

Correction des exercices de la fiche 7

1 Densité de probabilité

f est une densité de probabilité si :

- f est continue presque partout,
 - Ici la continuité de f sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* est triviale et comme $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = f(0)$, f est continue sur \mathbb{R} .
- f est positive sur \mathbb{R} ,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergente et égale à 1.

– Ici $\int_{\mathbb{R}} f$ converge car par définition de f , l'étude de la convergence de $\int_{\mathbb{R}} f$ se réduit à celle de $\int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} dt$ qui ne pose aucun problème. En effet introduisons :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) = \int_0^\alpha te^{-t^2/2} dt \end{aligned}$$

Nous avons $\forall \alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \int_0^\alpha te^{-t^2/2} dt \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \end{aligned}$$

et par passage à la limite de $\varphi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) = 1$. Comme la limite existe et est finie, $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1. A savoir que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha te^{-t^2/2} dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

f est bien une densité de probabilité

2 Recherche d'un paramètre

a Comme f est une densité de probabilité, nous avons en particulier :

- $f \geq 0$ sur \mathbb{R} ce qui équivaut à $a \geq 0$. a s'appelle **constante de normalisation**.
- $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1. En effet :

$$\int_{\mathbb{R}} f \text{ converge} \iff \int_0^3 f \text{ converge}$$

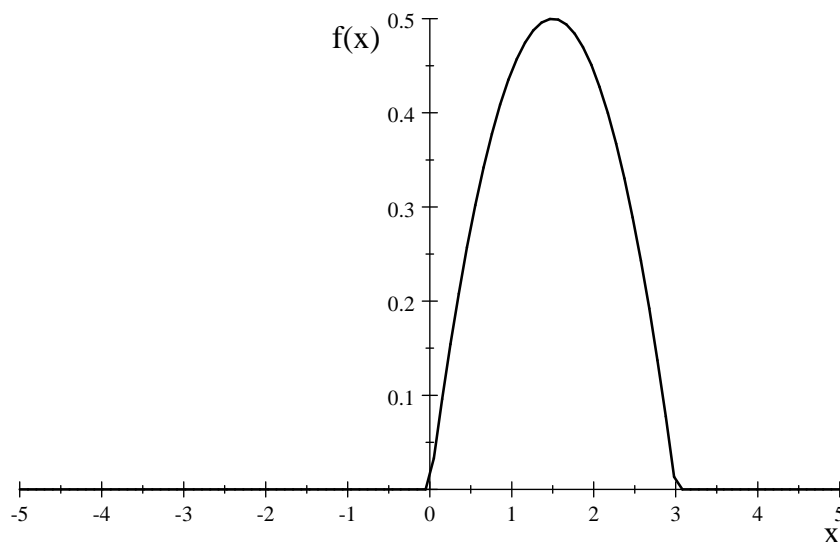
Car f coïncide avec la fonction nulle en dehors du segment $[0, 3]$. Or $\int_0^3 f$ converge en tant qu'intégrale d'une fonction polynomiale continue sur le segment $[0, 3]$, et

$$\int_0^3 a(3x - x^2) dx = \frac{9a}{2}$$

Conclusion :

$$\int_{\mathbb{R}} f = 1 \iff a = \frac{2}{9}$$

b Nous avons :



c Par théorème :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([1 < X < 2]) &= \int_1^2 \frac{2}{9} (3x - x^2) dx \\ &= \boxed{\frac{13}{27}} \end{aligned}$$

3 Fonction de répartition et calcul de probabilités

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([1.5 < X < 2.5]) &= F_X(2.5) - F_X(1.5) \\ &= \left(\frac{2.5-1}{2}\right) - \left(\frac{1.5-1}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([2.5 < X < 3.5]) &= F_X(3.5) - F_X(2.5) \\ &= 1 - \left(\frac{2.5-1}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

4 Changement de variable affine

Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire.

Nous avons $Y(\Omega) = [-1, 0]$, donc :

- si $x < -1$: $(Y \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \in [-1, 0]$: $(Y \leq x) = (-X \leq x) = [X \geq -x] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque X est une variable à densité,
- si $x > 0$: $(Y \leq x) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ainsi selon ces trois points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \mathbf{P}([-X \leq x]) = \mathbf{P}([X \geq -x]) = 1 - F_X(-x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 - \left(\frac{-x-0}{1-0}\right) = x+1 = \frac{x+1}{0-(-1)} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A ce niveau là nous pouvons conclure de suite en disant que :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité suivant la loi } Y \leftrightarrow \mathcal{U}([-1, 0])}$$

5 Changement de variable puissance

Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire.

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc :

- si $x < 0$: $(Y \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \geq 0$: $(Y \leq x) = (X^2 \leq x) = [-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque X est une variable à densité.

Ainsi selon ces deux points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([X^2 \leq x]) = \mathbf{P}([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Y = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Y = 1$,
- F_Y est continue sur \mathbb{R}_+^* (fonction nulle),
- F_Y est continue sur \mathbb{R}_+ (différence et composition de $x \mapsto \pm\sqrt{x} : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}_+ et $F_X : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{0^-} F_Y = 0 = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0)$, donc F_Y est continue sur \mathbb{R} .

- D'autre part F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en 0 (à cause de la présence de la racine carrée) ce qui fait qu'elle a toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_Y une densité de Y et nous poserons que $f_Y(0) = 0$, soit :

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour finir montrons que Z est une variable à densité dont nous déterminerons une densité. Nous avons $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc :

- si $x < 0$: $(Z \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \geq 0$: $(Z \leq x) = (Z^3 \leq x) = [X \leq \sqrt[3]{x}] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque X est une variable à densité.

Ainsi selon ces deux points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([X^3 \leq x]) = \mathbf{P}([X \leq \sqrt[3]{x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt[3]{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{car } X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Z = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Z = 1$,
- F_Z est continue sur \mathbb{R}_+ (fonction nulle),
- F_Z est continue sur \mathbb{R}_+ (par composition de $x \mapsto \sqrt[3]{x} : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}_+ et $F_X : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{0^-} F_Z = 0 = \lim_{0^+} F_Z = F_Z(0)$, donc F_Z est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Z est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en 0 (à cause de la présence de la racine cubique) ce qui fait qu'elle a toutes les propriétés requises pour affirmer que Z est une variable à densité dont une densité f_Z est obtenue par dérivation de F_Z sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_Z une densité de Z et nous poserons que $f_Z(0) = 0$, soit :

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f_X(\sqrt[3]{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} e^{-\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

6 Densité paramétrée et changement de variable quadratique

a Comme f est une densité de probabilité, nous avons en particulier :

- $f \geq 0$ sur $\mathbb{R} \iff k \geq 0$,
- $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1. En effet :

$$\int_{\mathbb{R}} f \text{ converge} \iff \int_{-1}^{+\infty} f \text{ converge}$$

Car f coïncide avec la fonction nulle en dehors du segment de l'intervalle $[-1, +\infty[$. Introduisons :

$$\begin{aligned} \varphi :]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} k e^{-t} dt \end{aligned}$$

Nous avons $\forall \alpha > -1$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \int_{-1}^{\alpha} k e^{-t} dt \\ &= k(-e^{-\alpha} + e) \end{aligned}$$

et par passage à la limite de $\varphi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) = ke$. Comme la limite existe et est finie, nous confirmons bien que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$ converge de valeur égale à ke et :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f = 1 \iff k = \frac{1}{e}}$$

b

- Déterminons $\mathbb{E}(X)$.

X admet une espérance si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ est absolument convergente. En cas de convergence $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$. Or $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente si et seulement si $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{e} x e^{-x} dx$ est absolument convergente car f est nulle sur $]-\infty, -1[$. Introduisons :

$$\begin{aligned} \psi :]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \psi(\alpha) = \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} t e^{-t} dt \end{aligned}$$

Nous avons $\forall \alpha > -1$,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} t e^{-t} dt \\ &= -e^{-\alpha-1}(\alpha + 1) \end{aligned}$$

et par passage à la limite de $\psi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \psi(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -(\alpha + 1) e^{-\alpha-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car :

$$-(\alpha + 1) e^{-\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha e^{-\alpha}}{e}$$

avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-\alpha e^{-\alpha}}{e} = 0$.

Conclusion : Comme la limite existe et est finie :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et est égale à } 0}$$

- Pour terminer, calculons en cas d'existence, $\mathbb{V}(X)$.

$$\begin{aligned} X \text{ admet une variance} &\iff X^2 \text{ admet une espérance} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ est convergente} \\ &\iff \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{e} x^2 e^{-x} dx \text{ est cvte car } f = 0 \text{ sur }]-\infty, -1[\end{aligned}$$

En cas de convergence $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ et la variance de X qui existerait par voie de conséquence serait donnée par le *théorème de Huygens-Koenig* :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Introduisons :

$$\begin{aligned} \chi :]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \chi(\alpha) = \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} t^2 e^{-t} dt \end{aligned}$$

Procédons par intégration par parties en posant $u : t \mapsto t^2 \implies u' : t \mapsto 2t$ et $v' : t \mapsto e^{-t} \iff v : t \mapsto -e^{-t}$ avec $(u, v) \in (\mathcal{C}^1([-1, \alpha], \mathbb{R}))^2$. Ainsi $\forall \alpha > -1$,

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) &= \frac{1}{e} \int_{-1}^{\alpha} t^2 e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{e} \left([-t^2 e^{-t}]_{-1}^{\alpha} + 2 \int_{-1}^{\alpha} t e^{-t} dt \right) \\ &= -\alpha^2 e^{-\alpha} + e + 2\psi(\alpha) \end{aligned}$$

par passage à la limite de $\chi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \chi(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -\alpha^2 e^{-\alpha-1} + 1 + 2\psi(\alpha) \\ &= 1 \end{aligned}$$

car :

$$-\alpha^2 e^{-\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha^2 e^{-\alpha}}{e}$$

avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-\alpha^2 e^{-\alpha}}{e} = 0$ et rappelons que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \psi(\alpha) = 0$.

Conclusion : Comme la limite existe et est finie, X^2 admet une espérance égale à 1 et donc :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) \text{ existe, égale à } 1}$$

c Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire.
Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc :

- si $x < 0$: $(Y \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \geq 0$: $(Y \leq x) = (X^2 \leq x) = [-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque X est une variable à densité.

Ainsi selon ces deux points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([X^2 \leq x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Y = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Y = 1$,
- F_Y est continue sur \mathbb{R}_+^* (fonction nulle),
- F_Y est continue sur \mathbb{R}_+ (différence et composition de $x \mapsto \pm\sqrt{x} : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}_+ et $F_X : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{0^-} F_Y = 0 = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0)$, donc F_Y est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en 0 (à cause de la présence de la racine carrée) ce qui fait qu'elle a toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_Y une densité de Y et nous poserons que $f_Y(0) = 0$, en notant bien l'expression de f_X , quand $x \geq 0$, va dépendre des cas où $x \in [0, 1]$ et où $x > 1$. Cela donne :

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}f_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \cup \{1\} \\ \frac{1}{2e\sqrt{x}}(e^{-\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}) & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{1}{2e\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}} \end{aligned}$$

7 Changement de variable exponentiel

Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire.

Nous avons $Y(\Omega) = [1, e^3]$ après une étude rapide de $\varphi : x \mapsto \exp(x^2 - 1)$ sur $[1, 2]$, donc :

- si $x < 1 : (Y \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \in [1, e^3] :$

$$\begin{aligned} (Y \leq x) &= (\exp(X^2 - 1) \leq x) \\ &= (X^2 - 1 \leq \ln x) \\ &= (X^2 \leq \ln x + 1) \\ &= [-\sqrt{\ln x + 1} \leq X \leq \sqrt{\ln x + 1}] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ puisque } X \text{ est une variable à densité} \end{aligned}$$

- si $x \geq e^3$: $(Y \leq x) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ainsi selon ces trois points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{\ln x + 1} \leq X \leq \sqrt{\ln x + 1}]) & \text{si } x \in [1, e^3] \\ 1 & \text{si } x > e^3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ F_X(\sqrt{\ln x + 1}) - F_X(-\sqrt{\ln x + 1}) & \text{si } x \in [1, e^3] \\ 1 & \text{si } x > e^3 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Y = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Y = 1$,
- F_Y est continue sur $] -\infty, 1[$ (fonction nulle),
- F_Y est continue sur $] e^3, +\infty[$ (fonction constante égale à 1),
- F_Y est continue sur $[1, e^3]$ (différence et composition de $x \mapsto \pm\sqrt{\ln x + 1} : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}_+^* et $F_X : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{1^-} F_Y = 0 = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1)$,
- $\lim_{e^{3-}} F_Y = 0 = \lim_{e^{3+}} F_Y = F_Y(e^3)$, donc F_Y est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut être en 1 et e^3 (à cause de la présence de la racine carrée) ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R} - \{1, e^3\}$ nous obtenons f_Y une densité de Y et nous poserons que $f_Y(1) = f_Y(e^3) = 0$. Cela donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]1, e^3[\\ \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} f_X(\sqrt{\ln x + 1}) + \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} f_X(-\sqrt{\ln x + 1}) & \text{si } x \in]1, e^3[\end{cases}$$

Notons que lorsque $x \in]1, e^3[$, $-\sqrt{\ln x + 1} \notin [1, 2]$ et :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-1} & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [1, 2] \end{cases}$$

Donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]1, e^3[\\ \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} & \text{si } x \in]1, e^3[\end{cases}$$

8 Valeur absolue d'une variable à densité

Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire.

Nous avons $Y(\Omega) = [0, 1]$ et :

- si $x < 0$, $([Y \leq x]) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \in [0, 1]$, $([Y \leq x]) = (|[X| \leq x]) = ([-x \leq X \leq x]) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque X est une variable à densité,
- si $x > 1$, $([Y \leq x]) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ainsi selon ces trois points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}([-x \leq X \leq x]) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ F_X(x) - F_X(-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Y = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Y = 1$,
- F_Y est continue sur $] -\infty, 1[$ (fonction nulle),
- F_Y est continue sur $] 1, +\infty[$ (fonction constante égale à 1),
- F_Y est continue sur $[0, 1]$ (différence et composition de $x \mapsto \pm x : \mathcal{C}^0$ sur $[0, 1]$ et $F_X : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{1^-} F_Y = 0 = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1)$,
- $\lim_{0^-} F_Y = 0 = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0)$, donc F_Y est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut être en 0 et 1 ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ nous obtenons f_Y une densité de Y et nous poserons que $f_Y(0) = f_Y(1) = 0$. Cela donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ f_X(x) + f_X(-x) & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

quand $x \in]0, 1[$, $f_X(x) = 1 - x$ et $f_X(-x) = 1 - x$ alors :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ 2 - 2x & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

9 Changement polynomial

Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire.

Nous avons $Y(\Omega) = [1, 2]$ et :

- si $x < 1$, $(Y \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \in [1, 2]$, $(Y \leq x) = (X^2 + 1 \leq x) = ([-\sqrt{x-1} \leq X \leq \sqrt{x-1}]) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque X est une variable à densité,
- si $x > 2$, $(Y \leq x) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ainsi selon ces trois points Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{x-1} \leq X \leq \sqrt{x-1}]) & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ F_X(\sqrt{x-1}) - F_X(-\sqrt{x-1}) & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Y = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Y = 1$,
- F_Y est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle),
- F_Y est continue sur $]2, +\infty[$ (fonction constante égale à 1),
- F_Y est continue sur $[1, 2]$ (différence et composition de $x \mapsto \pm\sqrt{x-1} : \mathcal{C}^0$ sur $[1, 2]$ et $F_X : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{1^-} F_Y = 0 = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1)$,
- $\lim_{2^-} F_Y = 0 = \lim_{2^+} F_Y = F_Y(2)$ donc F_Y est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut être en 1 et 2 (à cause de la présence de la racine carrée) ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_Y une densité de Y et nous poserons que $f_Y(1) = f_Y(2) = 0$. Cela donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} f_X(\sqrt{x-1}) + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} f_X(-\sqrt{x-1}) & \text{si } x \in]1, 2[\end{cases}$$

En rappelant que :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

quand $x \in]1, 2[$, $\sqrt{x-1} \in]0, 1[$ et $-\sqrt{x-1} \in]-1, 0[$ alors :

$$\begin{aligned}
 f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{2} & \text{si } x \in]1, 2[\end{cases} \\
 &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x \in]1, 2[\end{cases}}
 \end{aligned}$$

10 Variable à densité et antirépartition

Par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

où f est une densité de X . Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

Comme X est à valeur dans \mathbb{R}^+ , l'espérance qui existe vaut $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} tf(t) dt$. Nous avons alors:

$$0 \leq x(1 - F(x)) \leq x \int_x^{+\infty} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} tf(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt - \int_{-\infty}^x tf(t) dt \right) \\
 &= \mathbb{E}(X) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x tf(t) dt \\
 &= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Le *théorème d'encadrement* nous permet alors de dire que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0}$$

Montrer pour terminer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t]) dt$ converge et vaut $\mathbb{E}(X)$. Pour cela introduisons :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^\alpha \mathbf{P}([X > t]) dt = \int_0^\alpha (1 - F_X(t)) dt$$

Procédons par intégration par parties en posant $u : t \mapsto 1 - F_X(t) \implies u' : t \mapsto -f(t)$ et $v' : t \mapsto 1 \iff v : t \mapsto t$ avec $(u, v) \in (\mathcal{C}^1([0, \alpha], \mathbb{R}))^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha > 0, \quad \int_0^\alpha \mathbf{P}([X > t]) dt &= \left([t(1 - F_X(t))]_0^\alpha + \int_0^\alpha tf(t) dt \right) \\
 &= \alpha(1 - F_X(\alpha)) + \int_0^\alpha tf(t) dt
 \end{aligned}$$

par passage à la limite quand α tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \mathbf{P}([X > t]) dt &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha(1 - F_X(\alpha)) + \int_0^\alpha tf(t) dt \\
 &= 0 + \int_0^{+\infty} tf(t) dt \\
 &= \mathbb{E}(X)
 \end{aligned}$$

Conclusion : Comme la limite existe et est finie,

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t]) \text{ converge et vaut } \mathbb{E}(X)$$

11 Vecteur aléatoire exponentiel

a $\mathcal{L}(Y_n)$.

Montrons pour commencer que Y_n est une variable aléatoire.

Nous avons $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et :

- si $x < 0$, $(Y_n \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

- si $x \in \mathbb{R}_+$, $(Y_n \leq x) = (\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) = \overline{(\min(X_1, \dots, X_n) > x)} = \bigcap_{k=1}^n \overline{[X_k > x]} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

puisque pour tout k , X_k est une variable à densité et par stabilité de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour l'intersection et la complémentarité.

Ainsi selon ces deux points Y_n est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_{Y_n} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = \mathbf{P}([Y_n \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathbf{P}([Y_n > x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{les VARAD } X_k \text{ sont indépendantes} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^n \mathbf{P}([X_k > x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^n (1 - F_{X_k}(x)) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^n (1 - (1 - e^{-\lambda x})) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^n (e^{-\lambda x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$Y_n \hookrightarrow \varepsilon(n\lambda)$$

D'après le cours :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{(n\lambda)^2}$$

b C'est une question de cours "ultra-classique". A savoir, la stabilité de la loi gamma pour la somme, nous permet de dire que :

$$\boxplus_{k=1}^n \Gamma(b, \tau_k) = \Gamma\left(b, \sum_{k=1}^n \tau_k\right)$$

et comme $\Gamma(b, 1) = \varepsilon\left(\frac{1}{b}\right)$ alors :

$$\boxed{S \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)}$$

12 Variable à densité et partie entière

Précisons la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X(\omega) \rfloor$ désigne la partie entière de $X(\omega)$.

Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor = k) \\ &= \mathbf{P}(k \leq X < k+1) \text{ par définition de la partie entière} \\ &= F_X(k+1) - F_X(k) \\ &= 1 - e^{-\lambda(k+1)} - (1 - e^{-\lambda k}) \\ &= e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\ &= e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(1 - e^{-\lambda})}$$

ou bien :

$$\boxed{Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(1 - e^{-\lambda})}$$

- Déterminons celle de $Z = X - Y$.
Comme $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ (partie décimale de x) par suite $Z(\Omega) = [0, 1[$.
- Si $x < 0$, $(Z \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si $x \geq 1$, $(Z \leq x) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} (Z \leq x) &= (X - Y \leq x) \\ &= \left((X - \lfloor X \rfloor \leq x) \cap \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \lfloor X \rfloor = k \right) \right) \\ &= \left((X \leq x + k) \cap \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} k \leq X < k+1 \right) \right) \\ &= \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} ([k \leq X \leq x + k]) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ puisque } X \text{ est une VARAD et stabilité de } \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ pour } \bigcup \end{aligned}$$

Ainsi selon ces trois points Z est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Z définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0, 1[, \mathbf{P}([Z \leq x]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([k \leq X \leq x+k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(x+k) - F_X(k)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - e^{-\lambda(x+k)} - (1 - e^{-\lambda k})) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda x}) \\
&= (1 - e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^k \text{ série géométrique de raison } e^{-\lambda} \text{ avec } |e^{-\lambda}| < 1 \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Z = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Z = 1$,
- F_Z est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle),
- F_Z est continue sur $[1, +\infty[$ (fonction constante égale à 1),
- F_Z est continue sur $[0, 1[$ (composition de $x \mapsto -\lambda x : \mathcal{C}^0$ sur $[0, 1[$ et $\exp : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{0^-} F_Z = 0 = \lim_{0^+} F_Z = F_Z(0)$,
- $\lim_{1^-} F_Z = 1 = \lim_{1^+} F_Z = F_Z(1)$ donc F_Z est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Z est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut être en 0 et 1 ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Z est une variable à densité dont une densité f_Z est obtenue par dérivation de F_Z sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_Z une densité de Z et nous poserons que $f_Z(0) = f_Z(1) = 0$. Cela donne :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \lambda \frac{e^{-x\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

13 Vecteur aléatoire à densité

a Déterminons $\mathbb{E}(S_n)$.

- Pour commencer, déterminons $\forall i \in [1, n]$, $\mathbb{E}(X_i)$:

$$X_i \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ est absolument convergente}$$

En cas de convergence $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$. Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ est abst cvte} \iff \int_0^\theta 3 \left(\frac{x}{\theta}\right)^3 dx \text{ est cvte car } f = 0 \text{ en dehors de } [0, \theta]$$

La convergence de $\int_0^\theta 3 \left(\frac{x}{\theta}\right)^3 dx$ ne pose aucun problème en tant qu'intégrale d'une fonction polynomiale continue sur un segment, et :

$$\begin{aligned} \int_0^\theta 3 \left(\frac{x}{\theta}\right)^3 dx &= \left[\frac{3 x^4}{4 \theta^3} \right]_0^\theta \\ &= \frac{3\theta}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_i) = \frac{3\theta}{4}$.

Enfin S admet une espérance en tant que somme de n variables admettant chacune une espérance, qui vaut par *linéarité de l'espérance* :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_i) \\ &= \boxed{\frac{3n\theta}{4}} \end{aligned}$$

- Pour terminer calculons en cas d'existence $\mathbb{V}(X_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \text{ admet une variance} &\iff X_i^2 \text{ admet une espérance} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{E}(X_i^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

et la variance de X_i qui existerait $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par voie de conséquence, serait donnée par le *théorème de Huygens-Koenig* :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ est cvte} \iff \int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^4 dx \text{ est cvte car } f = 0 \text{ en dehors du segment } [0, \theta]$$

La convergence de $\int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^4 dx$ ne pose aucun problème en tant qu'intégrale d'une fonction polynomiale continue sur un segment, et :

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^4 dx &= \left[\frac{3 x^5}{5 \theta^3} \right]_0^\theta \\ &= \frac{3\theta^2}{5} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{3\theta^2}{5}$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_i) &= \frac{3\theta^2}{5} - \left(\frac{3\theta}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3\theta^2}{80} \end{aligned}$$

Enfin S_n admet une variance en tant que somme de n variables admettant chacune une variance, qui vaut par indépendance des n variables X_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \\ &= \frac{3n\theta^2}{80} \end{aligned}$$

b Montrons pour commencer que Y_n est une variable aléatoire. Nous avons $T_n(\Omega) = [0, \theta]$ et :

- si $x < 0$, $(T_n \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x > \theta$, $(T_n \leq x) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- si $x \in [0, \theta]$,

$$\begin{aligned} (T_n \leq x) &= (\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= \bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

puisque pour tout k , X_k est une variable à densité et par stabilité de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour l'intersection.

Ainsi selon ces trois points T_n est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_{T_n} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_n}(x) = \mathbf{P}([T_n \leq x])$$

Cela donne :

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x) \\ \quad = \prod_{k=1}^n \left(\int_0^x \frac{3t^2}{\theta^3} dt\right) & \text{si } x \in [0, \theta] \\ \quad = \prod_{k=1}^n \left(\frac{x}{\theta}\right)^3 \\ \quad = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{3n} & \text{si } x > \theta \\ 1 & \end{cases}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_{T_n} = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_{T_n} = 1$,
- F_{T_n} est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle),
- F_{T_n} est continue sur $]0, \theta[$ (fonction constante égale à 1),
- F_{T_n} est continue sur $[0, \theta]$ (monôme),
- $\lim_{0^-} F_{T_n} = 0 = \lim_{0^+} F_{T_n} = F_{T_n}(0)$,
- $\lim_{\theta^-} F_{T_n} = 0 = \lim_{\theta^+} F_{T_n} = F_{T_n}(\theta)$ donc F_T est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_{T_n} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut être en 0 et θ ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que T_n est une variable à densité dont une densité f_{T_n} est obtenue par dérivation de F_{T_n} sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_{T_n} une densité de T_n et nous poserons que $f_{T_n}(0) = f_{T_n}(\theta) = 0$. Cela donne :

$$f_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [\theta, +\infty[\\ \frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}} & \text{si } x \in]0, \theta[\end{cases}$$

14 Produit d'une variable normale et d'une variable à deux états, covariance

a Soit F_Z la fonction de répartition de Z , d'ensemble image \mathbb{R} , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

L'ensemble $\{[Y = 1], [Y = -1]\}$ forme un *système complet d'événements* de probabilités non nulles, et selon la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([Z \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([XY \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([XY \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X \leq x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]), \quad X, Y \text{ ind.} \\ &= \mathbf{P}([X \geq -x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\ &= (1 - \mathbf{P}([X < -x])) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\ &= \frac{1}{2} ((1 - \Phi(-x)) + \Phi(x)) \\ &= \frac{1}{2} (\Phi(x) + \Phi(x)) \\ &= \Phi(x) \end{aligned}$$

Moralité :

$$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

b Nous admettrons que, comme dans le cas discret :

$$\text{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Z)$$

Tout d'abord, de par les lois suivies par X et Z , nous pouvons écrire que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) = 0$. La recherche de $\mathbb{E}(XZ)$ va nécessiter la recherche de la loi de XZ soit celle de X^2Y .

Pour commencer $(XZ)(\Omega) = \mathbb{R}$.

Soit F_{XZ} la fonction de répartition de XZ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{XZ}(x) = \mathbf{P}([XZ \leq x])$$

L'ensemble $\{[Y = 1], [Y = -1]\}$ forme un *système complet d'événements* de probabilités non nulles, et selon la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{XZ}(x) &= \mathbf{P}([XZ \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([XZ \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([X^2Y \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2Y \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X^2 \leq x] \cap [Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([-X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]), \quad X^2, Y \text{ ind.} \\ &= \mathbf{P}([X^2 \geq -x]) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\ &= (1 - \mathbf{P}([X^2 < -x])) \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \end{aligned}$$

- Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}
 F_{XZ}(x) &= (1 - \mathbf{P}([X^2 < -x])) \mathbf{P}([Y = -1]) + 0 \times \mathbf{P}([Y = 1]) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \mathbf{P}([-\sqrt{-x} < X < \sqrt{-x}])) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - (\Phi(\sqrt{-x}) - \Phi(-\sqrt{-x}))) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - (\Phi(\sqrt{-x}) - (1 - \Phi(\sqrt{-x})))) \\
 &= \frac{1}{2} (2 - 2\Phi(\sqrt{-x})) \\
 &= 1 - \Phi(\sqrt{-x})
 \end{aligned}$$

- Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 F_{XZ}(x) &= 1 \times \mathbf{P}([Y = -1]) + \mathbf{P}([X^2 \leq x]) \mathbf{P}([Y = 1]) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \mathbf{P}([-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}])) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + (\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}))) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + (\Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})))) \\
 &= \Phi(\sqrt{x})
 \end{aligned}$$

On pourrait démontrer comme d'habitude que F_{XZ} possède les cinq fameuses propriétés permettant d'affirmer que XZ est une variable à densité, mais pour changer un peu de méthode, dérivons directement F_{XZ} sur \mathbb{R}^* , nous obtenons ainsi f_{XZ} une fonction dont on démontrera sans mal que c'est une densité de probabilité, et nous poserons que $f_{XZ}(0) = 0$ soit :

$$\begin{aligned}
 f_{XZ}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} f_X(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Démontrons, rapidement que f_{XZ} représente une densité de probabilité.

La parité de cette fonction nous permet d'aller plus vite en étudiant simplement la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx$. Introduisons :

$$\begin{aligned}
 \varphi : (\mathbb{R}_+^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (\alpha, \beta) &\longmapsto \varphi(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx
 \end{aligned}$$

Posons, alors le changement de variable $u = \rho(x) = \sqrt{x}$, ρ étant de classe \mathcal{C}^1 et bijectif sur \mathbb{R}_+^* . Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx &= \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}u^2} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} e^{\frac{1}{2}u^2} du
 \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\alpha}}^1 e^{\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}u^2} du \text{ par déf. de la cv d'une int. génér.}$$

$$\text{et } \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\sqrt{\beta}} e^{\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{\frac{1}{2}u^2} du \text{ par déf. de la cv d'une int. génér.}$$

Comme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{2}$$

(à partir de l'intégrale de Gauss), $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ converge en tant que somme de deux intégrales convergente et vaut $\frac{1}{2}$. Cela entraîne, par parité de f_{XZ} , que $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\sqrt{-x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$ aussi et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XZ}$ converge et vaut 1.

Enfin comme la positivité de f_{XZ} ne pose aucun problème, sa continuité étant réalisée sur au moins \mathbb{R}^* , cette fonction est bien une densité de probabilité, dont l'espérance serait nulle sous réserve d'existence. Du fait que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{x}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

par croissances comparées. Alors la règle du produit " $x^\alpha f(x)$ " permet de conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ converge de même que $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{2\sqrt{-x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x}{2}} dx$. Ainsi XZ admet une espérance qui est nulle.

Moralité :

$$\boxed{Cov(X, Z) = 0}$$

15 Loi gamma

a L'application $t \mapsto e^{-t}t^{a-1}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* comme produit de fonctions continues sur cet intervalle, donc l'intégrale pose deux problème de convergence : en 0 et en $+\infty$.

- Etude en 0.

Nous avons :

$$0 < e^{-t}t^{a-1} \underset{0}{\sim} t^{a-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$$

avec $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-a}}$ convergente en tant qu'intégrale de Riemann si et seulement si $1 - a < 1 \iff a > 0$. Alors le critère d'équivalence appliqué aux intégrales de fonctions positives permet de dire que $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1} dt$ converge si et seulement si $a > 0$ (i).

- Etude en $+\infty$.

$$\forall t > 0, \quad 0 \leq t^2 \times e^{-t}t^{a-1} = e^{-t}t^{a+1}$$

et pour tout x réel $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t}t^{a+1} = 0$ (limite usuelle du cours). Donc :

$$e^{-t}t^{a-1} = \underset{+\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$. Donc $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{a-1} dt$ converge aussi (ii).

Conclusion : selon (i) et (ii)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^{a-1}} dt \text{ converge si et seulement si } x > 0$$

1.b

Par définition :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \Gamma(a+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^a} dt \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \int_{\gamma}^1 e^{-t^a} dt + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} e^{-t^a} dt \end{aligned}$$

Or :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall \theta > t_0 \quad \int_{t_0}^{\theta} e^{-t^a} dt = [-t^a e^{-t}]_{t_0}^{\theta} + a \int_{t_0}^{\theta} e^{-t^{a-1}} dt$$

en intégrant par parties où $u : t \mapsto t^a$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Moralité :

$$\begin{aligned} \forall a > 0, \Gamma(a+1) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \int_{\gamma}^1 e^{-t^a} dt + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} e^{-t^a} dt \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \left([-t^a e^{-t}]_{\gamma}^1 + a \int_{\gamma}^1 e^{-t^{a-1}} dt \right) + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left([-t^a e^{-t}]_1^{\beta} + a \int_1^{\beta} e^{-t^{a-1}} dt \right) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \left(\gamma^a e^{-\gamma} - e^{-1} + a \int_0^1 e^{-t^{a-1}} dt \right) + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\beta^a e^{-\beta} + e^{-1} + a \int_1^{+\infty} e^{-t^{a-1}} dt \right) \text{ cv des int.} \\ &= a \int_0^1 e^{-t^{a-1}} dt + a \int_1^{+\infty} e^{-t^{a-1}} dt \\ &= a \int_0^{+\infty} e^{-t^{a-1}} dt \text{ par Chasles} \\ &= a\Gamma(a) \end{aligned}$$

1.c

En appliquant le résultat précédent nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^{\alpha} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate permet alors de conclure très rapidement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

2.a

Il n'y a pas de problème particulier pour répondre à cette question où la positivité sur \mathbb{R} , la continuité sur \mathbb{R}^* et la convergence (car $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = 1$) sont assurées donc :

$$f_a \text{ est une densité de probabilité}$$

2.b

- $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) \text{ existe} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x f_a(x) dx \text{ est absolument convergente} \\ &\iff \int_0^{+\infty} x f_a(x) dx \text{ est convergente puisque } f_a \text{ coïncide avec } 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^a}{\Gamma(a)} dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

Or $\forall a > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^a dx$ converge et vaut $\Gamma(a+1)$.

Conclusion : $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut :

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \boxed{a}$$

- $\mathbb{V}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) \text{ existe} &\iff \mathbb{E}(X^2) \text{ existe} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_a(x) dx \text{ est absolument convergente} \\ &\iff \int_0^{+\infty} x^2 f_a(x) dx \text{ est convergente puisque } f_a \text{ coïncide avec } 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{a+1}}{\Gamma(a)} dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

Or $\forall a > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a+1} dx$ converge et vaut $\Gamma(a+2)$.

Conclusion : $\mathbb{E}(X^2)$ existe et vaut :

$$\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} = a(a+1)$$

Par suite $\mathbb{V}(X)$ existe et vaut par le *théorème de Huygens-Koenig* :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= a(a+1) - a^2 \\ &= \boxed{a} \end{aligned}$$

16 Loi gamma et loi de Poisson

Pour changer de la correction "live" procédons par récurrence sur $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

- L'initialisation pour $\alpha = 1$ ne pose aucun problème, car :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < 1]) &= \mathbf{P}([Y = 0]) \\ &= e^{-\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} dt &= [-e^{-t}]_{\lambda}^{+\infty} \\ &= e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- **(H)** Supposons que pour α fixé dans \mathbb{N}^* , la proposition soit vraie.

- Montrons qu'elle l'est-elle pour $\alpha + 1$.
Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < \alpha + 1]) &= \mathbf{P}([Y < \alpha]) + \mathbf{P}([Y = \alpha]) \\ &= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} dt + \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\alpha}}{\alpha!} \text{ selon (H)} \end{aligned} \tag{1}$$

Introduisons :

$$\begin{aligned} \varphi :]\lambda, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto \varphi(\beta) = \int_{\lambda}^{\beta} \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} dt \end{aligned}$$

Procédons par intégration par parties en posant $u : t \mapsto e^{-t} \implies u' : t \mapsto -e^{-t}$ et $v' : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \Leftarrow v : t \mapsto \frac{t^{\alpha}}{\alpha!}$ avec $(u, v) \in (\mathcal{C}^1([\lambda, \beta], \mathbb{R}))^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \beta > \lambda, \varphi(\beta) &= \left[\frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha!} \right]_{\lambda}^{\beta} + \int_{\lambda}^{\beta} \frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha!} dt \\ &= \frac{e^{-\beta} \beta^{\alpha}}{\alpha!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\alpha}}{\alpha!} + \int_{\lambda}^{\beta} \frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha!} dt \end{aligned}$$

Enfin par passage à la limite, quand β tend vers l'infini, nous obtenons, du fait de la convergence de l'intégrale en jeu :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \varphi(\beta) &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-\beta} \beta^{\alpha}}{\alpha!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\alpha}}{\alpha!} + \int_{\lambda}^{\beta} \frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha!} dt \right) \\ &= -\frac{e^{-\lambda} \lambda^{\alpha}}{\alpha!} + \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha!} dt \end{aligned} \tag{2}$$

D'où selon (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < \alpha + 1]) &= -\frac{e^{-\lambda} \lambda^{\alpha}}{\alpha!} + \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha!} dt + \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\alpha}}{\alpha!} \\ &= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha!} dt \\ &= \mathbf{P}([X > \lambda]) \end{aligned}$$

Ainsi la proposition est transmissible, ce qui la rend héréditaire pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([Y < \alpha]) = \mathbf{P}([X > \lambda])$$

17 Loi log-normale.

a Tout d'abord $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$. Examinons donc les problèmes de convergence en 0 et en $+\infty$.

Pour cela introduisons :

$$\begin{aligned} I : (\mathbb{R}_+^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt, \text{ avec } \alpha < \beta \end{aligned}$$

Posons le changement de variable $u = \psi(t) = \frac{\ln t}{a}$ où ψ réalise une bijection de dérivée non nulle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Alors $du = \frac{dt}{at}$ et :

$$\begin{aligned}
 I(\alpha, \beta) &= \int_{\frac{\ln \alpha}{a}}^{\frac{\ln \beta}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \int_{\frac{\ln \alpha}{a}}^{\frac{\ln \beta}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du
 \end{aligned}$$

- Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\ln \alpha}{a}}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

car l'intégrale converge.

- Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{at} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\ln \beta}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

car l'intégrale converge.

Comme les deux limites existent et sont finies $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge et vaut la somme des limites, à savoir 1.

b La continuité de h sur \mathbb{R}_- étant triviale ainsi que sa continuité sur \mathbb{R}_+^* (en tant que produit, quotient et composée de fonctions continues à détailler), sa positivité sur \mathbb{R} et le résultat de la question précédente permettent de dire que :

h est une densité de probabilité

- c** Nous avons :

$$\begin{aligned}
 X \text{ admet une espérance} &\iff \int_{\mathbb{R}} th(t) dt \text{ est absolument convergente} \\
 &\iff \int_0^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt \text{ est cvte}
 \end{aligned}$$

Introduisons :

$$\begin{aligned}
 J: (\mathbb{R}_+^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (\alpha, \beta) &\longmapsto J(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt, \text{ avec } \alpha < \beta
 \end{aligned}$$

Avec le même changement de variable :

$$\begin{aligned}
 u = \psi(t) &= \frac{\ln t}{a} \\
 \iff u &= \frac{\ln t}{a} \\
 \iff t &= \exp(ua)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(\alpha, \beta) &= \int_{\frac{\ln \alpha}{a}}^{\frac{\ln \beta}{a}} \frac{e^{ua}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&= \int_{\frac{\ln \alpha}{a}}^{\frac{\ln \beta}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2 - 2ua}{2}\right) du \\
&= \int_{\frac{\ln \alpha}{a}}^{\frac{\ln \beta}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}((u-a)^2 - a^2)\right) du \\
&= \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln \alpha}{a}}^{\frac{\ln \beta}{a}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u-a)^2\right) du
\end{aligned}$$

Posons un autre changement de variable $v = u - a$ affine, donc "mécanique", avec $dv = du$. Ainsi :

$$J(\alpha, \beta) = \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln \alpha}{a} - a}^{\frac{\ln \beta}{a} - a} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) dv$$

et par un même raisonnement qu'au **a.** :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J(e^\alpha, 1) = \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} J(1, e^\beta) = \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{2}$$

Ainsi comme les limites de J existe et sont finies, X admet une espérance qui vaut :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = e^{\frac{a^2}{2}}}$$

d

Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire.

Nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{R}$ et :

- Si $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(Y \leq x) &= \left(\frac{\ln X}{a} \leq x\right) \\
&= (X \leq \exp(ax)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

puisque X est une variable à densité. Ainsi selon ce point Y est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) \\
&= \mathbf{P}([X \leq \exp(ax)]) \\
&= F_X(\exp(ax)) \\
&= \int_{-\infty}^{\exp(ax)} h(t) dt \\
&= \boxed{\int_{-\infty}^{\exp(ax)} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2a^2}\right) dt}
\end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Y = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Y = 1$,

- F_Y est continue sur \mathbb{R} par composition de $x \mapsto \exp(ax)$ continue sur \mathbb{R} et de F_X continue aussi sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} toujours par composition des deux fonctions précédentes $x \mapsto \exp(ax)$ étant \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $F_X : \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R}_+^* , ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur \mathbb{R} nous obtenons f_Y une densité de Y . Cela donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) &= ae^{ax} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ae^{ax}} \exp \left(-\frac{(\ln(e^{ax}))^2}{2a^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

et nous pouvons conclure que :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

e Montrons pour commencer que Z est une variable aléatoire.

Nous avons $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, donc :

- Si $x \leq 0 : (Z \leq x) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
- Si $x > 0 : (Z \leq x) = \left(\frac{1}{X} \leq x \right) = \left[X \geq \frac{1}{x} \right] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque X est une variable à densité.

Ainsi selon ces deux points Z est bien une variable aléatoire. Est-elle à densité ? Pour répondre à cette question déterminons sa fonction de répartition F_Z définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P} \left(\left[X \geq \frac{1}{x} \right] \right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - F_X \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_Z = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_Z = 1$,
- F_Z est continue sur \mathbb{R}_+^* (fonction nulle),
- F_Z est continue sur \mathbb{R}_+ (différence et composition de $x \mapsto \frac{1}{x} : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}_+^* et $F_X : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{0^-} F_Z = 0 = \lim_{0^+} F_Z = F_Z(0)$, donc F_Z est continue sur \mathbb{R} .
- D'autre part F_Z est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut être en 0 ce qui fait qu'elle a toutes les propriétés requises pour affirmer que Z est une variable à densité dont une densité f_Z est obtenue par dérivation de F_Z sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_Z une densité de Z et nous poserons que $f_Z(0) = 0$, soit :

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ - \left(-\frac{1}{x^2} \right) h \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left(-\frac{(\ln \frac{1}{x})^2}{2a^2} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{ax \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\ln x)^2}{2a^2} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

Z suit une loi log-normale de paramètre $a > 0$

