1}$ désigne le nombre de choix de u appartenant à l'intervalle $[|1, v-1|]$.

♣ $\binom{n-(v+1)+1}{1}$ désigne le nombre de choix de w appartenant à l'intervalle $[|v+1, n|]$ sans oublier, pour relier le tout, le *lemme des bergers.*

- Loi de W.
  Tout d'abord $W(\Omega) = [|3, n|]$.
  Par théorème :

$$\begin{aligned}
\forall w \in W(\Omega),\ \mathbf{P}([W=w]) &= \sum_{1\leq u<v\leq w-1} \mathbf{P}([U=u]\cap[V=v]\cap[W=w]) \\
&= \sum_{1\leq u<v\leq w-1} \frac{1}{\binom{n}{3}} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{1\leq u<v\leq w-1} 1 \\
&= \boxed{\frac{\binom{w-1}{2}}{\binom{n}{3}}}
\end{aligned}$$

b Pour nous fixer les idées, établissons un tableau des différents triplets possibles associés aux différentes sommes et produits générés.

Triplet	S	T
$(1,2,3)$	6	6
$(1,2,4)$	7	8
$(1,2,5)$	8	10
$(1,3,4)$	8	12
$(1,3,5)$	9	15
$(1,4,5)$	10	20
$(2,3,4)$	9	24
$(2,3,5)$	10	30
$(2,4,5)$	11	40
$(3,4,5)$	12	60

Nous avons donc :

s	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S=s])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

et

t	6	8	10	12	15	20	24	30	40	60
$\mathbf{P}([T=t])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

15 Loi conditionnelle et loi inconditionnelle : relativisation

Tout d'abord $Z(\Omega)=\mathbb{N}$. Introduisons un *système complet d'événements* $\{(X=i)\,,\ i\in\mathbb{N}\}$, afin d'utiliser la *formule des probabilités totales* de manière à **rélativiser** le nombre de voitures se présentant au guichet 1 par rapport au nombre total de véhicules traversant le péage durant une journée, sachant qu'il ne peut y avoir plus de voitures au guichet 1 que de voitures traversant le péage.

$$\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbf{P}([Z=k]) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}_{[X=i]}([Z=k])\times\mathbf{P}([X=i]) \\
&= 0+\sum_{i=k}^{+\infty}\mathbf{P}_{[X=i]}([Z=k])\times\mathbf{P}([X=i]) \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty}\binom{i}{k}\left(\frac{1}{12}\right)^k\left(\frac{11}{12}\right)^{i-k}\times\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \text{ avec } \lambda^i=\lambda^{i-k}\lambda^k \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty}\frac{i!}{k!\,(i-k)!}\left(\frac{\lambda}{12}\right)^k\left(\frac{11\lambda}{12}\right)^{i-k}\frac{e^{-\lambda}}{i!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{\lambda}{12}\right)^k\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(i-k)!}\left(\frac{11\lambda}{12}\right)^{i-k} \quad\text{posons } j=i-k \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{\lambda}{12}\right)^k\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{11\lambda}{12}\right)^j}{j!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{\lambda}{12}\right)^k\exp\left(\frac{11\lambda}{12}\right) \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{12}\lambda}\left(\frac{\lambda}{12}\right)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Z\hookrightarrow>\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{12}\right)}$$

16 Loi conditionnelle et loi de Poisson

a Introduisons un *système complet d'événements* $\{[X=k]\,,\ k\in\mathbb{N}\}$ *de probabilités non nulles*, alors selon la *formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=0]) &= \sum_{k\geq 0} \mathbf{P}_{[X=k]}([Y=0]) \times \mathbf{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-k}k^0}{0!} \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \exp\left(\lambda e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([Y=0]) = \exp\left(\lambda\left(e^{-1}-1\right)\right)}$$

b Déterminons, pour commencer, la loi de Y.
Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Toujours d'après la *formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Y=i]) &= \sum_{k\geq 0} \mathbf{P}_{[X=k]}([Y=i]) \times \mathbf{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-k}k^i}{i!} \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \sum_{k\geq 0} \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^i}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y \text{ admet une espérance} &\iff \sum_i i\mathbf{P}([Y=i]) \text{ est une SATP convergente} \\
&\iff \sum_{(i,k)} \frac{i\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^i e^{-\lambda}}{k!i!}, \text{ est une série double à termes positifs cv}^{\text{te}}
\end{aligned}$$

En cas de convergence :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 0} \frac{i\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^i e^{-\lambda}}{k!i!} \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 1} \frac{i\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^i e^{-\lambda}}{k!i!} \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 1} \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^i e^{-\lambda}}{k!(i-1)!} \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{i\geq 1} \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^{i-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!(i-1)!}
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [|1,n|]$, $\displaystyle\sum_i \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^{i-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!(i-1)!}$, $i \geq 1$ converge en tant que série proportionnelle à la *série exponentielle* de paramètre k de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^{i-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!(i-1)!} &= \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k e^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

Enfin la série $\sum_k \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ converge en tant que série proportionnelle à la série exponentielle de paramètre λ et de somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= \lambda\end{aligned}$$

Conclusion : d'après le théorème de Fubini la série double $\sum_{(k,i)} \frac{\left(\lambda e^{-1}\right)^k k^i e^{-\lambda}}{k!\,(i-1)!}$ avec $(k,i) \in (\mathbb{N}^*)^2$ converge, ainsi Y admet une espérance qui vaut :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \lambda}$$

17 Espérance totale

a Introduisons la suite à deux indices $(S_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $S_{m,n} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}$.
Par inversion de l'ordre de sommation $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $S_{m,n} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{k,j}$ or $\forall j \in [|0,n|]$, $\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{k,j}$ existe et est finie égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ puisque d'après l'énoncé $\sum_k a_{k,j}$ converge $\forall j \in [|0,n|]$. Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} S_{m,n} &= \sum_{j=0}^{n}\left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m} a_{k,j}\right) \text{ selon l'algèbre des limites} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}\end{aligned}$$

La limite de $S_{m,n}$ quand m tend vers l'infini, existe et est finie et vaut :

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$$

soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}}$$

b Comme S est une variable discrète finie, par définition $\mathbb{E}(S) = \sum_{j=0}^{n} j\mathbf{P}([S=j])$ et selon la *formule des probabilités totales* en utilisant l'ensemble $\{[X=k],\ k\in\mathbb{N}\}$ comme *système complet d'événements de probabilités à priori non nulles :*

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{j=0}^{n} j \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{[X=k]}([S=j])\,\mathbf{P}([X=k])}_{\text{joue le rôle de } \sum a_{k,j} \text{ qui cv } \forall j\in[|0,n|],\ k\in\mathbb{N}, \text{ et de somme } \mathbf{P}([S=j])}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} j\mathbf{P}([S=j]/[X=k])\,\mathbf{P}([X=k]) \text{ par inversion des sommes selon } \mathbf{1}.\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X=k])\left(\sum_{j=0}^{n} j\mathbf{P}_{[X=k]}([S=j])\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : par définition de $\mathbb{E}_{[X=k]}(S)$

$$\boxed{\mathbb{E}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X=k])\,\mathbb{E}_{[X=k]}(S)}$$

18 Loi d'une somme, loi de max, loi de min

a.i Reprenons la définition de Y.

$$Y = \max(n, X) \Longleftrightarrow Y = \begin{cases} n \text{ si } X \leq n \\ X \text{ si } X > n \end{cases}$$

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{N}_n$.

Introduisons l'ensemble $\{[X \leq n], [X > n]\}$ qui est un *système complet d'événements de probabilités non nulles* alors selon la *formule des probabilités totales :*

$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \mathbf{P}([Y=k]) = \mathbf{P}([Y=k]\cap[X\leq n]) + \mathbf{P}([Y=k]\cap[X>n])$$

- Si $k = n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=n]) &= \mathbf{P}([Y=n]\cap[X\leq n]) + \mathbf{P}([Y=n]\cap[X>n])\\
&= \mathbf{P}([n=n]\cap[X\leq n]) + \mathbf{P}(\underbrace{[X=n]\cap[X>n]}_{\emptyset})\\
&= \mathbf{P}([X\leq n]) + \mathbf{P}(\varnothing)\\
&= 1-\mathbf{P}([X>n]) + 0\\
&= \boxed{1-q^n}
\end{aligned}$$

- Si $k \geq n+1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=k]) &= \mathbf{P}([Y=k]\cap[X\leq n]) + \mathbf{P}([Y=k]\cap[X>n])\\
&= \mathbf{P}(\underbrace{[n=k]\cap[X\leq n]}_{\emptyset}) + \mathbf{P}([X=k]\cap[X>n])\\
&= \mathbf{P}(\varnothing) + \mathbf{P}([X=k]\cap[X>n])\\
&= \mathbf{P}([X=k]) \text{ car } [X>k]\subset[X>n]\\
&= pq^{k-1}
\end{aligned}$$

a.ii Reprenons la définition de Z : $Z = \max(n, X) \Longleftrightarrow Z = \begin{cases} n \text{ si } X \geq n \\ X \text{ si } X < n \end{cases}$

Nous avons $Z(\Omega) = [|1, n|]$. Reprenons encore l'ensemble $\{[X \leq n], [X > n]\}$ qui est un *système complet d'événements de probabilités non nulles* alors selon la *formule des probabilités totales :*

$$\forall k \in [[1, n]]\ \ \mathbf{P}([Z=k]) = \mathbf{P}([Z=k]\cap[X\geq n]) + \mathbf{P}([Z=k]\cap[X<n])$$

- Si $k = n$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=n]) &= \mathbf{P}([Z=n]\cap[X\geq n]) + \mathbf{P}([Z=n]\cap[X<n]) \\
&= \mathbf{P}([n=n]\cap[X\geq n]) + \mathbf{P}(\underbrace{[X=n]\cap[X<n]}_{\emptyset}) \\
&= \mathbf{P}([X\geq n]) + \mathbf{P}(\varnothing) \\
&= \mathbf{P}([X\geq n]) + 0 \\
&= q^{n-1}
\end{aligned}$$

- Si $k \in [|1, n-1|]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Z=k]\cap[X\geq n]) + \mathbf{P}([Z=k]\cap[X<n]) \\
&= \mathbf{P}(\underbrace{[n=k]\cap[X\geq n]}_{\emptyset}) + \mathbf{P}([X=k]\cap[X<n]) \\
&= \mathbf{P}(\varnothing) + \mathbf{P}([X=k]\cap[X>n]) \text{ car } [X=k]\subset[X<n] \\
&= \mathbf{P}([X=k]) \\
&= pq^{k-1}
\end{aligned}$$

Soit X_1 une variable aléatoire réelle indépendante de X qui suit elle aussi une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Trouver les lois suivies par :

b.i Soit X_1 une variable indépendante de X et de même loi. Cherchons la loi de $X_1 + X$. Nous avons $(X_1 + X)(\Omega) = \mathbb{N}_2$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}_2,\ \mathbf{P}([X+X_1=k]) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X=i]\cap[X_1=k-i]) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X=i]) \times \mathbf{P}([X_1=k-i]) \ \textit{par ind. de } X \textit{ et } X_1 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1}p * q^{k-i-1}p \\
&= p^2 \sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} \\
&= \boxed{(k-1)\,p^2 q^{k-2}}
\end{aligned}$$

b.ii Déterminons la loi de $W = \min(X, X_1)$.
Pour commencer $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([W=k]) &= \mathbf{P}([W\leq k]) - \mathbf{P}([W\leq k-1]) \\
&= \mathbf{P}([X\leq k]\cap[X_1\leq k]) - \mathbf{P}([X\leq k-1]\cap[X_1\leq k-1]) \\
&= (\mathbf{P}([X\leq k]))^2 - (\mathbf{P}([X\leq k-1]))^2 \ \textit{par ind. des VAR et } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_1) \\
&= (1-\mathbf{P}([X>k]))^2 - (1-\mathbf{P}([X>k-1]))^2 \\
&= \left(1-q^k\right)^2 - \left(1-q^{k-1}\right)^2 \\
&= \left(q^k - 2 + q^{k-1}\right)\left(q^k - q^{k-1}\right) \\
&= \boxed{pq^{k-1}\left(2 - q^{k-1} - q^k\right)}
\end{aligned}$$

b.iii Déterminons la loi de $T = \min(X, X_1)$.
Pour commencer :

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^* \ \mathbf{P}([T = k]) &= \mathbf{P}([T \geq k]) - \mathbf{P}([T \geq k+1]) \\
&= \mathbf{P}([X \geq k] \cap [X_1 \geq k]) - \mathbf{P}([X \geq k+1] \cap [X_1 \geq k+1]) \\
&= (\mathbf{P}([X \geq k]))^2 - (\mathbf{P}([X \geq k+1]))^2 \ \textit{par ind. des VAR et } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_1) \\
&= \left(q^{k-1}\right)^2 - \left(q^k\right)^2 \\
&= \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k \\
&= \left(q^2\right)^{k-1}\left(1 - q^2\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Selon (1) et (2) :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right)}$$

19 Loi de max, loi de min et fonction de répartition

a Soient X et Y deux variables géométriques de même paramètre p (nous poserons $q = 1 - p$) et indépendantes. Pour commencer déterminons la fonction de répartition associée à X que nous noterons F_X définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$.

Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ainsi :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \mathbf{P}([X > x]) = 1 - q^k & \text{si} \quad x \in [k, k+1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

car quand $x \geq k$ alors :

$$[X > x] \subset [X > k] \subset [X \geq k+1]$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}([X > x]) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ q^k & \text{si} \quad x \in [k, k+1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

b.i Soit $V = \max(X, Y)$, déterminons la fonction de répartition F_V de V sachant que $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$. F_V est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = \mathbf{P}([V \leq x])$ et :

$$\boxed{F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \left(1 - q^k\right)^2 & \text{si} \quad x \in [k, k+1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

car quand $x \in [k, k+1[$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([V \leq x]) &= \mathbf{P}([X \leq x] \cap [Y \leq x]) \\
&= (\mathbf{P}([X \leq x]))^2 \\
&= (1 - \mathbf{P}[X > x])^2 \\
&= \left(1 - q^k\right)^2
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.
Loi de V.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([V = k]) &= \mathbf{P}([V \leq k]) - \mathbf{P}([V \leq k-1]) \\
&= F_V(k) - F_V(k-1) \\
&= \left(1 - q^k\right)^2 - \left(1 - q^{k-1}\right)^2 \\
&= \left(q^k - 2 + q^{k-1}\right)\left(q^k - q^{k-1}\right) \\
&= \boxed{pq^{k-1}\left(2 - q^{k-1} - q^k\right)}
\end{aligned}$$

b.ii Pour commencer déterminons la fonction de répartition F_U de U sachant que :

$$U(\Omega) = \mathbb{N}^* \tag{3}$$

F_U est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = \mathbf{P}([U \leq x])$ et :

$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \left(q^k\right)^2 & \text{si} \quad x \in [k, k+1[\quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

car quand $x \in [k, k+1[\,, \forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} F_U(x) &= 1 - \mathbf{P}([U > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X > x] \cap [Y > x]) \\ &= 1 - (\mathbf{P}([X > x]))^2 \\ &= 1 - \left(q^k\right)^2 \end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \ \mathbf{P}([U = k]) &= \mathbf{P}([U \leq k]) - \mathbf{P}([U \leq k-1]) \\ &= F_U(k) - F_U(k-1) \\ &= 1 - \left(q^k\right)^2 - \left(1 - \left(q^{k-1}\right)^2\right) \\ &= \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k \\ &= \left(q^2\right)^{k-1}\left(1 - q^2\right) \end{aligned} \tag{4}$$

et selon (3) et (4) :

$$\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right)}$$

c

- Déterminons la loi de $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
  Tout d'abord $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([U > k]) &= \mathbf{P}([X_1 > k] \cap \ldots \cap [X_n > k]) \\ &= (\mathbf{P}([X_1 > k]))^n = \left(q^k\right)^n \end{aligned}$$

  et comme :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([U \geq k]) = \mathbf{P}([U = k]) + \mathbf{P}([U > k])$$

  alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([U = k]) = \mathbf{P}([U > k-1]) - \mathbf{P}([U > k])$$

  Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([U = k]) = \left(q^{k-1}\right)^n - \left(q^k\right)^n}$$

- Pour terminer déterminons la loi de $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
  Nous avons $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([V \leq k]) &= \mathbf{P}([X_1 \leq k] \cap \ldots \cap [X_n \leq k]) \\ &= (\mathbf{P}([X_1 \leq k]))^n \\ &= (1 - \mathbf{P}([X_1 > k]))^n \\ &= \left(1 - q^k\right)^n \end{aligned}$$

  et comme :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([V \leq k]) = \mathbf{P}([V = k]) + \mathbf{P}([V < k])$$

alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([V = k]) = \mathbf{P}([V \leq k]) - \mathbf{P}([V \leq k-1])$$

la formule reste valable pour $k = 1$ puisque $\mathbf{P}([V \leq 0]) = 0$ et $\mathbf{P}([V = 1]) = \mathbf{P}([V \leq 1])$ du fait de $V(\Omega)$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([V = k]) = \left(1 - q^k\right)^n - \left(1 - q^{k-1}\right)^n}$$

20 Covariance et inégalité

a Pour commencer :

$$\begin{aligned} X + Y + Z = 1 &\Longrightarrow X + Z = 1 - Y \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(X + Z) = \mathbb{V}(1 - Y) \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(X + Z) = \mathbb{V}(Y) \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Z) + 2Cov(X, Z) = \mathbb{V}(Y) \\ &\Longrightarrow 2Cov(X, Z) = (\underbrace{\mathbb{V}(Y) - \mathbb{V}(Z)}_{\ominus}) - \mathbb{V}(X) \\ &\Longrightarrow \boxed{Cov(X, Z) \leq 0} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} X + Y + Z = 1 &\Longrightarrow Y + Z = 1 - X \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(Y + Z) = \mathbb{V}(1 - X) \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(Y + Z) = \mathbb{V}(X) \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(Z) + 2Cov(Y, Z) = \mathbb{V}(X) \\ &\Longrightarrow 2Cov(Y, Z) = (\underbrace{\mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)}_{\ominus}) - \mathbb{V}(Z) \\ &\Longrightarrow \boxed{Cov(Y, Z) \leq 0} \end{aligned}$$

b Encore une fois !

$$\begin{aligned} X + Y + Z = 1 &\Longrightarrow X + Y = 1 - Z \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(1 - Z) \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(Z) \\ &\Longrightarrow \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2Cov(X, Y) = \mathbb{V}(Z) \\ &\Longrightarrow 2Cov(X, Y) = \mathbb{V}(Z) - (\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)) \end{aligned}$$

donc nous obtenons facilement l'équivalence :

$$\boxed{(Cov(X, Y) \geq 0) \Longleftrightarrow (\mathbb{V}(Z) \geq \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y))}$$

c Selon la première question :

$$2Cov(X, Z) = -\underbrace{((\mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(Y)) + \mathbb{V}(X))}_{\ominus} \Longrightarrow |2Cov(X, Z)| = \mathbb{V}(Z) \underbrace{-\mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(X)}_{\ominus}$$

d'où :

$$(2Cov(Y, Z) = -((\mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(X)) + \mathbb{V}(Y))) \Longrightarrow (|2Cov(Y, Z)| \leq \mathbb{V}(Z))$$

et :

$$2Cov\,(Y,Z) = -\underbrace{((\mathbb{V}\,(Z) - \mathbb{V}\,(X)) + \mathbb{V}\,(Y))}_{\ominus} \Longrightarrow |2Cov\,(Y,Z)| = \mathbb{V}\,(Z)\underbrace{-\mathbb{V}\,(X) + \mathbb{V}\,(Y)}_{\oplus}$$

donc :

$$2Cov\,(Y,Z) = -\left((\mathbb{V}\,(Z) - \mathbb{V}\,(X)) + \mathbb{V}\,(Y)\right) \Longrightarrow |2Cov\,(Y,Z)| \geq \mathbb{V}\,(Z)$$

par *transitivité de* $\leq$ nous obtenons que :

$$\boxed{|Cov\,(X,Z)| \leq |Cov\,(Y,Z)|}$$

21 Coefficient de correlation

Calculons $\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \leq j$, $\rho\,(Y_i, Y_j)$ où $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = X_i X_{i+1}$ avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\,(p)$, les variables X_i étant indépendantes.

Nota bene : L'inégalité $i \leq j$ s'explique par le fait que le coefficient de corrélation linéaire est *symétrique* en Y_i et Y_j et donc, il est totalement inutile d'effectuer tous les calculs en double ! A bon entendeur...

S'impose donc à nous, une discussion.

- Si $j = i$:

$$\begin{aligned}
\rho\,(Y_i, Y_j) &= \rho\,(Y_i, Y_i) \\
&= \frac{Cov\,(Y_i, Y_i)}{\sigma\,(Y_i)\,\sigma\,(Y_i)} \\
&= \frac{\mathbb{V}\,(Y_i)}{\mathbb{V}\,(Y_i)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Si $j > i+1$, $\rho\,(Y_i, Y_j) = 0$ car les variables Y_i, Y_j sont clairement indépendantes[1].
- Si $j = i+1$:

$$Cov\,(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}\left(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}\right) - \mathbb{E}\,(Y_i)\,\mathbb{E}\,(Y_j)$$

  avec :

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{N}^*,\quad Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\,(\mathbf{P}\,([Y_i = 1])) &\Longrightarrow Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\,(\mathbf{P}\,([X_i X_{i+1} = 1])) \\
&\Longrightarrow Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left((\mathbf{P}\,([X_i = 1]))^2\right) \\
&\Longrightarrow Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p^2\right) \\
&\Longrightarrow \mathbb{E}\,(Y_i) = p^2 \text{ et } \mathbb{V}\,(Y_i) = p^2\left(1 - p^2\right)
\end{aligned}$$

  d'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}\right) &= \mathbb{E}\,(X_i)\,\mathbb{E}\left(X_{i+1}^2\right)\mathbb{E}\,(X_{i+2}) \\
&= p^3
\end{aligned}$$

  en effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_{i+1}^2\right) &= \mathbf{P}\left(\left[X_{i+1}^2 = 1\right]\right) \\
&= \mathbf{P}\,([X_{i+1} = 1]) \\
&= p
\end{aligned}$$

  Finalement si $j = i+1$:

$$\begin{aligned}
\rho\,(Y_i, Y_j) &= \frac{p^3 - p^4}{p^2\,(1 - p^2)} \\
&= \frac{p}{1+p}
\end{aligned}$$

[1] Il n'y a pas de "chevauchement" des indices !

Conclusion :

$$\boxed{\rho\left(Y_i, Y_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ \dfrac{p}{1+p} & \text{si} \quad j = i+1 \\ 0 & \text{si} \quad j > i+1 \end{cases}}$$

22 Loi d'un quotient de variables indépendantes

a Tout d'abord $U(\Omega) = \left\{\frac{i}{j},\ (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\} = \mathbb{Q}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\forall \left(\frac{i}{j}\right) \in U(\Omega),\ \mathbf{P}\left(\left[U = \frac{i}{j}\right]\right) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*} ([X = ki] \cap [Y = kj])\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}([X = ki]) \times \mathbf{P}([Y = kj]) \ \textit{par } \sigma - \textit{add. et ind. de } X \textit{ et } Y \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} q^{ki-1} q^{kj-1} p^2 \\
&= \frac{p^2}{q^2} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} q^{k(i+j)} \\
&= \frac{p^2}{q^2} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(q^{i+j}\right)^k \\
&= \frac{p^2}{q^2} \times \frac{q^{i+j}}{1 - q^{i+j}} \\
&= \boxed{\frac{p^2 q^{i+j-2}}{1 - q^{i+j}}}
\end{aligned}$$

b Au lieu de vous lancer dans le théorème de transfert, ce qui serait pure folie, vu la "tête" de la série en jeu, voici un moyen infaillible et très classique de vous en sortir.

Comme X et Y sont indépendantes, alors, d'après le cours, X et $\frac{1}{Y}$ le sont aussi, et sous reserve d'existence des espérances de ces variables, alors $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$ existe et vaut :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)}$$

L'espérance de X ne pose aucun problème du fait de la loi géométrique. Voyons celle de $\frac{1}{Y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Y} \text{ admet une espérance} &\iff \sum_k \frac{1}{k}\mathbf{P}([Z = k]),\ k \in \mathbb{N}^* \text{ est une SATP convergente} \\
&\iff \sum_k \frac{1}{k} pq^{k-1},\ k \in \mathbb{N}^* \text{ est une SATP convergente}
\end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \sum_{k\geq 1} \frac{pq^{k-1}}{k}$. Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}pq^{k-1} = \frac{p}{q} \times \frac{q^k}{k}$ et sans être connue la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ a été déjà étudiée dans une fiche précédante, et nous avions pu conclure qu'elle convergeait quand $x \in [-1, 1[$ de somme égale à $-\ln(1-x)$ (*c'est la série logarithmique*).

Appliqué ici avec $x = q$, le résultat précédent nous permet de dire que $\frac{1}{Y}$ admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) &= \sum_{k\geq 1}\frac{pq^{k-1}}{k}\\ &= -\frac{p}{q}\ln(1-q)\end{aligned}$$

Conclusion : U admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)\\ &= \frac{1}{p}\times -\frac{p}{q}\ln(1-q)\\ &= \boxed{\frac{\ln p}{p-1}}\end{aligned}$$

Il est de notoriété publique que $\forall x>0,\ \ln x\leq x-1$ en utilisant le fait que la fonction ln est *concave* sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'interprétation géométrique est que la courbe représentative de ln est en-dessous de toutes ses tangentes, elle en particulier en-dessous de celle en 1 d'équation $y=x-1$. C'est pour cela que :

$$\begin{aligned}\forall p\in\,]0,1[\,,\ \ln p<p-1 &\iff \frac{\ln p}{p-1}>1\\ &\iff \boxed{\mathbb{E}(U)>1}\end{aligned}$$

23 Loi du min d'un couple aléatoire

Voir l'exercice 24 b.ii.

24 Loi d'un couple, loi marginale, loi d'une différence

a Comme d'après l'énoncé $\mathbf{P}_{[Y=n]}([X=k])=0$ lorsque $k\geq n+1$, $n\in\mathbb{N}$ alors $([X=k]\cap[Y=n])=\varnothing$ quand $k\geq n+1$, $n\in\mathbb{N}$ cela entraîne directement que $(X,Y)(\Omega)=\left\{(k,n)\in\mathbb{N}^2\mid k\leq n\right\}$. En supposant *à priori* que $\mathbf{P}([Y=n])\neq 0$ la *formule des probabilités composées* nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned}\forall(k,n)\in(X,Y)(\Omega),\ \mathbf{P}([X=k]\cap[Y=n]) &= \mathbf{P}_{[Y=n]}([X=k])\,\mathbf{P}([Y=n])\\ &= \boxed{\frac{1}{n+1}\mathbf{P}([Y=n])}\end{aligned}$$

b Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \leq Y]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{n \in Y(\Omega)} \cup [X \leq n] \cap [Y = n]\right) \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X \leq n] \cap [Y = n]) \text{ par } \sigma - \textit{additivité} \text{ de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \mathbf{P}_{[Y=n]}([X \leq n]) \times \mathbf{P}([Y = n]) \text{ par la FPC} \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k])\right) \times \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\right) \times \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \sum_{n \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \boxed{1} \text{ puisque } Y \text{ est une variable aléatoire}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Soit $a \in]0,1[$, on suppose maintenant que $\mathbf{P}([Y = n]) = (1-a)^2 (n+1) a^n$, déterminons la loi de X.

- $\mathcal{L}(X)$
  Pour commencer, il est clair que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
  Introduisons le *système complet d'événements à probabilités non nulles* $\{[Y = n], n \in \mathbb{N}\}$, alors selon la *formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbf{P}([X = k]) &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) \times \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= 0 + \sum_{n \geq k} \mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) \times \mathbf{P}([Y = n]) \\
&= \sum_{n \geq k} \frac{1}{n+1} (1-a)^2 (n+1) a^n \\
&= (1-a)^2 \sum_{n \geq k} a^n \ (\textit{somme d'une série géo. de raison } a, \ |a| < 1 \textit{ donc cv}) \\
&= (1-a)^2 a^k \left(\frac{1}{1-a}\right) \\
&= (1-a) a^k
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(1-a)}$$

- $\mathcal{L}(Y - X)$
  Comme d'après la remarque déjà utilisée à la première question.
  $\mathbf{P}_{[Y=n]}([X = k]) = 0$ lorsque $k \geq n+1$, $n \in \mathbb{N}$ alors $(Y - X)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Puisque $\forall (k,i) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}([Y=k+i]) \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Y-X=k]) &= \sum_{i\geq 0} \mathbf{P}([Y=k+i] \cap [X=i]) \\
&= \sum_{i\geq 0} \mathbf{P}_{[Y=k+i]}([X=i]) \times \mathbf{P}([Y=k+i]) \\
&= \sum_{i\geq 0} \frac{1}{k+i+1} \times (1-a)^2 (k+i+1)\, a^{k+i} \\
&= (1-a)^2 a^k \sum_{i\geq 0} a^i \ \textit{(somme d'une série géo. de raison } a,\ |a|<1 \textit{ donc cv)} \\
&= \frac{(1-a)^2 a^k}{1-a} \\
&= (1-a)\, a^k
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y - X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(1-a)}$$

25 Somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi : formule de Waldt

Exercice extrêmement technique et à priori déconcertant car il met en jeu une somme aléatoire de longueur aléatoire puisque celle-ci dépend d'une variable aléatoire.

- Pour commencer, déterminons la loi de Y.
  Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  L'ensemble $\{[N=n],\ n \in N(\Omega)\}$ constitue un *SCE de probabilités à priori non nulles*, et d'après la *formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Y=k]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{n\in N(\Omega)} ([Y=k] \cap [N=n]) \right) \\
&= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}([Y=k] \cap [N=n]) \ \textit{par } \sigma - \textit{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{N} X_i = k \right] \cap [N=n] \right) \\
&= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k \right] \cap [N=n] \right) \\
&= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k \right] \right) \times \mathbf{P}([N=n]) \ \textit{puisquelesVAR } X_i \textit{ et } N \textit{ sont ind.}
\end{aligned}$$

- Espérance de Y.

$$Y \text{ admet une espérance} \Longleftrightarrow \sum_k k\mathbf{P}([Y=k]) \text{ est une SATP convergente}$$

En cas de convergence $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\geq 0} k\mathbf{P}([Y=k])$. Introduisons la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned}
\forall m \in \mathbb{N},\ S_m &= \sum_{k=0}^{m} k\mathbf{P}([Y=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{m} k \left(\sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k \right] \right) \right) \times \mathbf{P}([N=n])
\end{aligned}$$

et comme $N(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut sans hésiter inverser l'ordre de sommation, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{N},\ S_m &= \sum_{n\in N(\Omega)} \sum_{k=0}^{m} k\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \times \mathbf{P}([N=n]) \\ &= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}([N=n]) \left(\sum_{k=0}^{m} k\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)\right) \\ &= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}([N=n]) \times \mathbb{E}_m\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\end{aligned}$$

en introduisant la suite $\left(\mathbb{E}_m\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall m \in \mathbb{N},\quad \mathbb{E}_m\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{k=0}^{m} k\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$$

qui converge vers $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mathbb{E}(X)$ car selon l'énoncé, X admet une espérance et les variables X_i suivent la même loi que X.
Ainsi $\lim_{m\to+\infty} S_m$ existe et est finie, de valeur :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} S_m &= \sum_{n\in N(\Omega)} n\mathbf{P}([N=n])\,\mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{E}(X) \sum_{n\in N(\Omega)} n\mathbf{P}([N=n]) \\ &= \mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(N)\end{aligned}$$

l'existence de $\mathbb{E}(N)$ ne posant aucun problème du fait que N est une variable discrète finie.
Conclusion : *Y admet une espérance qui vaut :*

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(N)}$$

- Variance de Y.

$$Y \text{ admet une variance} \Longleftrightarrow Y^2 \text{ admet une espérance}$$

et :

$$Y^2 \text{ admet une espérance} \Longleftrightarrow \sum_k k^2\mathbf{P}([Y=k]) \text{ est une SATP convergente}$$

En cas de convergence $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \sum_{k\geq 0} k^2\mathbf{P}([Y=k])$. Introduisons la suite $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{N},\ T_m &= \sum_{k=0}^{m} k^2\mathbf{P}([Y=k]) \\ &= \sum_{k=0}^{m} k^2 \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \times \mathbf{P}([N=n])\end{aligned}$$

et comme $N(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut sans hésiter inverser l'ordre de sommation, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{N},\ T_m &= \sum_{n\in N(\Omega)} \sum_{k=0}^{m} k^2\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \times \mathbf{P}([N=n]) \\ &= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}([N=n]) \left(\sum_{k=0}^{m} k^2\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)\right) \\ &= \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbf{P}([N=n]) \times \mathbb{E}'_m\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right)\end{aligned}$$

en introduisant la suite $\left(\mathbb{E}'_m\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall m \in \mathbb{N},\quad \mathbb{E}'_m\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = \sum_{k=0}^{m} k^2\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$$

Cette suite converge vers :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j\right)\\
&= n\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}\left(X_iX_j\right)\\
&= n\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_j\right)\ \textit{par ind. des VAR } X_i\\
&= n\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\binom{n}{2}\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2
\end{aligned}$$

car selon l'énoncé, X admet une variance et les variables X_i suivent la même loi que X. Ainsi $\lim\limits_{m\to+\infty} T_m$ existe et est finie, de valeur :

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} T_m &= \sum_{n\in N(\Omega)}\mathbf{P}\left([N=n]\right)\times\left(n\mathbb{E}\left(X^2\right)+2\tbinom{n}{2}\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right)\sum_{n\in N(\Omega)} n\mathbf{P}\left([N=n]\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\sum_{n\in N(\Omega)} n\left(n-1\right)\mathbf{P}\left([N=n]\right)\\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(N\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\mathbb{E}\left(N\left(N-1\right)\right)
\end{aligned}$$

l'existence de $\mathbb{E}\left(N\left(N-1\right)\right)$, obtenue par le *théorème de transfert*, ne posant aucun problème du fait que N est une variable discrète finie.
Conclusion : Y^2 admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(N\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\mathbb{E}\left(N\left(N-1\right)\right)$ et pour finir Y admet une variance qui vaut $\mathbb{V}\left(Y\right) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(Y\right)\right)^2$ par *Huygens-Koenig,* soit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(Y\right) &= \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(N\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\mathbb{E}\left(N\left(N-1\right)\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(N\right)\right)^2\\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(N\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\left(\mathbb{E}\left(N^2\right) - \mathbb{E}\left(N\right)\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\left(\mathbb{E}\left(N\right)\right)^2\\
&= \mathbb{E}\left(N\right)\left(\mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\left(\mathbb{E}\left(N^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(N\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbb{V}\left(Y\right) = \mathbb{V}\left(X\right)\mathbb{E}\left(N\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\mathbb{V}\left(N\right)}$$